Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Об эквивалентных нормировках пространств H_p^r на компактных однородных многообразиях, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 898–909

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1013>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:57:53

УДК 517.518

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НОРМИРОВКАХ ПРОСТРАНСТВ H_p^r НА КОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. С. Платонов

Пусть M – произвольное компактное риманово симметрическое пространство ранга 1. Ранее на M были введены функциональные пространства H_p^r типа Никольского с помощью усредненных разностей вдоль геодезических. В настоящей работе получены эквивалентные описания и нормировки этих пространств с использованием оператора Лапласа–Бельтрами. Результаты обобщают результаты Никольского и Лизоркина о пространствах H_p^r на сфере.

Библиография: 12 названий.

1. Введение и формулировка основных результатов. В работах С.М. Никольского и П.И. Лизоркина [1], [2] введены гёльдеровы пространства H_p^r на n -мерной сфере S^n , получено описание этих пространств в терминах наилучших приближений сферическими полиномами, а также получены различные эквивалентные нормировки этих пространств. С точки зрения дифференциальной геометрии сфера S^n является частным представителем из важного класса однородных многообразий – компактных римановых симметрических пространств ранга 1 (сокращенно КРОСПов, см. [3], [4]). Для этих пространств уже получен ряд результатов по гармоническому анализу и теории приближений функций (см. [5]–[10]), но остается еще много задач. В [10] для произвольного КРОСПа M с помощью усредненных разностей вдоль геодезических введены пространства $H_p^r(M)$, обобщающие пространства Никольского–Лизоркина [1] на сфере (точное определение см. ниже). В настоящей работе получены эквивалентные нормировки этих пространств с использованием оператора Лапласа–Бельтрами. Аналогичные результаты для сферы получены в [2].

Всюду в дальнейшем M – КРОСП. Хорошо известна полная классификация всех КРОСПов (см., например, [4]). Их всего четыре серии (индекс n всюду означает размерность многообразия): сферы S^n ($n = 1, 2, \dots$), вещественное, комплексное и кватернионное проективные пространства ($P^n(\mathbb{R})$ ($n = 2, 3, \dots$), $P^n(\mathbb{C})$ ($n = 4, 6, \dots$), $P^n(\mathbb{H})$ ($n = 8, 12, 16, \dots$)) и одно особое пространство – эллиптическая плоскость Кэли $P^{16}(\text{Ca})$. Так как задачи гармонического анализа на $P^n(\mathbb{R})$ легко сводятся к соответствующим задачам на S^n , то будем считать, что $M \neq P^n(\mathbb{R})$.

КРОСП M всегда является римановым многообразием, пусть dx – элемент объема на M . Через $L_p(M)$ обозначим банахово пространство (БП), состоящее из измеримых

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-01-01391.

комплекснозначных функций $f(x)$ на M (с точностью до значений на множестве меры нуль) с конечной нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(M)} = \left(\int_M |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Пусть $L_\infty(M) = C(M)$ – пространство непрерывных на M функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_{x \in M} |f(x)|.$$

Для $x \in M$ через $T_x M$ будем обозначать множество касательных векторов к многообразию M в точке x , через $S(x)$ – множество единичных касательных векторов $\xi \in T_x M$ (единичную сферу в $T_x M$). Будем обозначать через $d\mu_x(\xi)$ элемент объема сферы $S(x)$, а через σ – полный объем сферы $S(x)$.

Для $x \in M$, $\xi \in S(x)$ пусть $\gamma(x, \xi; t)$, $t \in \mathbb{R}$, – геодезическая линия на M , удовлетворяющая условиям $\gamma(x, \xi; 0) = x$ и $(d/ds)\gamma(x, \xi; s)|_{s=0} = \xi$, где $(d/ds)\gamma(s)$ – касательный вектор к кривой $\gamma(s)$. Введем оператор усреднения S_t , $t \in \mathbb{R}$, переводящий функцию $f \in L_p(M)$ в функцию $S_t f$, определенную формулой

$$(S_t f)(x) := \frac{1}{\sigma} \int_{S(x)} F(\gamma(x, \xi; t)) d\mu_x(\xi).$$

Как и в случае $M = S^n$, оператор S_t ограничен в L_p и

$$\|S_t f\|_p \leq \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

С помощью оператора S_t введем усредненные сферические разности порядка k ($k = 1, 2, \dots$)

$$(*\Delta_t^k f)(x) := \Delta_t^k S_\tau f(x)|_{\tau=0},$$

где

$$\Delta_t^k S_\tau f(x) := \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j S_{\tau+jt} f(x)$$

– обычная k -я разность с шагом t по переменной τ .

