Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Эрина, О частичных суммах рядов Фурье–Хаара с произвольным коэффициентом растяжения, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:11:16

О частичных суммах рядов Фурье–Хаара с произвольным коэффициентом растяжения

Е. А. Эрина

Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ соответственно множества натуральных и вещественных чисел; $\langle A, B \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{C}$ – пространство непрерывных 1-периодических функций; $\omega(f, t)$ – модуль непрерывности функции f .

Рассмотрим классическую систему Хаара [1] с естественной нумерацией. Для любой непрерывной 1-периодической функции ее ряд Фурье по данной системе сходится равномерно. Хорошо известна следующая оценка уклонения частичных сумм:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq K\omega\left(f, \frac{1}{n}\right). \quad (1)$$

В [2] приводится значение константы K в этом неравенстве: $K = 3$, но данное значение не является наименьшим из возможных.

Из результата Хорошко [3]

$$\sup_{f \in H\omega} \|f - S_n(f)\|_\infty = 2^i \int_0^{2^{-i}} \omega(t) dt, \quad (2)$$

$$n = 2^i + j, \quad H\omega = \{f \in \mathbb{C} : \omega(f, t) \leq \omega(t), t \in [0; 1]\}$$

нетрудно получить меньшее значение константы K в (1): $K = 3/2$, и показать, что данная константа неулучшаема.

Перейдем к рассмотрению систем Хаара с произвольным коэффициентом растяжения. Зададим ортогональную матрицу A :

$$A = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \dots & a_{p-1,p} \end{pmatrix},$$

и по ней построим систему функций $\{\psi_k\}_{k=0}^\infty$. Первые $p-1$ функций зададим следующим образом:

$$\psi_l(x) = \begin{cases} a_{l,s}, & x \in \left(\frac{s-1}{p}, \frac{s}{p}\right), \quad s = 1, \dots, p, \\ 0, & x \notin [0; 1], \end{cases} \quad l = 0, \dots, p-1.$$

Остальные функции системы определяются из соотношения

$$\psi_{p^i + (p-1)j + l - 1}(x) = p^{i/2} \psi_l(p^i x - j), \quad i \in \mathbb{N}, \quad j = 0, \dots, p^i - 1, \quad l = 1, \dots, p-1.$$

Каждая функция периодически продолжается на всю ось. В точках разрыва значения функций принимаются равными полусумме левого и правого пределов. То есть система Хаара с произвольным коэффициентом растяжения строится следующим образом: в качестве ψ_0 берется характеристическая функция отрезка $[0; 1]$; далее задаются ψ_k , $k = 1, \dots, p-1$, – кусочно-постоянные функции, принимающие значения, равные элементам k -й строки матрицы A , на интервалах $((s-1)/p, s/p)$, $s = 1, \dots, p$; затем $[0; 1]$ делится

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00216), и СПбГУ (НИР № 9.38.62.2012).

на p равных интервалов, на каждом из которых задается еще $p - 1$ функция, каждая из которых является сжатой и сдвинутой копией одной из ψ_k , $k = 1, \dots, p - 1$, и т.д.

Легко проверить ортонормированность данной системы. Также известно, что она является базисом в $L_2(0; 1)$ (см., например, [4]). Обозначим через $S_n(f)$ частичную сумму ряда Фурье по данной системе. Целью данной работы является получение неравенства, аналогичного неравенству (1), и значения точной константы в нем.

Прежде чем сформулировать основной результат введем вспомогательные величины C_l , $l = 1, \dots, p - 2$, ассоциированные с матрицей A и однозначно определяющиеся по следующему алгоритму:

- 1) по матрице A строятся вспомогательные матрицы $A^{(l)}$, состоящие из первых $l + 1$ строк матрицы A :

$$A^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,1} & a_{l,2} & \dots & a_{l,p} \end{pmatrix} = (A_1^{(l)}, \dots, A_p^{(l)}), \quad l = 1, \dots, p - 2;$$

