Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Обиедат, Замечание о построении комплексных и кватернионных векторных полей на сферах, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 104–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:41:43

Замечание о построении комплексных и кватернионных векторных полей на сферах

М. Обиедат

Описана связь между вещественными, комплексными и кватернионными векторными полями на сферах в терминах отношений, связывающих соответствующие стандартные скалярные произведения. Показано, что число линейно независимых комплексных векторных полей на стандартной $(4n - 1)$ -мерной сфере равно удвоенному числу линейно независимых кватернионных векторных полей плюс d , где $d = 1$ или 3 .

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10134

1. Введение. Пусть $\mathbb{F}$ – одна из ассоциативных алгебр с делением над $\mathbb{R}$, т.е. либо алгебра вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо алгебра комплексных чисел $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, либо алгебра кватернионов $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, с обычной нормой и сопряжением. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $\mathbb{F}^n$ как правое предгильбертово пространство над $\mathbb{F}$ с обычным умножением и стандартным скалярным произведением $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{F}} : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ над $\mathbb{F}$, которое определяется правилом $\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle_{\mathbb{F}} = \sum_{m=1}^n \bar{x}_m y_m$. Пусть $S(\mathbb{F}^n) = \{x \in \mathbb{F}^n : \langle x | x \rangle_{\mathbb{F}} = 1\}$ – стандартная единичная сфера в $\mathbb{F}^n$. Под $\mathbb{F}$ -векторным полем на $S(\mathbb{F}^n)$ мы подразумеваем непрерывную функцию $v : S(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{F}^n - \{0\}$, удовлетворяющую условию $\langle x | v(x) \rangle_{\mathbb{F}} = 0$ для каждого $x \in S(\mathbb{F}^n)$. Мы говорим, что m таких $\mathbb{F}$ -векторных полей $v_1, \dots, v_m$ на $S(\mathbb{F}^n)$ линейно независимы, если векторы $v_1(x), \dots, v_m(x)$ линейно независимы над $\mathbb{F}$ для всех $x \in S(\mathbb{F}^n)$. Пусть $\rho^{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ обозначает максимальное число линейно независимых $\mathbb{F}$ -векторных полей на $S(\mathbb{F}^n)$. Проблема векторных полей на сферах состоит, во-первых, в нахождении числа $\rho^{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ (мы называем этот аспект проблемы задачей о максимальном числе) и, во-вторых, в явном построении $\rho^{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ линейно независимых $\mathbb{F}$ -векторных полей на $S(\mathbb{F}^n)$ (мы называем эту задачу задачей о построении). Корни этой классической проблемы связаны с теоремой о волосатом шаре, параллелизуемостью сфер и классификацией алгебр с делением над $\mathbb{R}$. За подробностями мы отсылаем читателя к [1], [2].

Если n нечетно, то, как легко показать, $\rho^{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n) = 0$. В дальнейшем мы считаем (если не указано противное), что n – четное натуральное число. В 1962 г. в статье [3] Адамс вывел явную формулу для числа $\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$; а именно, он показал, что $\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = \rho(n) - 1$, где $\rho(n)$ – функция Радона–Гурвица. Для $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ и $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ явных формул нет, однако в комплексном случае их можно вычислить с помощью результатов,

полученных Адамсом и Уокером в 1965 г. [4], а в случае кватернионов – с помощью результатов, полученных Сигристом и Сутером в 1973 г. [5]. Более явные формулы для вычисления $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ и $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ приводятся в третьем разделе настоящей статьи.

Наша главная цель – привлечь внимание к важности задачи построения векторных полей на сферах. Известно несколько конструктивных методов построения $\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ линейно независимых вещественных векторных полей на $S(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [6], [7]). В случае комплексных и кватернионных векторных полей ситуация совершенно иная; не существует явного способа построения двух или более линейно независимых комплексных векторных полей на $S(\mathbb{C}^n)$ и не существует метода построения даже одного кватернионного векторного поля на $S(\mathbb{H}^n)$. Помимо того, что задача о построении важна сама по себе, явная конструкция комплексных и кватернионных векторных полей на сфере может привести к решению нескольких открытых проблем теории эквивариантных комплексных и кватернионных векторных полей на сферах (см. [8], [9]).