Пусть $\mathcal{D}$ – оператор Лапласа–Бельтрами на римановом многообразии M . Через $\mathcal{D}^l$ будем обозначать l -ю степень оператора $\mathcal{D}$, $l = 0, 1, 2, \dots$ ($\mathcal{D}^0$ – тождественный оператор).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $r > 0$ – действительное число, $1 \leq p \leq \infty$, k и l – произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие неравенству $k > r - 2l > 0$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $*H_p^r = {}^*H_p^r(M)$, если $f \in L_p(M)$, $\mathcal{D}^l f \in L_p(M)$ (действие оператора $\mathcal{D}^l$ понимается в смысле теории обобщенных функций) и

$$\|*\Delta_t^k \mathcal{D}^l f(x)\|_p \leq A t^{r-2l}, \quad t > 0,$$

где постоянная A не зависит от t .

Пространство ${}^*H_p^r(M)$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{{}^*H_p^r} := \|f\|_p + {}^*A_f, \quad (1.1)$$

где

$${}^*A_f := \sup_{t>0} \frac{\|{}^*\Delta_t^k \mathcal{D}^l f(x)\|_p}{t^{r-2l}}. \quad (1.2)$$

В дальнейшем будет показано, что пространство ${}^*H_p^r(M)$ не зависит от l , но пока частный случай пространства ${}^*H_p^r(M)$ при $l = 0$ будем обозначать через $H_p^r = H_p^r(M)$.

Спектр оператора Лапласа–Бельтрами $\mathcal{D}$ на M является дискретным, действительным и неположительным. Упорядочим его по убыванию ($0 = \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$) и обозначим через $\mathcal{H}_k$ собственное подпространство (всегда конечномерное) оператора $\mathcal{D}$, отвечающее собственному значению λ_k . Пусть $\mathcal{P}_m(M) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_m$. Функции из $\mathcal{P}_m(M)$ будем называть *сферическими полиномами* на M степени m (при $M = S^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами). Пусть

$$E_m(f)_p = \inf_{\Phi \in \mathcal{P}_m} \|f - \Phi\|_p$$

– наилучшее приближение функции $f \in L_p$ сферическими полиномами степени m в метрике L_p . Явный вид чисел λ_m приведен, например, в книге [3]. Отметим только, что $\lambda_m \asymp m^2$.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1.

1) Если $f \in {}^*H_p^r(M)$, то

$$E_m(f)_p \leq \frac{c_1 A_f}{m^r}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где A_f определяется формулой (1.2), а c_1 – не зависящая от f и m постоянная.

2) Обратно, если для функции $f \in L_p(M)$ выполняются неравенства

$$E_m(f)_p \leq \frac{B_f}{m^r}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

с некоторой постоянной B_f , не зависящей от m , то $f \in {}^*H_p^r(M)$ и

$$\|f\|_{{}^*H_p^r} \leq c_2(\|f\|_p + B_f),$$

где c_2 не зависит от f и m .

Доказательство теоремы 1 будет дано в п. 3. В п. 2 будут получены вспомогательные результаты, которые представляют и самостоятельный интерес.

Из теоремы 1 сразу получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Пространство ${}^*H_p^r(M)$ не зависит от чисел l и k , и выражение

$$\|f\|_p + \sup_{m=1,2,\dots} m^r E_m(f)_p$$

задает в ${}^*H_p^r(M)$ норму, эквивалентную исходной норме (1.1).

