Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, К теореме Боля об аргументе, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 72–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:47:59

К теореме Боля об аргументе

В. В. Козлов

Обобщается классическая теорема Боля об аргументе условно-периодической функции. Условно-периодические движения на торе заменяются решениями нелинейной системы дифференциальных уравнений с инвариантной мерой. Рассматриваются случаи, когда эта система предполагается эргодической или строго эргодической.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10133

1. Введение. Пусть $\mathbb{T}^n$ – n -мерный тор с угловыми координатами $x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi$, несущий на себе семейство условно-периодических движений. Эти движения определяются системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \omega_1, \quad \dots, \quad \dot{x}_n = \omega_n. \quad (1.1)$$

Постоянные частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ считаются рационально независимыми. В противном случае траектории системы (1.1) заматают всюду плотно торы меньшего числа измерений.

Пусть $t \mapsto x(t)$ – решение (1.1) ($x(t) = \omega t + x_0$), а f – непрерывная комплекснозначная функция на $\mathbb{T}^n$. Тогда функция

$$t \mapsto f(x(t))$$

есть условно-периодическая функция времени (по Болю [1]). Имеются различные варианты обобщения этой конструкции для $n = \infty$. Наиболее известная из них принадлежит Г. Бору (см. [2]).

Пусть

$$f(t) = \sigma(t)e^{i\psi(t)}$$

– условно периодическая функция с комплексными значениями, причем ее модуль $\sigma(t) \geq c > 0$ при всех значениях t . Тогда

$$\psi(t) = \lambda t + g(t), \quad (1.2)$$

причем

$$\lambda = m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n \quad (1.3)$$

Работа выполнена в рамках программы “Государственная поддержка ведущих научных школ”.

с целыми $m_1, \dots, m_n$, а остаток g в (1.2) – условно-периодическая функция времени (с теми же частотами). В частности, $g(t)$ ограничена. Этот результат получен Бодем [1]. Хотя он более известен в интерпретации Бора, относящейся к теории почти-периодических функций.

Структура функции g такова:

$$g(t) = \psi_0 + G(\omega t + x_0) - G(x_0), \quad \psi_0 = \psi(0),$$

где G – некоторая непрерывная функция на $\mathbb{T}^n$. В частности,

1) для почти всех $x_0 \in \mathbb{T}^n$ разность

$$\delta(t) = \psi(t) - \psi_0 - \lambda t$$

имеет бесконечно много нулей при $|t| \rightarrow \infty$ (т.е. эта функция не может быть в конечном счете положительной или отрицательной);

2) $\delta(t) \geq 0$ (≤ 0) для всех t при некоторых $x_0 \in \mathbb{T}^n$.

2. Эргодические системы на торах. Заменяем систему (1.1) динамической системой на $\mathbb{T}^n$ общего вида

$$\dot{x}_j = v_j(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.1)$$

с инвариантной нормированной мерой $d\mu = \rho(x) d^n x$:

$$\sum \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{T}^n} \rho d^n x = 1.$$

Компоненты векторного поля $v_1, \dots, v_n$ и плотность меры ρ будем считать гладкими (бесконечно-дифференцируемыми) функциями.

Обсудим свойство равномерного распределения (в смысле классического определения Г. Вейля) решений системы (2.1) на n -мерном торе. Для этой цели полезно иметь инвариантную меру с постоянной нормированной плотностью

$$\bar{\rho}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}. \quad (2.2)$$

Оказывается, по известной теореме Мозера [3] замена исходной плотности ρ на $\bar{\rho}$ не является существенным допущением, поскольку любые две нормированные меры переводятся друг в друга подходящим диффеоморфизмом $\mathbb{T}^n$. Теорема Мозера справедлива для всех компактных многообразий. Мы дадим здесь ее простое доказательство для многомерного тора.

ТЕОРЕМА 1. Пусть при некоторых вещественных $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ найдется гладкое решение $R: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$\sum \lambda_j \frac{\partial R}{\partial x_j} = \rho(x) - \bar{\rho}. \quad (2.3)$$

Тогда заменой переменных

$$\varphi_j = x_j + \frac{\lambda_j}{\bar{\rho}} R, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.4)$$

мера $d\bar{\mu} = \bar{\rho} d^n \varphi$ переводится в нормированную меру $d\mu = \rho(x) d^n x$.

