Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Мирзоев, А. Р. Алиев, Л. А. Рустамова, Об условиях разрешимости краевой задачи для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 5, 789–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:30:23

Об условиях разрешимости краевой задачи для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом

С. С. Мирзоев, А. Р. Алиев, Л. А. Рустамова

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и A – самосопряженный равномерно положительный оператор в H . Через H_θ , $\theta \geq 0$, обозначаем шкалу гильбертовых пространств, порожденных оператором A , т.е. $H_\theta = \text{Dom}(A^\theta)$ со скалярным произведением $(x, y)_\theta = (A^\theta x, A^\theta y)$. При $\theta = 0$ имеем $H_0 = H$.

Пусть $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ – гильбертово пространство H -значных квадратично интегрируемых функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ (см. [1]), а $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ – пространство H -значных функций на $\mathbb{R}_+$ таких, что $A^2 u(t)$ и $u''(t)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}_+; H)$, причем производные понимаются в смысле теории распределений для функций со значениями в гильбертовом пространстве (см. подробнее [2; гл. 1]). Напомним, что нормы в пространствах $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ и $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ определяются равенствами

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)} = (\|A^2 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2)^{1/2},$$

соответственно.

Далее, под $L(X, Y)$ будем понимать множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в другое гильбертово пространство Y . Фиксируем некоторый оператор $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$. В пространстве $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ рассмотрим следующие подпространства:

$$\begin{aligned} \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H) &= \{u(t) : u(t) \in W_2^2(\mathbb{R}_+; H), u(0) = u'(0) = 0\}, \\ W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H) &= \{u(t) : u(t) \in W_2^2(\mathbb{R}_+; H), u'(0) = Ku(0)\}. \end{aligned}$$

Тот факт, что $W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$ есть подпространство в $W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ следует из теоремы о следах (см. [2; гл. 1]).

Цель заметки – изучение разрешимости задачи

$$-u''(t) + \rho(t)A^2 u(t) + A_1 u'(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

с краевым условием в нуле

$$u'(0) = Ku(0). \quad (2)$$

Здесь $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$, $K \in L(H_{3/2}, H_{1/2})$, A_1 – линейный оператор такой, что $\text{Dom}(A_1) \supset \text{Dom}(A)$, причем $A_1 A^{-1}$ ограничен в H , а $\rho(t)$ – положительная кусочно постоянная функция с одной точкой разрыва. Для определенности полагаем $\rho(t) = \alpha$, если $t \in (0, 1)$, и $\rho(t) = \beta$, если $t \in (1, +\infty)$, причем $0 < \alpha \leq \beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Задача (1), (2) называется *регулярно разрешимой*, если для каждой функции $f(t) \in L_2(\mathbb{R}_+; H)$ существует функция $u(t) \in W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, краевое условие (2) выполняется в смысле сходимости пространства $H_{1/2}$, т.е. $\lim_{t \rightarrow 0} \|u'(t) - Ku(t)\|_{1/2} = 0$, и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}.$$

Работа выполнена при поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской республики (грант № EIF-2011-1(3)-82/28/1).

В статье Шкаликера [3] приведены результаты о разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений общего вида на полуоси и отрезке, а также изучены спектральные проблемы, связанные с разрешимостью таких задач. Но случай, когда коэффициенты в краевых условиях являются не комплексными числами, а операторами, не рассматривался. В [3] приведена также подробная библиография предшествующих работ по этой тематике, среди которых особо выделим работы Гасимова, Костюченко и их учеников. Исследования в этом направлении продолжаются и по сей день (см., например, [4]–[6]). Но работ, посвященных этим вопросам для операторно-значных краевых условий, сравнительно мало. Из числа первых в этой области отметим работы Рофе-Бекетова [7], Ильина и Филиппова [8], Горбачука [9] и более позднюю работу Гасимова и Мирзоева [10]. В последней были изучены как вопросы разрешимости, так и некоторые спектральные проблемы, связанные с краевыми задачами для эллиптических операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси. Основное отличие полученных ниже результатов от работы [10] состоит в том, что функция $\rho(t)$ предполагается разрывной, а не постоянной. Это обстоятельство вносит существенные изменения в метод исследования. Для простоты изложения нами взята одна точка разрыва. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что они применимы к широкому кругу задач для дифференциальных уравнений с частными производными и ряду нестандартных задач теории упругости многослойных тел.