2. Вспомогательные результаты. Пусть M – КРОСП. Известно [3], [4], что все геодезические линии на M замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$. Риманова метрика на M определена с точностью до умножения на положительное число. Для удобства нормируем риманову метрику на M так, чтобы $l = \pi$. Выражение $E_1 \hookrightarrow E_2$ будет означать, что БП E_1 вложено в БП E_2 . Через $c, c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные в оценках, вообще говоря, разные в разных местах, не зависящие от f и t , но, возможно, зависящие от несущественных параметров p, r и т. д.

ЛЕММА 1. Любое ограниченное в H_p^r , $r > 0$, подмножество предкомпактно в L_p (т. е. вложение $H_p^r \hookrightarrow L_p$ вполне непрерывно).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – ограниченное подмножество в H_p^r и $\|f\|_{H_p^r} \leq K$ для любого $f \in D$. Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ в L_p существует конечная ε -сеть для D .

В [10] показано, что для любой функции $f \in H_p^r$ и для любого натурального числа t существует сферический полином $\Phi \in \mathcal{P}_m$, для которого имеет место оценка

$$\|f - \Phi\|_p \leq \frac{c\|f\|_{H_p^r}}{m^r}, \quad (2.1)$$

где c – не зависящая от f и t постоянная. Подберем число m так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{cK}{m^r} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Для каждой функции $f \in D$ возьмем какой-нибудь полином $\Phi \in \mathcal{P}_m$, удовлетворяющий условию (2.1). Пусть D_m – множество всех таких полиномов. Очевидно, что D_m – ограниченное подмножество в конечномерном пространстве $\mathcal{P}_m$. Следовательно, для D_m существует конечная $(\varepsilon/2)$ -сеть, которая по (2.2) является ε -сетью для D .

Приведем необходимые сведения из гармонического анализа на КРОСПах по книге [11]. Пусть G – группа изометрий многообразия M . Группа G компактная и естественным образом действует на M . Пусть o – фиксированная точка многообразия M , K – стационарная подгруппа точки o в группе G . Через dg и dk будем обозначать элементы нормированных мер Хаара на группах G и K соответственно (мера Хаара называется *нормированной*, если мера всей группы равна 1).

В пространстве $L_p(M)$ возникает квазирегулярное представление $\pi(g)$ группы G , если положить

$$(\pi(g)f)(x) := f(g^{-1}x), \quad g \in G, \quad f(x) \in L_p(M).$$

Каждое из собственных подпространств $\mathcal{H}_k$ инвариантно относительно представления π , и возникающее в $\mathcal{H}_k$ представление $\pi_k := \pi|_{\mathcal{H}_k}$ группы G неприводимо.

Пусть $\chi_k(g) = \text{tr } \pi_k(g)$ – характер представления π_k . Отметим следующие свойства характеров:

$$\chi_k(gh) = \chi_k(hg), \quad g, h \in G, \quad (2.3)$$

$$\chi_k(g^{-1}) = \overline{\chi_k(g)} \quad (2.4)$$

(черта означает комплексное сопряжение).

Для любых функций $\varphi(g)$ на группе G и $f(x)$ на M определяется свертка

$$\varphi * f(x) := \int_G \varphi(g) f(g^{-1}x) dg, \quad x \in M.$$

Если $f(x) \in \mathcal{H}_k$, то

$$\bar{\chi}_l * f = \begin{cases} d_k^{-1} f & \text{при } l = k, \\ 0 & \text{при } l \neq k, \end{cases}$$

где d_k – размерность пространства $\mathcal{H}_k$. Для любой функции $f(x) \in L_p(M)$ функция $\bar{\chi}_k * f$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_k$, и можно ввести ряд Фурье для функции $f(x)$:

$$f(x) \sim \sum_{l=0}^{\infty} d_l (\bar{\chi}_l * f(x)). \quad (2.5)$$

Если $f(x) \in L_2(M)$, то ряд (2.5) сходится в $L_2(M)$ и его сумма равна $f(x)$, а в общем случае при $f \in L_p(M)$ ряд Фурье однозначно определяет функцию $f(x)$.