Уравнение (2.3) хорошо известно в проблеме малых знаменателей. В частности, для почти всех наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ оно разрешимо в классе бесконечно-дифференцируемых функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. По формуле замены переменных

$$\bar{\rho} d^n \varphi = \bar{\rho} \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} d^n x.$$

Остается заметить, что якобиан преобразования (2.4) равен

$$\frac{\rho(x)}{\bar{\rho}}.$$

Что и требовалось.

Для наших целей надо воспользоваться обратным преобразованием (2.3). В дальнейшем в качестве плотности инвариантной меры принимаем (2.2).

Напомним, что функция $t \mapsto x(t)$ называется *равномерно распределенной на торе $\mathbb{T}^n$ по Г. Вейлю*, если для любой измеримой по Жордану подобласти $\mathscr{D} \subset \mathbb{T}^n$ справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(x(t)) dt = \int_{\mathbb{T}^n} h \bar{\rho} d^n x = \frac{\text{mes } \mathscr{D}}{\text{mes } \mathbb{T}^n},$$

где h – ее характеристическая функция.

ТЕОРЕМА 2. *Если система (2.1) эргодическая, то почти все ее решения равномерно распределены (по Вейлю) на $\mathbb{T}^n$.*

В этом утверждении, конечно, нет ничего удивительного. Достаточно применить эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина к измеримой характеристической функции h . Однако здесь имеется одна проблема: при усреднении по времени разрывной функции исключительное множество нулевой меры зависит, вообще говоря, и от усредняемой функции.

Это затруднение легко преодолеть, используя известный критерий равномерного распределения Вейля: функция $t \mapsto x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, равномерно распределена на $\mathbb{T}^n$, если для всех целочисленных векторов $k = (k_1, \dots, k_n) \neq 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau e^{i(k, x(t))} dt = 0. \quad (2.5)$$

По теореме Биркгофа–Хинчина это равенство имеет место для почти всех начальных данных $x(0) = x_0$ эргодической системы (2.1), поскольку предел слева равен

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i(k, x)} d^n x = 0.$$

Остается заметить, что количество условий (2.5) счетно. Следовательно, исключительное множество начальных данных, действительно, имеет нулевую меру.

Можно действовать по-другому, опираясь на следующее вспомогательное утверждение, имеющее и некоторый самостоятельный интерес.

ЛЕММА. В предположении эргодичности системы (2.1) тор $\mathbb{T}^n$ разлагается в сумму непересекающихся измеримых множеств M_1 и M_2 , $\mu(M_2) = 0$ так, что для всех интегрируемых по Риману функций $h: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и всех $x_0 \in M_1$ справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(x(t, x_0)) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} h d^n x. \quad (2.6)$$

Для непрерывных функций h – это известный результат Крылова–Боголюбова (справедливый, конечно, не только для тора [4]). Его распространение на класс интегрируемых по Риману функций можно осуществить с помощью следующей конструкции: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две непрерывные функции h_1 и h_2 такие, что

$$h_1(x) \leq h(x) \leq h_2(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{T}^n, \\ \int_{\mathbb{T}^n} (h_2 - h_1) d^n x < \varepsilon.$$

Наряду с эргодическими системами (2.1) будем также рассматривать *строго эргодические* динамические системы вида (2.1). Такие системы допускают только одну нормированную инвариантную борелевскую меру μ (с плотностью $\bar{\rho}$). Конечно, далеко не каждая эргодическая система будет строго эргодической. Например, при $n \geq 2$ у строго эргодической системы не может быть периодических траекторий. В противном случае имеется дополнительная инвариантная мера, сосредоточенная на этой периодической траектории. Укажем один из критериев строгой эргодичности: соотношение (2.6) выполняется для всех непрерывных функций h и для всех начальных данных $x_0 \in \mathbb{T}^n$. Ясно, что все решения строго эргодической системы равномерно распределены по Вейлю на $\mathbb{T}^n$.