Сначала положим в (1) $A_1 = 0$ и рассмотрим более простое уравнение

$$-u''(t) + \rho(t)A^2u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор

$$K_{\alpha,\beta} = E + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} A^{-1} K + \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \left(E - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} A^{-1} K \right) e^{-2\sqrt{\alpha}A}$$

ограниченно обратим в пространстве $H_{3/2}$, где E – единичный оператор в H , а e^{-tA} – полугруппа линейных ограниченных операторов, порожденная оператором $-A$. Тогда оператор P_0 , действующий из пространства $W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$ в пространство $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ следующим образом:

$$P_0u(t) \equiv -u''(t) + \rho(t)A^2u(t), \quad u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H),$$

осуществляет изоморфизм между этими пространствами.

Из теоремы 1 следует, что нормы $\|P_0u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$ и $\|u\|_{W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)}$ эквивалентны в пространстве $W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$. Теперь же исследуем краевую задачу (1), (2). Справедлива условная

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор $K_{\alpha,\beta}$ ограниченно обратим в пространстве $H_{3/2}$ и оператор $B = A_1A^{-1}$ ограничен в H , причем $\|B\| < N_K^{-1}$, где

$$N_K = \sup_{0 \neq u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)} \|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \|P_0u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{-1}.$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Отметим, что здесь возникает задача об оценке числа N_K . Воспользуемся работой [11]. Прежде укажем, что имеет место

ЛЕММА 1. При любом $u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|P_0u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 \\ & \geq \frac{\alpha}{\beta} (\|u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \alpha\beta\|A^2u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2\beta\|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2\beta \operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2}), \end{aligned}$$

где $x = u(0) \in H_{3/2}$.

Для дальнейших действий важную роль играет факторизация рассматриваемого в пространстве H_4 полиномиального операторного пучка

$$P(\lambda; \gamma; A) = \lambda^4 E + \alpha \beta A^4 + (\gamma - 2\beta) \lambda^2 A^2.$$

ЛЕММА 2. При $\gamma \in [0, 2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}))$ операторный пучок $P(\lambda; \gamma; A)$ обратим на мнимой оси и представляется в виде

$$P(\lambda; \gamma; A) = F(\lambda; \gamma; A)F(-\lambda; \gamma; A),$$

где

$$F(\lambda; \gamma; A) = (\lambda E - \omega_1(\gamma)A)(\lambda E - \omega_2(\gamma)A) \equiv \lambda^2 E + a_1(\gamma)\lambda A + a_2(\gamma)A^2, \quad (4)$$

причем $\operatorname{Re} \omega_k(\gamma) < 0$, $k = 1, 2$, $a_1(\gamma) = \sqrt{2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}) - \gamma}$, $a_2(\gamma) = \alpha^{1/2}\beta^{1/2}$.

В нашем исследовании не менее особое значение имеет следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 3. При любом $u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$ и $\gamma \in [0, 2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}))$ имеет место тождество

$$S(u) - \gamma \|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 = \langle R(\gamma)x, x \rangle + \left\| F\left(\frac{d}{dt}; \gamma; A\right)u \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2,$$

где $F(\lambda; \gamma; A)$ определен из равенства (4), а

$$\begin{aligned} \langle R(\gamma)x, x \rangle &= 2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}) \operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2} \\ &\quad + \sqrt{2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}) - \gamma} (\|x\|_{3/2}^2 + \alpha^{1/2}\beta^{1/2}\|A^{-1}Kx\|_{3/2}^2), \\ S(u) &= \|u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \alpha\beta\|A^2u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2\beta\|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + 2\beta \operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $S(u)$ есть норма в пространстве $\dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)$, эквивалентная исходной норме $\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)}$.

Выше проведенные исследования позволяют утверждать, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Число S_0 , определенное как $S_0 = \sup_{0 \neq u \in \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)} \|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} S^{-1/2}(u)$, конечно и $S_0 = 1/\sqrt{2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2})}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что, вообще говоря, $S(u)$ не является положительным числом при всех $u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$. Действительно, пусть $u(t) = e^{-\lambda_0 t} \varphi_0$, а φ_0 есть некоторый собственный вектор оператора A , отвечающий λ_0 , $\|\varphi_0\| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} S(u) &= \|u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \alpha\beta\|A^2u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 - 2\beta \operatorname{Re}(u'', A^2u)_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \\ &= (1 + \alpha\beta - 2\beta)\lambda_0^4 \|e^{-\lambda_0 t} \varphi_0\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 = (1 + \alpha\beta - 2\beta) \frac{\lambda_0^3}{2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что мы можем требовать, чтобы $K = -A$, т.е. условие $Ku(0) = u'(0)$ выполняется. Тогда ясно, что при $2\beta - \alpha\beta > 1$ выражение $S(u)$ является отрицательным, а при $2\beta - \alpha\beta = 1$ $S(u) = 0$, $u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$. Поэтому на оператор K необходимо налагать дополнительные условия, чтобы $S(u)$ в пространстве $W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$ было эквивалентно исходной норме $\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)}$.