Статья организована следующим образом. Во втором разделе описана взаимосвязь между вещественными, комплексными и кватернионными стандартными скалярными произведениями. Показано, каким образом эта взаимосвязь определяет связь между соответствующими вещественными, комплексными и кватернионными векторными полями на сферах. А именно, описано, как с помощью m линейно независимых кватернионных полей построить $2m$ линейно независимых комплексных векторных полей, и как с помощью m линейно независимых комплексных векторных полей построить $2m$ линейно независимых вещественных векторных полей. В третьем разделе приводятся формулы для непосредственного вычисления величин $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ и $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ и показано, что $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) = 2\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) + d$, где $d = 1$ или 3 . Четвертый раздел содержит необходимые и достаточные условия, при которых данные линейно независимые вещественные (комплексные) векторные поля являются линейно независимыми комплексными или кватернионными (соответственно, кватернионными) векторными полями.

2. Связь между вещественными, комплексными и кватернионными векторными полями на сферах. Для любого натурального n пусть $r_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ – отображение овеществления из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{R}^{2n}$, которое определяется правилом $r_{\mathbb{C}}(a_1 + b_1i, \dots, a_n + b_ni) = (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$, $c_{\mathbb{H}}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ – отображение комплексификации из $\mathbb{H}^n$ в $\mathbb{C}^{2n}$, определяемое правилом

$$\begin{aligned} c_{\mathbb{H}}(a_1 + b_1i + c_1j + d_1k, \dots, a_n + b_ni + c_nj + d_nk) \\ = (a_1 + b_1i, d_1 + c_1i, \dots, a_n + b_ni, d_n + c_ni), \end{aligned}$$

и $r_{\mathbb{H}}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ – отображение овеществления на кватернионах, которое действует из $\mathbb{H}^n$ в $\mathbb{R}^{4n}$ и определяется как композиция $r_{\mathbb{H}} = r_{\mathbb{C}} \circ c_{\mathbb{H}}$. Для $t \in \mathbb{F}$ через $\alpha_t: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ мы обозначаем правое умножение на t , т.е. $\alpha_t(x) = x \cdot t$ для каждого $x \in \mathbb{F}^n$. Следующая лемма доказывается непосредственными вычислениями.

ЛЕММА 2.1. Если $s \in \mathbb{C}$ и $t \in \mathbb{H}$, то

- (i) $c_{\mathbb{H}} \circ \alpha_s = \alpha_s \circ c_{\mathbb{H}}$;
- (ii) $r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_s \circ c_{\mathbb{H}} = r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_s$;
- (iii) $r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_s \circ c_{\mathbb{H}} \circ \alpha_t = r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_{ts}$.

В следующей теореме приводятся отношения, связывающие вещественные, комплексные и кватернионные стандартные скалярные произведения на $\mathbb{F}^n$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $x, y \in \mathbb{C}^n$ и $v, w \in \mathbb{H}^n$. Тогда

- (i) $\langle x|y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle r_{\mathbb{C}}(x)|r_{\mathbb{C}}(y) \rangle_{\mathbb{R}} - \langle r_{\mathbb{C}}(x)|r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i(y) \rangle_{\mathbb{R}} i$;
- (ii) $\langle v|w \rangle_{\mathbb{H}} = \langle c_{\mathbb{H}}(v)|c_{\mathbb{H}}(w) \rangle_{\mathbb{C}} - \langle c_{\mathbb{H}}(v)|c_{\mathbb{H}} \circ \alpha_j(w) \rangle_{\mathbb{C}} j$;
- (iii) $\langle v|w \rangle_{\mathbb{H}} = \langle r_{\mathbb{H}}(v)|r_{\mathbb{H}}(w) \rangle_{\mathbb{R}} - \langle r_{\mathbb{H}}(v)|r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_i(w) \rangle_{\mathbb{R}} i - \langle r_{\mathbb{H}}(v)|r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_j(w) \rangle_{\mathbb{R}} j - \langle r_{\mathbb{H}}(v)|r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_k(w) \rangle_{\mathbb{R}} k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно считать, что $n = 1$. Тогда требуемые отношения вытекают из леммы 2.1 и определения стандартных скалярных произведений.