Заменяем теперь систему (2.1) системой вида (1.1), усреднив правые части по инвариантной мере:

$$\omega_j = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} v_j(x) d^n x. \quad (2.7)$$

ТЕОРЕМА 3. Для почти всех начальных данных решения эргодической системы (2.1) имеют следующее асимптотическое представление:

$$x_j(t) = \omega_j t + o(t), \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.8)$$

при $|t| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему Биркгофа–Хинчина к функциям $v_1, \dots, v_n$ (компонентам векторного поля на $\mathbb{T}^n$) и воспользуемся уравнениями (2.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_j(t)}{t} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \dot{x}_j(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} v_j(x) d^n x = \omega_j.$$

Эти равенства справедливы для почти всех начальных данных. Что и требовалось.

Если система (2.1) строго эргодична, то асимптотические формулы (2.8) имеют место для *всех* начальных данных.

Естественно возникает вопрос об условиях приводимости системы (2.1) к виду (1.1) подходящей заменой переменных. В многомерном случае такое приведение

вряд ли возможно при условиях общего характера (обсуждение родственного круга вопросов можно найти в [5]). Тем не менее, в простейшем нетривиальном случае, когда $n = 2$, задача о приводимости решается положительно для почти всех чисел вращения ω_1/ω_2 при дополнительном условии отсутствия неподвижных точек у системы (2.1). Это – классический результат Колмогорова [6]. Менее известны утверждения на этот счет, высказанные Пуанкаре в [7] (в [6] они не упоминаются). При $n > 2$ задача о приводимости решена для систем на торе, допускающих полный набор многозначных первых интегралов [8].

Более реалистичными выглядят ослабленные варианты задачи о приводимости. Например, верно ли, что если динамическая система с инвариантной мерой эргодична, то числа (2.7) будут рационально независимы? Здесь тоже нужны дополнительные предположения вроде отсутствия неподвижных точек у системы (2.1). Во всяком случае при $n = 2$ гипотеза об иррациональности отношения ω_1/ω_2 сразу же следует из результатов Пуанкаре–Колмогорова.

3. Обобщенная теорема Боля. Введем угловую переменную ψ равенством

$$e^{i\psi} = f, \quad (3.1)$$

где $f = f_1 + if_2$ – гладкая комплекснозначная функция на $\mathbb{T}^n$ с единичным модулем ($f_1^2 + f_2^2 = 1$). Теперь вместо угловых переменных $x_1, \dots, x_n$ в (3.1) подставим решение нелинейного дифференциального уравнения (3.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathbb{T}^n$. В результате получим гладкую комплекснозначную функцию времени $t \mapsto f(t)$ (зависящую, конечно, от x_0). Фиксируя одну из ветвей многозначной функции ψ , изучим поведение аргумента $\psi(t)$ при неограниченном возрастании t . Будем рассматривать типичные решения системы (2.1) (с точностью до исключительного множества начальных условий меры нуль).

Левую и правую части равенства (3.1) можно умножить на вещественную функцию $\sigma(x)$. Если σ – гладкая функция на $\mathbb{T}^n$, нигде не обращающаяся в нуль, то ничего нового такое обобщение не вносит.

ТЕОРЕМА 4. *Если система (2.1) эргодическая, то*

1) *для почти всех начальных данных*

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 + \lambda t + g(t, x_0), & \lambda &= m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n, \\ g(0, x_0) &= 0 \quad \text{и} \quad g(t, x_0) = o(t) & \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $m_1, \dots, m_n$ – некоторые целые числа, а частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ определяются по формуле (2.7);

2) *функция $t \mapsto g(t, x)$ для почти всех $x \in \mathbb{T}^n$ имеет бесконечно много нулей при $|t| \rightarrow \infty$ (т.е. при неограниченном росте $|t|$ эта функция в конечном итоге не может стать положительной или отрицательной).*

Если система (2.1) строго эргодическая, то

3) *найдутся точки $x_0 \in \mathbb{T}^n$ такие, что $g(t, x_0) \geq 0$ (≤ 0) при всех значениях $t \in \mathbb{R}$.*