Функция

$$\varphi_l(g) := \int_K \chi_l(g^{-1}k) dk$$

называется *сферической функцией* представления π_k (в [4], [11] приведены и другие эквивалентные определения сферических функций). Отметим следующие свойства сферических функций:

$$\begin{aligned} \varphi_l(k_1 g k_2) &= \varphi_l(g), \quad \varphi_l(g^{-1}) = \varphi_l(g), \quad g \in G, \quad k_1, k_2 \in K, \\ \int_K \varphi_l(gkh) dk &= \varphi_l(g) \varphi_l(h), \quad g, h \in G. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пользуясь инвариантностью меры Хаара на группе G относительно левых и правых сдвигов и свойствами (2.3), (2.4), получим, что

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_l * f(ho) &= \int_G \chi_l(g^{-1}) f(g^{-1}ho) dg = \int_G \chi_l(g^{-1}h^{-1}) f(g^{-1}o) dg \\ &= \int_G \chi_l(h^{-1}g^{-1}) f(g^{-1}o) dg = \int_G \chi_l(h^{-1}g^{-1}k) f(g^{-1}o) dg \\ &= \int_G \left(\int_K \chi_l(h^{-1}g^{-1}k) dk \right) f(g^{-1}o) dg = \int_G \varphi_l(gh) f(g^{-1}o) dg. \end{aligned}$$

Здесь $g, h \in G, k \in K$, причем было использовано, что $ko = o$. В результате

$$\bar{\chi}_l * f(ho) = \int_G \varphi_l(gh) f(g^{-1}o) dg \quad h \in G. \quad (2.7)$$

Зафиксируем какой-нибудь единичный касательный вектор $\xi_0 \in T_o M$. Геодезическую $\gamma(o, \xi_0; t)$ можно представить в виде

$$\gamma(o, \xi_0; t) = R(t)o,$$

где $R(t)$ – некоторая однопараметрическая подгруппа в группе G (это следует из общих свойств геодезических на симметрических пространствах, см. [4, гл. IV, теор. 33]).

ЛЕММА 2. Если $f(x) \in \mathcal{H}_l$, то

$$S_t f(x) = \varphi_l(R(t)) f(x). \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [10, лемма 2.1] показано, что

$$S_t f(x) = \int_K f(hkR(t)o) dk, \quad (2.9)$$

где $x = ho$, $h \in G$, $f(x) \in L_p(M)$. Если $f \in \mathcal{H}_l$, то $f = d_l \bar{\chi}_l * f$. Пользуясь (2.6), (2.7) и (2.9), получим

$$\begin{aligned} S_t(\bar{\chi}_l f(ho)) &= \int_G \int_K \varphi_l(ghkR(t)) f(g^{-1}o) dk dg \\ &= \int_G \varphi_l(gh) \varphi_l(R(t)) f(g^{-1}o) dg = \varphi_l(R(t)) \bar{\chi}_l * f(ho), \end{aligned}$$

откуда следует (2.8).

ЛЕММА 3. Если $f \in L_p$ и

$$\|* \Delta_t^k f(x)\|_p = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

то $f(x) = \text{const}$ для почти всех $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент $g \in G$ является изометрией многообразия M , откуда легко получить, что

$$\pi(g)(S_t f) = S_t(\pi(g)f), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех функций $f \in L_p$, удовлетворяющих условию $* \Delta_t^k f = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\mathfrak{N}$ – замкнутое линейное подпространство в L_p , а из (2.10) следует, что подпространство $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно представления π .

Пусть $f \in \mathfrak{N}$. Тогда в $\mathfrak{N}$ будут содержаться и функции $f_l(x) := \bar{\chi}_l * f$. Из леммы 2 следует, что

$$S_t(f_l) = \varphi_l(R(t)) f_l.$$

Тогда

$$* \Delta_t^k f_l = \Delta_t^k \varphi_l(R(\tau)) \Big|_{\tau=0} f_l,$$

где

$$\Delta_t^k \varphi_l(R(\tau)) \Big|_{\tau=0} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j \varphi_l(R(jt)). \quad (2.11)$$

Известны явные формулы для сферических функций φ_l (см. [11]). Из [11, гл. 5, теор 4.5] следует, что

$$\varphi_l(R(t)) = \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos t)}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad (2.12)$$

