Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Комбаров, О δ -нормальности F_σ -множеств в топологии Фелла, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 786–788

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:10:01

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О δ -нормальности F_σ -множеств в топологии Фелла

А. П. Комбаров

В этой заметке все топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми. Под ординалом понимается множество всех меньших ординалов, кардинальное число – это начальный ординал. Обозначения и терминология, не разъясняемые ниже, такие же, как в книге [1]. Пространство называется δ -нормальным [2], если любые два непересекающихся замкнутых множества, одно из которых является регулярным G_δ -множеством, содержатся в непересекающихся окрестностях. При этом подмножество G называется *регулярным G_δ -множеством*, если оно является пересечением счетного числа замкнутых множеств, внутренности которых содержат множество G . Например, нуль-множество любой непрерывной действительной функции является регулярным G_δ -множеством. Всякое нормальное пространство, очевидно, δ -нормально и, более того, всякое F_σ -подмножество нормального пространства δ -нормально, поскольку хорошо известно, что нормальность является наследственным свойством по отношению к F_σ -множествам (см. [1; 2.1.E(a), 2.7.2(b)]). Произведение $(\omega_1 + 1) \times \omega_1$, как известно, не является нормальным пространством, но, как нетрудно показать, всякое F_σ -подмножество этого произведения δ -нормально. Далее, если X – топологическое пространство, то $CL(X)$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств X . Предбазу топологии Фелла τ_F на множестве $CL(X)$ образуют множества вида

$$V^- = \{F \in CL(X) : F \cap V \neq \emptyset\}, \quad (X \setminus K)^+ = \{F \in CL(X) : F \cap K = \emptyset\},$$

где множество V открыто в X , а множество K является компактным подмножеством X [3]. Пространство $(CL(X), \tau_F)$ называется *гиперпространством Фелла* и имеет многочисленные приложения в различных областях математики (см., например, [4], [5]).

В статье [6] доказана следующая теорема 1.

ТЕОРЕМА 1. *Пространство X является локально компактным и линделёфовым тогда и только тогда, когда гиперпространство $(CL(X), \tau_F)$ нормально.*

Поскольку топологическое свойство, заключающееся в том, что любое F_σ -множество δ -нормально, строго слабее свойства нормальности, следующая теорема 2 является усилением предыдущей теоремы 1 и представляет собой основной результат настоящей заметки.

ТЕОРЕМА 2. *Пространство X является локально компактным и линделёфовым тогда и только тогда, когда в гиперпространстве $(CL(X), \tau_F)$ любое F_σ -множество δ -нормально.*

ЛЕММА 1. *Если пространство Y содержит счетное незамкнутое множество, а любое F_σ -подмножество произведения $X \times Y$ является δ -нормальным пространством, то пространство X нормально.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00729а).

Доказательство. Пусть $Y \supset M \neq \overline{M}$, $|M| \leq \omega$, и пусть $y \in \overline{M} \setminus M$. Если $M_0 = \{y\} \cup M$, то y является регулярным G_δ -множеством в счетном пространстве M_0 . В самом деле, поскольку пространство M_0 хаусдорфово, для каждой точки $m \in M$ найдется открытое множество O_m такое, что $y \in O_m$, но $m \notin \overline{O_m}$, и, следовательно, точка y является пересечением счетного числа замыканий своих окрестностей O_m . Пусть теперь $F \subseteq W \subset X$, где F является замкнутым подмножеством X и множество W открыто в пространстве X . Тогда $F \times \{y\}$ и $(X \setminus W) \times M$ – замкнутые непересекающиеся подмножества подпространства $Z = (F \times \{y\}) \cup (X \times M)$. Множество $F \times \{y\}$ является регулярным G_δ -множеством в Z , потому что y – регулярное G_δ -множество в M_0 . Но Z является F_σ -множеством в произведении $X \times Y$; следовательно, Z является δ -нормальным пространством. Поэтому существуют открытые (в Z) дизъюнктные множества U и V такие, что $F \times \{y\} \subseteq U$ и $(X \setminus W) \times M \subseteq V$. Для каждой точки $m \in M$ определим открытые (в X) множества

$$U(m) = \{x \in X : (x, m) \in U\}, \quad V(m) = \{x \in X : (x, m) \in V\}.$$

Ясно, что $U(m) \cap V(m) = \emptyset$, и

$$\overline{U(m)} \subseteq X \setminus V(m) \subseteq X \setminus (X \setminus W) = W.$$