В отличие от теоремы Боля, остаток $o(t)$ в формуле (3.2) может быть неограниченным. Соответствующий пример строго эргодической системы указан ниже (п. 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Угловая переменная ψ – многозначная функция на торе $\mathbb{T}^n$. Из (3.1) следует, что

$$d\psi = \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}. \quad (3.3)$$

Это – замкнутая, но не точная дифференциальная 1-форма на $\mathbb{T}^n$. Покажем, что она имеет вид

$$\sum \alpha_j dx_j + d\Lambda, \quad (3.4)$$

где $\alpha_j = \text{const}$, $\Lambda: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая гладкая функция.

Действительно, пусть

$$d\psi = \sum a_p(x) dx_p.$$

Условие замкнутости $d(d\psi) = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$\frac{\partial a_p}{\partial x_q} = \frac{\partial a_q}{\partial x_p}, \quad 1 \leq p, q \leq n. \quad (3.5)$$

Разложим 2π -периодические функции a_p в ряды Фурье:

$$a_p = \alpha_p + \sum ' A_k^{(p)} e^{i(k,x)}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.5) эквивалентны цепочке равенств на коэффициенты Фурье:

$$k_q A_k^{(p)} = k_p A_k^{(q)}.$$

Поскольку $k = (k_1, \dots, k_n) \neq 0$, то вектор

$$(A_k^{(1)}, \dots, A_k^{(n)})$$

ему коллинеарен:

$$A_k^{(p)} = \lambda_k k_p. \quad (3.7)$$

Так как функции $a_1, \dots, a_n: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ гладкие, отсюда следует, что тригонометрический ряд

$$\sum ' \lambda_k e^{i(k,x)}$$

сходится к гладкой функции $\Lambda: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Соотношения (3.6) и (3.7) приводят к равенствам

$$a_p = \alpha_p + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_p},$$

которые эквивалентны (3.4).

Поскольку ψ – угловая переменная, интегралы от 1-формы по замкнутым циклам, один раз охватывающим n -мерный тор, должны быть кратны 2π . Следовательно, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – целые числа.

На накрывающем тор пространстве $\mathbb{R}^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ функция ψ уже будет однозначной:

$$\psi = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \Lambda(x) + \text{const}.$$

Подставляя в эту формулу асимптотические разложения (2.8), с учетом начальных условий получаем (3.2).

Далее, согласно (3.3),

$$\dot{\psi} = f_1 \sum \frac{\partial f_2}{\partial x_j} v_j - f_2 \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_j} v_j \quad (3.8)$$

– гладкая функция на $\mathbb{T}^n$. Заключение 2) – следствие общего результата работы [9], примененного к эргодической системе (2.1) и соотношению (3.8).

Наконец, третье заключение – следствие общей теоремы из [10] о свойствах интегралов от непрерывных функций вдоль решений строго эргодической системы.

4. Некоторые примеры. В качестве (2.1) рассмотрим следующую систему на $\mathbb{T}^n$:

$$\dot{x}_j = \frac{\Omega_j}{\rho(x)}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.1)$$

Она допускает инвариантную меру $\rho(x) d^n x$. Если постоянные частоты $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ рационально несоизмеримы, то система (4.1) строго эргодическая. Это – простое следствие критерия строгой эргодичности (2.6) (в котором h – любая непрерывная функция на $\mathbb{T}^n$) и теоремы Вейля о равномерном распределении. Система (4.1) получается из системы (1.1) заменой времени

$$dt = \rho(x) d\tau. \quad (4.2)$$

Теория таких систем, восходящая к Пуанкаре [7], развита в работе [8]. С одной стороны, к виду (4.1) приводятся системы на двумерном торе с инвариантной мерой и без неподвижных точек. С другой стороны, такой вид имеют системы на n -мерном торе, допускающие $n - 1$ независимых многозначных интегралов. Будем считать частоты $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ рационально независимыми.