где $P_l^{(\alpha, \beta)}(z)$ – многочлен Якоби степени l , α и β – некоторые числа, зависящие от M . Из (2.11) и (2.12) следует, что при $l > 0$ функция $\Delta_t^k \varphi_l(R(\tau)) \Big|_{\tau=0}$ является четным тригонометрическим полиномом степени kl (со старшим коэффициентом не равным нулю), который обращается в нуль не более чем в kl точках отрезка $[0, \pi]$. Следовательно, из $* \Delta_t^k f_l = 0$ следует, что $f_l = 0$ в L_p при $l \neq 0$. Из единственности разложения в ряд Фурье функции $f \in \mathfrak{N}$ вытекает, что $f = f_0 = \text{const}$.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in H_p^r(M)$ и

$$\sigma_f := \frac{1}{v(M)} \int_M f(x) dx,$$

где $v(M)$ – мера всего пространства M (т. е. σ_f – среднее значение функции f). Тогда

$$\|f - \sigma_f\|_p \leq c A_f,$$

где число A_f определяется формулой (1.2) при $l = 0$, т. е.

$$A_f = \sup_{t>0} \frac{\|\Delta_t^k f(x)\|_p}{t^r},$$

c – не зависящая от f постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы получается практически дословным повторением доказательства леммы 2.2 из [2] с использованием в соответствующих местах доказательства лемм 1–3, поэтому оно здесь не приводится.

ЛЕММА 5 (неравенства типа Бернштейна). Для любого сферического полинома $\Phi \in \mathcal{P}_m(M)$ справедливы неравенства

$$\|\Delta_t^k \Phi(x)\|_p \leq c_1 (mt)^k \|\Phi\|_p, \quad (2.13)$$

$$\|\mathcal{D}^l \Phi(x)\|_p \leq c_2 m^{2l} \|\Phi\|_p, \quad (2.14)$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от Φ , m , t ($t > 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО неравенства (2.13) см. в [10, лемма 3.5], а неравенство (2.14) доказано в [7].

Пусть $L_p(G)$ – банахово пространство, состоящее из функций $\varphi(g)$ на группе G с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |\varphi(g)|^p dg \right)^{1/p}.$$

Если функция $\varphi(g)$, $g \in G$, удовлетворяет условию

$$\varphi(u_1 g u_2) = \varphi(g), \quad u_1, u_2 \in K$$

(такие функции называются *зональными*), множество всех таких функций обозначим через $Z(G)$, а $f(x)$ – функция на M , то определим свертку $f * \varphi(x)$ формулой

$$f * \varphi(x) := \int_G f(g^{-1}o) \varphi(gh) dg, \quad (2.15)$$

где $x = ho$, $h \in G$. Если $f \in L_p(M)$, $\varphi \in L_1(G) \cap Z(G)$, то $f * \varphi \in L_p(M)$ и выполняется неравенство

$$\|f * \varphi\|_{L_p(M)} \leq \|f\|_{L_p(M)} \|\varphi\|_{L_1(G)}. \quad (2.16)$$

Отметим, что любую зональную функцию $\varphi(g)$ на G можно рассматривать как функцию $\tilde{\varphi}(x)$ на M , если положить $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(g)$ для $x = go$. При этом нормы $\|\varphi\|_{L_p(G)}$ и $\|\tilde{\varphi}\|_{L_p(M)}$ совпадают с точностью до постоянного множителя.

Сферические функции $\varphi_m(g)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2(G) \cap Z(G)$, причем $\|\varphi_m\|_{L_2(G)}^2 = d_m^{-1}$, где d_m – размерность представления π_m . Любую функции $\varphi(g) \in L_p(G) \cap Z(G)$, $p \geq 1$, можно сопоставить ряд Фурье

$$\varphi(g) \sim \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_m(g),$$

где

$$c_m = d_m \int_G \varphi(g) \overline{\varphi_m(g)} dg.$$

Пусть

$$\psi_m(g) := d_m \varphi_m(g) = \frac{\varphi_m(g)}{\|\varphi_m\|_{L_2(G)}^2}.$$

Из (2.7) следует, что оператор

$$P_m: f(x) \mapsto f * \psi_m(x)$$

является проектором пространства $L_p(M)$ на $\mathcal{H}_m$.