Если $x \in F$, то найдутся окрестности O_x и O_y точек x и y такие, что $O_x \times O_y \subseteq U$, потому что $F \times \{y\} \subseteq U$. Возьмем $m \in O_y \cap M$. Тогда $O_x \times \{m\} \subseteq U$ и, следовательно, $x \in U(m) \subseteq \overline{U(m)} \subseteq W$. Таким образом, для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любого открытого $W \subset X$, содержащего F , существует счетное открытое покрытие $\{U(m) : m \in M\}$ множества F такое, что $\overline{U(m)} \subseteq W$ для всех $m \in M$. Поэтому пространство X нормально по лемме 1.5.14 из книги [1]. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Если пространство X локально компактно и линделёфово, то по теореме 1 гиперпространство $(\text{CL}(X), \tau_F)$ нормально и, следовательно, в нем любое F_σ -множество δ -нормально. Докажем обратное утверждение. Заметим, что если F – замкнутое подмножество пространства X , то $\text{CL}(F)$ является замкнутым подмножеством гиперпространства $(\text{CL}(X), \tau_F)$, и если замкнутое множество H не пересекается с F , то замкнутое множество $\text{CL}(F \cup H)$ гомеоморфно произведению подпространств $\text{CL}(F)$ и $\text{CL}(H)$. Пусть U – открытое подмножество пространства X с неизолированной точкой $x \in U$. Из того, что гиперпространство $(\text{CL}(X), \tau_F)$ хаусдорфово, следует локальная компактность и регулярность пространства X [7]. Поэтому существует открытое множество V такое, что $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Тогда произведение $\text{CL}(X \setminus U) \times \text{CL}(\overline{V})$ гомеоморфно замкнутому подмножеству $\text{CL}(X)$ и, следовательно, в этом произведении, как и во всем пространстве $\text{CL}(X)$, любое F_σ -множество δ -нормально. Из того, что пространство X регулярно, а точка x не является изолированной, следует, что $\text{CL}(\overline{V})$ содержит счётное незамкнутое подмножество. Поэтому по лемме 1 получаем, что пространство $\text{CL}(X \setminus U)$ нормально. Таким образом, по теореме 1 подпространство $X \setminus U$ линделёфово для любой открытой окрестности U любой неизолированной точки пространства X . Если пространство X содержит, по крайней мере, две неизолированные точки, то X распадается в сумму двух линделёфовых пространств, и поэтому пространство X само является линделёфовым пространством. Если X – пространство с одной неизолированной точкой и при этом счетно компактно, то дополнение до любой окрестности неизолированной точки конечно и, следовательно, пространство X компактно и поэтому линделёфово. Если же X не является счетно компактным пространством, то счетное дискретное пространство ω является замкнутым подмножеством пространства X и, следовательно, $\text{CL}(\omega)$ является замкнутым подмножеством $\text{CL}(X)$. Очевидно, можно считать, что единственная неизолированная точка p пространства X не принадлежит открыто-замкнутому множеству ω , поэтому множество $X \setminus \omega$ является открыто-замкнутой окрестностью точки p . Произведение $\text{CL}(X \setminus \omega) \times \text{CL}(\omega)$ гомеоморфно замкнутому подмножеству гиперпространства $\text{CL}(X)$, пространство $\text{CL}(\omega)$, очевидно, содержит незамкнутое счетное подмножество, поэтому по

лемме 1 пространство $CL(X \setminus \omega)$ нормально и, следовательно, по теореме 1 пространство $X \setminus \omega$ линделёфово. Следовательно, пространство $X = (X \setminus \omega) \cup (\omega)$ также является линделёфовым. Если же все точки пространства X являются изолированными, и X бесконечно, то, как и выше, выбрав счетное открыто-замкнутое подмножество $\omega \subset X$, получим, что пространство $X \setminus \omega$ линделёфово и, следовательно, счетно. Поэтому и все пространство X в этом случае счетно и, значит, линделёфово. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [2] J. Mack, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **148** (1970), 265–272. [3] J. M. G. Fell, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **13** (1962), 472–476. [4] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Appl. Math. Ser., Pitman, Boston, MA, 1984. [5] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley Ser. Probab. Stat., John Wiley & Sons, New York, 1975. [6] L'. Holá, S. Levi, J. Pelant, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:7 (1999), 2193–2197. [7] G. Beer, R. Tamaki, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:2 (1994), 601–612.

А. П. Комбаров

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: kombarov@mech.math.msu.su

Поступило

24.05.2012