Следующая теорема связывает вещественные, комплексные и кватернионные векторные поля на сферах.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $v: S(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$ и $w: S(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{H}^n - \{0\}$ – две непрерывные функции. Тогда

- (i) v является комплексным векторным полем на $S(\mathbb{C}^n)$, если и только если $r_{\mathbb{C}} \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ и $r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ – вещественные векторные поля на $S(\mathbb{R}^{2n})$;
- (ii) w является кватернионным векторным полем на $S(\mathbb{H}^n)$, если и только если $c_{\mathbb{H}} \circ w \circ c_{\mathbb{H}}^{-1}$ и $c_{\mathbb{H}} \circ \alpha_j \circ w \circ c_{\mathbb{H}}^{-1}$ – комплексные векторные поля на $S(\mathbb{C}^{2n})$;
- (iii) w является кватернионным векторным полем на $S(\mathbb{H}^n)$, если и только если $r_{\mathbb{H}} \circ w \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}$ и $r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_t \circ w \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}$, где $t \in \{i, j, k\}$, являются вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{4n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $x \in S(\mathbb{R}^{2n})$. Из теоремы 2.2 (i) вытекает, что $\langle r_{\mathbb{C}}^{-1}(x)|v(r_{\mathbb{C}}^{-1}(x)) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\langle x|r_{\mathbb{C}} \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$ и $\langle x|r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}(x) \rangle_{\mathbb{R}} = 0$. Отсюда следует требуемое утверждение. Аналогично доказываются утверждения (ii) и (iii) (с использованием отношений (ii) и (iii) из теоремы 2.2).

ПРИМЕР 2.4. Пусть $n \geq 2$. Отображение $v: S(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$, определенное формулой

$$\begin{aligned} v(x_1 + ix_2, \dots, x_{2n-1} + ix_{2n}) \\ = (-x_3 + ix_4, x_1 - ix_2, \dots, -x_{2n-1} + ix_{2n}, x_{2n-3} - ix_{2n-2}), \end{aligned}$$

является комплексным векторным полем на $S(\mathbb{C}^n)$. По теореме 2.3 (i) композиции $r_{\mathbb{C}} \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ и $r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ являются вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{2n})$. При этом $r_{\mathbb{C}} \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ действует по правилу

$$(x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (-x_3, x_4, x_1, -x_2, \dots, -x_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n-3}, -x_{2n-2}),$$

а $r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ действует по правилу

$$(x_1, \dots, x_{2n}) \mapsto (-x_4, -x_3, x_2, x_1, \dots, -x_{2n}, -x_{2n-1}, x_{2n-2}, x_{2n-3}).$$

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $v_1, \dots, v_m: S(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$ и $w_1, \dots, w_m: S(\mathbb{H}^n) \rightarrow \mathbb{H}^n - \{0\}$ – непрерывные функции. Тогда

- (i) $v_1, \dots, v_m$ являются линейно независимыми комплексными векторными полями на $S(\mathbb{C}^n)$, если и только если $r_{\mathbb{C}} \circ v_1 \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}, r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v_1 \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}, \dots, r_{\mathbb{C}} \circ v_m \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}, r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v_m \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ являются линейно независимыми вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{2n})$;