Известно (см. [12] с учетом формулы (2.12)), что при $\alpha > 0$ существует функция $\mathcal{J}_\alpha(g) \in L_1(G) \cap Z(G)$ такая, что

$$\mathcal{J}_\alpha(g) \sim \sum_{m=1}^{\infty} (-\lambda_m)^{-\alpha/2} \psi_m(g).$$

Функция

$$F(x) = c + (f * \mathcal{J}_\alpha)(x) \quad (2.17)$$

(c – константа) называется *дробным интегралом порядка α от функции $f(x)$* , а функция f – *дробной производной порядка α от F* , причем для того чтобы f однозначно определялась по F , будем считать, что

$$\int_M f(x) dx = 0. \quad (2.18)$$

Из единственности разложения в ряд Фурье следует, что если $f(x) \in L_p(M)$ и $\mathcal{D}^l f \in L_p(M)$ (l – натуральное число), то $f(x) = c + (-\mathcal{D})^l f * \mathcal{J}_{2l}(x)$, поэтому и в общем случае, для любого $\alpha > 0$, если выполняются равенства (2.17) и (2.18), то будем писать $f := (-\mathcal{D})^{\alpha/2} F$.

Обозначим через $W_p^\alpha(M)$ множество всех функций $F(x) \in L_p(M)$, имеющих вид (2.17), для некоторой функции $f(x) \in L_p(M)$, удовлетворяющей условию (2.18).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $F(x) \in W_p^\alpha(M)$. Тогда

$$E_m(F)_p \leq \frac{c}{m^\alpha} \|(-\mathcal{D})^{\alpha/2} F\|_p, \quad (2.19)$$

где $c = c(M, \alpha)$ – не зависящая от F константа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in W_p^\alpha(M)$, тогда $F = F_0 + f * \mathcal{J}_\alpha$, $f \in L_p(M)$, $F_0 = \text{const}$. В [8] показано, что для функции $\mathcal{J}_\alpha(g)$ найдутся зональные функции вида

$$T_m(g) = \sum_{j=0}^m a_j \psi_j(g), \quad a_j \in \mathbb{C},$$

такие, что

$$\|\mathcal{J}_\alpha - T_m\|_{L_1(G)} \leq cm^{-\alpha}.$$

Рассмотрим сферический полином

$$\Phi_m(x) = F_0 + f * T_m(x) \in \mathcal{P}_m(M).$$

Пользуясь неравенствами (2.16) и (2.19), получим

$$\begin{aligned} \|F - \Phi_m\|_{L_p(M)} &= \|f * \mathcal{J}_\alpha - f * T_m\|_{L_p(M)} \\ &\leq \|f\|_{L_p(M)} \|\mathcal{J}_\alpha - T_m\|_{L_1(G)} \leq cm^{-\alpha} \|f\|_p, \end{aligned}$$

что доказывает (2.19).

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай $l = 0$, тогда ${}^*H_p^r(M) = H_p^r(M)$. Из [10, теорема 1] следует, что для любой функции $f \in H_p^r$ существует сферический полином $\Phi_m(f) \in \mathcal{P}_m$, для которого имеет место оценка

$$\|f - \Phi_m(f)\|_p \leq c \frac{\|f\|_{H_p^r}}{m^r}, \quad (3.1)$$

где постоянная c не зависит от f и m . Из построения сферического полинома $\Phi_m(f)$ в [10] (см. доказательство прямой части теоремы 1 в [10]) видно, что отображение $f \mapsto \Phi_m(f)$ из $L_p(M)$ в $\mathcal{P}_m(M)$ линейно и непрерывно и, кроме того,

$$\Phi_m(\sigma) = \sigma$$

для постоянной функции $f(x) \equiv \sigma$. Из этого следует, что среднее значение σ_f функции f равно среднему значению $\sigma_{\Phi_m(f)}$ функции $\Phi_m(f)$. Действительно,

$$\sigma_{\Phi_m(f)} = \frac{1}{v(M)} \int_M \Phi_m(f) dx = \Phi_m \left(\frac{1}{v(M)} \int_M f dx \right) = \Phi_m(\sigma_f) = \sigma_f.$$

В частности, если среднее значение функции f равно нулю, то и среднее значение полинома $\Phi_m(f)$ тоже равно нулю.