ЛЕММА 4. Пусть $x \in H_{3/2}$. Если $\min_{\|x\|_{3/2}=1} \langle R(0)x, x \rangle > 0$, то $S(u) \geq \operatorname{const} \|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)}^2$ при любом $u(t) \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)$.

Из леммы 4 при этом, принимая во внимание теорему о промежуточных производных [2; гл. 1], следует, что

$$S_K = \sup_{0 \neq u \in W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H)} \|Au'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} S^{-1/2}(u) < \infty.$$

Поскольку же $W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H) \supset \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)$, то $S_K \geq S_0 = 1/\sqrt{2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2})}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия леммы 4 и $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ в $H_{3/2}$. Тогда $S_K = 1/\sqrt{2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2})}$.

На основании полученных результатов, оценивая норму оператора промежуточной производной $A(d/dt): W_{2,K}^2(\mathbb{R}_+; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+; H)$ относительно нормы $\|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$, при этом учитывая лемму 1, условная теорема 2 примет точную формулировку в следующем виде.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются условия леммы 4, $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ в $H_{3/2}$ и оператор $B = A_1 A^{-1}$ ограничен в H , причем $\|B\| < \sqrt{2\alpha(1 + \alpha^{1/2}/\beta^{1/2})}$. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В теореме 5 условие $\operatorname{Re} A^{-1}K \geq 0$ в $H_{3/2}$ обеспечивает обратимость оператора $K_{\alpha,\beta}$ в пространстве $H_{3/2}$.

Теперь укажем значение S_K при условии $\min_{\|x\|_{3/2}=1} \operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2} < 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\min_{\|x\|_{3/2}=1} \operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2} < 0$ и выполняются условия леммы 4. Тогда

$$S_K = \frac{1}{\sqrt{2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2})}} \left(1 - 2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}) \left| \min_{\|x\|_{3/2}=1} \frac{\operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2}}{1 + \alpha^{1/2}\beta^{1/2}\|A^{-1}Kx\|_{3/2}^2} \right|^2 \right)^{-1/2}.$$

В случае, когда $\min_{\|x\|_{3/2}=1} \operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2} < 0$ теорема 2 формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполняются условия теоремы 6, оператор $K_{\alpha,\beta}$ ограниченно обратим в пространстве $H_{3/2}$ и оператор $B = A_1 A^{-1}$ ограничен в H , причем

$$\|B\| < \sqrt{2\alpha \left(1 + \frac{\alpha^{1/2}}{\beta^{1/2}} \right)} \left(1 - 2\beta^{1/2}(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2}) \left| \min_{\|x\|_{3/2}=1} \frac{\operatorname{Re}(A^{-1}Kx, x)_{3/2}}{1 + \alpha^{1/2}\beta^{1/2}\|A^{-1}Kx\|_{3/2}^2} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
 [2] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Т. 1, Мир, М., 1971. [3] А. А. Шкаликов, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14** (1989), 140–224.
 [4] С. С. Мирзоев, Ф. А. Гулиева, *Матем. заметки*, **86:5** (2009), 797–800. [5] А. Р. Алиев, С. С. Мирзоев, *Функц. анализ и его прил.*, **44:3** (2010), 63–65. [6] А. Р. Алиев, *Матем. заметки*, **90:3** (2011), 323–339. [7] Ф. С. Рофе-Бекетов, *Матем. сб.*, **51:3** (1960), 293–342.
 [8] В. А. Ильин, А. Ф. Филиппов, *ДАН СССР*, **191:2** (1970), 267–269. [9] М. Л. Горбачук,

Функц. анализ и его прил., **7**:1 (1973), 68–69. [10] М. Г. Гасымов, С. С. Мирзоев, *Дифференц. уравнения*, **28**:4 (1992), 651–661. [11] S. S. Mirzoyev, *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, **23**:1, Math. Mech. (2003), 157–164.

С. С. Мирзоев

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку
E-mail: mirzoyevsabir@mail.ru

Поступило

24.05.2012

А. Р. Алиев

Бакинский государственный университет,
Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку
E-mail: alievvaraz@yahoo.com

Л. А. Рустамова

Институт прикладной математики
Бакинского государственного университета
E-mail: lamia_rus@rambler.ru