- (ii) $w_1, \dots, w_m$ являются линейно независимыми кватернионными векторными полями на $S(\mathbb{H}^n)$, если и только если $c_{\mathbb{H}} \circ w_1 \circ c_{\mathbb{H}}^{-1}, c_{\mathbb{H}} \circ \alpha_j \circ w_1 \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}, \dots, c_{\mathbb{H}} \circ w_m \circ c_{\mathbb{H}}^{-1}, c_{\mathbb{H}} \circ \alpha_j \circ w_m \circ c_{\mathbb{H}}^{-1}$ являются линейно независимыми комплексными векторными полями на $S(\mathbb{C}^{2n})$;
- (iii) $w_1, \dots, w_m$ являются линейно независимыми кватернионными векторными полями на $S(\mathbb{H}^n)$, если и только если $r_{\mathbb{H}} \circ w_1 \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}, r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_t \circ w_1 \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}, \dots, r_{\mathbb{H}} \circ w_m \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}, r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_t \circ w_m \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}$, где $t \in \{i, j, k\}$, являются линейно независимыми вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{4n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По теореме 2.3 (i) функции $v_1, \dots, v_m$ являются комплексными векторными полями на $S(\mathbb{C}^n)$, если и только если композиции $r_{\mathbb{C}} \circ v_1 \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}, r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v_1 \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}, \dots, r_{\mathbb{C}} \circ v_m \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}, r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v_m \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$ являются вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{2n})$. Пусть $x \in S(\mathbb{R}^{2n})$, $y = r_{\mathbb{C}}^{-1}(x)$ и $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(r_{\mathbb{C}} \circ v_1 \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}(x))a_1 + (r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v_1 \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}(x))b_1 + \dots + (r_{\mathbb{C}} \circ v_m \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}(x))a_m + (r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ v_m \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}(x))b_m = 0,$$

если и только если $v_1(y)(a_1 + b_1 i) + \dots + v_m(y)(a_m + b_m i) = 0$, что и требовалось. Утверждения (ii) и (iii) доказываются аналогично утверждению (i).

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Выполнены неравенства*

$$\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) \geq 2\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n), \quad \rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) \geq 2\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Единичное $\mathbb{F}$ -векторное поле на $S(\mathbb{F}^n)$ является $\mathbb{F}$ -векторным полем на $S(\mathbb{F}^n)$, образ которого содержится в $S(\mathbb{F}^n)$. Система из m таких единичных векторных полей $v_1, \dots, v_m$ является ортонормированной, если $\langle v_s(x) | v_t(x) \rangle_{\mathbb{F}} = \delta_{st}$ для любых $s, t \in \{1, \dots, m\}$ и $x \in S(\mathbb{F}^n)$. Заметим, что поскольку процесс ортогонализации Грама–Шмидта непрерывен, m линейно независимых $\mathbb{F}$ -векторных полей на $S(\mathbb{F}^n)$ всегда можно превратить в m ортонормированных $\mathbb{F}$ -векторных полей на $S(\mathbb{F}^n)$. Следовательно, значение $\rho^{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ равно максимальному числу ортонормированных $\mathbb{F}$ -векторных полей на $S(\mathbb{F}^n)$. Кроме того, с помощью теоремы 2.2 и основных свойств стандартных скалярных произведений можно показать, что теорема 2.3 остается справедливой, если в ее формулировке всюду заменить “векторное поле” на “единичное векторное поле”, а теорема 2.5 остается справедливой при замене линейной независимости на ортонормированность.

3. Связь между $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ и $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$. Для натурального числа m пусть $c_m^{\mathbb{F}}$ обозначает $\mathbb{F}$ -число Джеймса (см. [10]). Тогда значение $\rho^{\mathbb{F}}(\mathbb{F}^n)$ равно наибольшему m , для которого n кратно $c_m^{\mathbb{F}}$. Число Джеймса $c_m^{\mathbb{R}}$ было вычислено Адамсом в [3]; оно задается формулой $c_m^{\mathbb{R}} = 2^{f(m)}$, где $f(m)$ – число натуральных q , не превосходящих m и таких, что $q \equiv 0, 1, 2$ или $4 \pmod{8}$. В [3] Адамс показал также, что $\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = 8d + 2^c - 1$, где $n = (2a + 1)2^{4d+c}$ для некоторых неотрицательных целых a, d и c , причем $c \leq 3$.