Из леммы 4 и неравенства (3.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_m(f)\|_p &= \|f - \sigma_f - \Phi_m(f - \sigma_f)\|_p \\ &\leq cm^{-r} \|f - \sigma_f\|_{H_p^r} = cm^{-r} (\|f - \sigma_f\|_p + A_{f-\sigma_f}) \\ &\leq c_1 m^{-r} (A_f + A_{f-\sigma_f}) = 2c_1 m^{-r} A_f. \end{aligned}$$

В последнем равенстве использовано очевидное соотношение $A_f = A_{f-\sigma_f}$. В результате получено, что

$$\|f - \Phi_m(f)\|_p \leq 2c_1 m^{-r} A_f,$$

что доказывает пункт 1) теоремы 1. Пункт 2) теоремы 1 для случая $l = 0$ доказан в [10, теорема 1].

Рассмотрим теперь случай $l > 0$. Если $f \in {}^*H_p^r$, то функция $\mathcal{D}^l f \in H_p^{r-2l}$. Тогда найдется последовательность сферических полиномов $F_m = \Phi_m(\mathcal{D}^l f) \in \mathcal{P}_m$, для которых

$$\|\mathcal{D}^l f - F_m\|_p \leq cAm^{-(r-2l)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

где $A = A_{\mathcal{D}^l f} = {}^*A_f$. Так как функция $\mathcal{D}^l f$ имеет нулевое среднее значение, то и $F_m = \Phi_m(\mathcal{D}^l f)$ имеет нулевое среднее значение, следовательно, F_m можно представить в виде

$$F_m(x) = \sum_{j=1}^m Y_j(x), \quad Y_j(x) \in \mathcal{H}_j.$$

Возьмем сферический полином

$$Q_m(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^{-l} Y_j(x) \in \mathcal{P}_m.$$

Тогда $\mathcal{D}^l Q_m = F_m$ и из (3.2) получаем, что

$$\|\mathcal{D}^l(f - Q_m)\|_p \leq cAm^{-(r-2l)}, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Очевидно, что функция $f - Q_m \in W_p^{2l}(M)$, поэтому из предложения 1 следует, что

$$E_m(f - Q_m)_p \leq c_1 m^{-2l} \|\mathcal{D}^l(f - Q_m)\|_p \leq c_2 Am^{-r}.$$

Так как $E_m(f - Q_m)_p = E_m(f)_p$, то

$$E_m(f) \leq c_2 Am^{-r} = c_2 {}^*A_f m^{-r}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

что доказывает пункт 1) теоремы 1.

Обратно, пусть $f \in L_p(M)$ и

$$E_m(f)_p \leq Bm^{-r}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где число $B = B_f$ не зависит от m . Пусть k и l натуральные числа, причем

$$k > r - 2l > 0.$$

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ выберем какой-нибудь сферический полином $\Phi_m \in \mathcal{P}_m$, для которого

$$\|f - \Phi_m\|_p \leq Bm^{-r}.$$

Построим последовательность сферических полиномов

$$T_1 := \Phi_1, \quad T_2 := \Phi_2 - \Phi_1, \quad \dots, \quad T_{2^s} := \Phi_{2^s} - \Phi_{2^{s-1}}, \quad \dots$$

Тогда по норме пространства L_p

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} T_{2^s},$$

причем

$$\|T_{2^s}\|_p \leq \|f - \Phi_{2^s}\|_p + \|f - \Phi_{2^{s-1}}\|_p \leq B(2^{-sr} + 2^{-(s-1)r}) \leq c_1 B 2^{-sr}.$$

Из неравенства (2.14) следует, что

$$\|\mathcal{D}^l T_{2^s}\|_p \leq c_2 (2^s)^{2l} \|T_{2^s}\|_p \leq c_3 B 2^{-s(r-2l)}.$$

Так как $r - 2l > 0$, то ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}^l T_{2^s}$$

сходится в пространстве L_p , следовательно, $\mathcal{D}^l f \in L_p$.