- 2) для каждого $k = 1, \dots, p$ вычисляются коэффициенты $\alpha_{i,k}^{(l)}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k}^{(l)} &= \sum_{j=1}^i \langle A_j^{(l)}, A_k^{(l)} \rangle, & i = 1, \dots, k - 1, \\ \alpha_{k,k}^{(l)} &= 1, \\ \alpha_{i,k}^{(l)} &= \sum_{j=i}^p \langle A_j^{(l)}, A_k^{(l)} \rangle, & i = k + 1, \dots, p; \end{aligned}$$

- 3) за $\bar{k}_l$ примем номер, на котором достигается максимум следующей суммы:

$$\max_{k=1, \dots, p} \left\{ \sum_{i=1}^p |\alpha_{i,k}^{(l)}| \right\};$$

- 4) определяются C_l :

$$C_l = \begin{cases} \sum_{i=1}^p |\alpha_{i,\bar{k}_l}^{(l)}|, & (\alpha_{\bar{k}_l-1,\bar{k}_l}^{(l)} > 0) \& (\alpha_{\bar{k}_l+1,\bar{k}_l}^{(l)} > 0) \\ \sum_{i=1, i \neq \bar{k}_l+1}^p |\alpha_{i,\bar{k}_l}^{(l)}|, & \alpha_{\bar{k}_l-1,\bar{k}_l}^{(l)} \geq \alpha_{\bar{k}_l+1,\bar{k}_l}^{(l)} > 0 \\ \sum_{i=1, i \neq \bar{k}_l-1}^p |\alpha_{i,\bar{k}_l}^{(l)}|, & \alpha_{\bar{k}_l-1,\bar{k}_l}^{(l)} > \alpha_{\bar{k}_l+1,\bar{k}_l}^{(l)} > 0. \end{cases}$$

Теперь можно сформулировать теоремы, дающие ответ на вопрос о точном значении константы C в неравенстве (3).

ТЕОРЕМА 1. 1) Для любой $f \in \mathbb{C}$ имеет место оценка

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq C \omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad (3)$$

где

$$C = \max \left\{ \frac{p+1}{2}, \max_{l=1, \dots, p-2} C_l \right\}.$$

2) Константа C является точной в том смысле, что для любого $\epsilon > 0$ существует $f \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\|f - S_n(f)\|_\infty = (C - \epsilon)\omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

Также верен следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ представлено в следующем виде:

$$n = p^i + (p-1)j + l - 1, \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad j = 0, \dots, p^i - 1, \quad l = 2, \dots, p.$$

Тогда

$$\sup_{f \in \mathbb{C}} \frac{\|f - S_n(f)\|_\infty}{\omega(f, p^{-i-1})} = \begin{cases} 1, & (j = p^i - 1) \& (l = p), \\ \frac{p+1}{2}, & (j \neq p^i - 1) \& (l = p), \\ C_l, & (l \neq p). \end{cases}$$

Заметим также, что для систем Хаара с произвольным коэффициентом растяжения результат, аналогичный (2), вообще говоря, неверен. Действительно, если бы имела место оценка

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq p^i \int_0^{p^{-i}} \omega(f, t) dt, \quad n = p^i + j, \quad (4)$$

то, разбивая интеграл в правой части на сумму p интегралов по отрезкам $[(k-1)/p^{i+1}, k/p^{i+1}]$, $k = 1, \dots, p$ и оценивая каждый через значение подынтегральной функции на верхнем пределе, получили бы следующий результат:

$$\|f - S_n(f)\|_\infty \leq \frac{p+1}{2} \omega\left(f, \frac{1}{p^{i+1}}\right) \leq \frac{p+1}{2} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad n = p^i + j, \quad (5)$$

т.е. $C = (p+1)/2$.

Однако, уже при $p = 3$ существуют матрицы, для которых оценка (5) неверна. Например, для матрицы

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}-1} & \frac{-1}{1+\sqrt{3}} & -1 \end{pmatrix}$$

константа C равна $C_1 \approx 2,07 > (3+1)/2 = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Наар, *Math. Ann.*, **69:3** (1910), 331–371. [2] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999. [3] Н. П. Хорошко, *Укр. матем. журн.*, **22:5** (1970), 705–712. [4] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.

Е. А. Эрина

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: ekaterina.erina.spb@gmail.com

Поступило

24.03.2012