После замены времени (4.2) система (4.1) принимает вид (1.1):

$$x'_j = \Omega_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.3)$$

Здесь штрих обозначает производную по τ . С другой стороны, усреднение правой части (4.1) по инвариантной мере $\rho(x) d^n x$ приводит к системе

$$\dot{x}_j = \omega_j; \quad \omega_j = \frac{\Omega_j}{\bar{\rho}}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \rho(x) d^n x. \quad (4.4)$$

Как показано в [8], для почти всех наборов частот $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ система (4.1) гладкой заменой переменных приводится к системе (4.4).

Рассмотрим теперь соотношение (3.1), определяющее аргумент ψ . Если

$$x_j = \Omega_j \tau + x_j^0 \quad (4.5)$$

– решение системы (4.3), то (по теореме Боля)

$$\psi = \left(\sum m_j \Omega_j \right) \tau + O(1). \quad (4.6)$$

Представим теперь аргумент ψ как функцию исходного времени t . Подставляя формулы (4.5) в (4.2) и используя эргодическую норму Вейля, получаем после интегрирования

$$t = \bar{\rho}\tau + f(\tau), \quad f(\tau) = o(\tau). \quad (4.7)$$

Остаток f ограничен не всегда. Условие его ограниченности тесно связано с классической проблемой малых знаменателей. Если функция $f(\tau)$ ограничена, то она сама будет условно-периодической функцией τ .

Так как $t' \neq 0$, то соотношение (4.7) можно обратить:

$$\tau = \frac{t}{\bar{\rho}} + g(t), \quad g(t) = o(t). \quad (4.8)$$

Функции одного переменного f и g ограничены или неограничены одновременно. С другой стороны, если $f(\tau) > 0$, то $g(t) < 0$ (и наоборот). Подставляя (4.8) в (4.6) и учитывая (4.4), получаем

$$\psi(t) \left(\sum m_j \omega_j \right) t + \psi(t). \quad (4.9)$$

С точностью до ограниченной функции времени остаток равен

$$\left(\sum m_j \omega_j \right) g(t).$$

В частности, $\psi(t) = o(t)$. Формула (4.9) вполне согласуется с общим результатом п. 3. Любопытно отметить, что при $m_1 = \dots = m_n = 0$ остаток в асимптотической формуле (4.9) будет ограниченной функцией времени.

Эти общие результаты могут быть полезны при изучении поведения угловых циклических переменных в неголономных системах Чаплыгина [11]. Как показано в [11], при некоторых специальных предположениях после замены времени (по формуле вида (4.2)) уравнения движения неголономной системы перейдут в дифференциальные уравнения Гамильтона. Если, в свою очередь, полученная таким путем гамильтонова система окажется вполне интегрируемой, то уравнения на лиувиллевых торах в старом времени будут иметь вид (4.1). Поэтому к ним можно применить указанные выше общие результаты.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Bohl, "Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie", *J. Reine Angew. Math.*, **131** (1906), 268–321.
- [2] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953.
- [3] J. Moser, "On the volume elements on a manifold", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120**:2 (1965), 286–294.
- [4] N. Kryloff, N. Bogoliouboff, "La theorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systems dynamiques de la mécanique non-linéaire", *Ann. of Math.* (2), **38**:1 (1937), 65–113.
- [5] J. Moser, "A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations. II", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **20**:3 (1966), 499–535.
- [6] А. Н. Колмогоров, "О динамических системах с интегральным инвариантом на торе", *ДАН СССР*, **93**:5 (1953), 763–766.

- [7] А. Пуанкаре, *Теория вероятностей*, РХД, Ижевск, 1999.
- [8] В. В. Козлов, “Динамические системы на торе с многозначными интегралами”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 201–218.
- [9] G. Halász, “Remarks on the remainder in Birkhoff’s ergodic theorem”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **28**:3–4 (1976), 389–395.
- [10] В. В. Козлов, “Весовые средние, строгая эргодичность и равномерное распределение”, *Матем. заметки*, **78**:3 (2005), 358–367.
- [11] С. А. Чаплыгин, “Къ теоріи движенія неголономныхъ системъ. Теорема о приводящемъ множителѣ”, *Матем. сб.*, **28**:2 (1912), 303–314.

В. В. Козлов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vvkozlov@mi.ras.ru

Поступило

06.08.2012