Обозначим $P_{2^s} := \mathcal{D}^l(T_{2^s})$. Тогда

$$\mathcal{D}^l f = \sum_{s=0}^{\infty} P_{2^s} \quad (3.3)$$

(ряд сходится в L_p) и

$$\|P_{2^s}\|_p \leq c_3 B 2^{-s(r-2l)}. \quad (3.4)$$

Нам требуется оценить сверху $\|*\Delta_t^k \mathcal{D}^l f\|_p$ при $t > 0$. Если $0 < t < 1$, то подберем неотрицательное целое число N так, чтобы

$$2^{-N-1} \leq t < 2^{-N}. \quad (3.5)$$

Если $t \geq 1$, то положим $N = -1$, тогда в (3.5) справедливо левое неравенство. Сумму (3.3) запишем в виде

$$\mathcal{D}^l f = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2,$$

где

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{s=0}^N P_{2^s}, \quad \mathcal{J}_2 = \sum_{s=N+1}^{\infty} P_{2^s},$$

причем при $N = -1$ будем считать, что $\mathcal{J}_1 = 0$. Тогда

$$*\Delta_t^k \mathcal{D}^l f = *\Delta_t^k \mathcal{J}_1 + *\Delta_t^k \mathcal{J}_2.$$

Для оценки $\|*\Delta_t^k \mathcal{J}_1\|_p$ воспользуемся неравенствами (2.13), (3.4) и (3.5). Получим

$$\begin{aligned} \|*\Delta_t^k \mathcal{J}_1\|_p &\leq \sum_{s=0}^N \|*\Delta_t^k P_{2^s}\|_p \leq c_3 B \sum_{s=0}^N (2^s t)^k 2^{-s(r-2l)} = c_3 B t^k \sum_{s=0}^N 2^{s(2l+k-r)} \\ &\leq c_4 B t^k t^{r-k-2l} = c_4 B t^{r-2l}. \end{aligned}$$

Для оценки $\|\Delta_t^k \mathcal{J}_2\|_p$ воспользуемся очевидным неравенством

$$\|\Delta_t^k f\|_p \leq 2^k \|f\|_p = c_5 \|f\|_p$$

и неравенствами (3.4), (3.5). Получим

$$\begin{aligned} \|\Delta_t^k \mathcal{J}_2\|_p &\leq \sum_{s=N+1}^{\infty} \|\Delta_t^k P_{2^s}\|_p \leq c_6 B \sum_{s=N+1}^{\infty} 2^{-s(r-2l)} \\ &= c_6 B \frac{2^{-(N+1)(r-2l)}}{1 - 2^{-(r-2l)}} \leq c_7 B t^{r-2l}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\|\Delta_t^k \mathcal{D}^l f\|_p \leq \|\Delta_t^k \mathcal{J}_1\|_p + \|\Delta_t^k \mathcal{J}_2\|_p \leq c_8 B t^{r-2l},$$

откуда следует пункт 2) теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никольский С. М., Лизоркин П. И. Аппроксимация функций на сфере // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 3. С. 635–651.
- [2] Никольский С. М., Лизоркин П. И. Об эквивалентных нормировках гёльдеровых пространств на сфере // Исследования по теории приближения функций. Уфа, 1987. С. 7–25.
- [3] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
- [4] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
- [5] Тихомиров В. М. Теория приближений // Соврем. пробл. матем. Фунд. направления. Т. 14, 1987.
- [6] Ragozin D. L. Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 150. P. 41–53.
- [7] Камзолов А. И. Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах // Матем. заметки. 1974. Т. 15. № 6. С. 967–978.
- [8] Камзолов А. И. О неравенстве Бора–Фавара для функций на компактных симметрических пространствах ранга 1 // Матем. заметки. 1983. Т. 33. № 2. С. 187–193.
- [9] Иванов В. А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Т. 38. № 3. С. 179–180.
- [10] Платонов С. С. Приближения функций на компактных симметрических пространствах ранга 1 // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 5. С. 113–130.
- [11] Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
- [12] Bavinck H. A special classes of Jacobi series and some applications // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 767–797.

Петрозаводский государственный университет
E-mail: platonov@mainpgu.karelia.ru

Поступило
16.10.1997