Покажем, как вычислить $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ и $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$. Для данного простого числа p пусть $\nu_p(m)$ – степень, в которой p входит в разложение числа m на простые множители. Значение $c_m^{\mathbb{C}}$ было вычислено Адамсом и Уокером в [4]; оно определяется из выражения

$$\nu_p(c_m^{\mathbb{C}}) = \max \left\{ s + \nu_p(s) : 0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{m}{p-1} \right\rfloor \right\}.$$

Значение $c_m^{\mathbb{H}}$ было вычислено Сигристом и Сутером в [5]; оно определяется из выражений $\nu_2(c_m^{\mathbb{H}}) = \max\{2m+1, 2s+\nu_2(s) : 0 \leq s \leq m\}$ и

$$\nu_p(c_m^{\mathbb{H}}) = \max\left\{s + \nu_p(s) : 0 \leq s \leq \left\lfloor \frac{2m}{p-1} \right\rfloor\right\}$$

для нечетного простого p . Для $p \leq m+1$ положим

$$S_{m,p} = \left\{s : \left\lfloor \frac{m}{p-1} \right\rfloor + \nu_p\left(\left\lfloor \frac{m}{p-1} \right\rfloor\right) - \left\lfloor \log_p\left(\frac{m}{p-1}\right) \right\rfloor \leq s \leq \left\lfloor \frac{m}{p-1} \right\rfloor\right\},$$

а для $p > m+1$ положим $S_{m,p} = \{0\}$. Заметим, что если $p \leq m+1$, то $|S_{m,p}| = \lfloor \log_p(m/(p-1)) \rfloor - \nu_p(\lfloor m/(p-1) \rfloor) + 1$. В следующей лемме мы приводим формулы для вычисления $\nu_p(c_m^{\mathbb{C}})$ и $\nu_p(c_m^{\mathbb{H}})$.

ЛЕММА 3.1. Пусть m – натуральное и p – простое число. Тогда

- (i) $\nu_p(c_m^{\mathbb{C}}) = \max\{s + \nu_p(s) : s \in S_{m,p}\};$
- (ii) $\nu_2(c_m^{\mathbb{H}}) = \max\{2m+1, 2s+\nu_2(s) : s \in S_{m,2}\}, \nu_p(c_m^{\mathbb{H}}) = \max\{s + \nu_p(s) : s \in S_{2m,p}\}$ для нечетных простых p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть имеем $\nu_p(c_m^{\mathbb{C}}) = u + \nu_p(u)$ для некоторого $0 \leq u \leq \lfloor m/(p-1) \rfloor$. Тогда $\nu_p(u) \leq \lfloor \log_p u \rfloor \leq \lfloor \log_p(m/(p-1)) \rfloor$. Значит,

$$\left\lfloor \frac{m}{p-1} \right\rfloor + \nu_p\left(\left\lfloor \frac{m}{p-1} \right\rfloor\right) \leq u + \nu_p(u) \leq u + \left\lfloor \log_p \frac{m}{p-1} \right\rfloor.$$

Следовательно, $u \geq \lfloor m/(p-1) \rfloor + \nu_p(\lfloor m/(p-1) \rfloor - \lfloor \log_p(m/(p-1)) \rfloor)$, откуда и вытекает требуемое утверждение. Доказательство утверждения (ii) аналогично.

Обозначим i -е простое через p_i : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$ и т.д. Пусть $n = p_1^{t_1} \times \dots \times p_r^{t_r} \times l$, где $t_i \geq 1$ для каждого $i = 1, \dots, r$ и $\nu_{p_{r+1}}(l) = 0$. Для $i = 1, \dots, r$ обозначим наибольшее $m \in \{0, \dots, p_{r+1}-2\}$, для которого $t_i \geq \nu_{p_i}(c_m^{\mathbb{C}})$, через $K_{n,i}^{\mathbb{C}}$, а наибольшее $m \in \{0, \dots, (p_{r+1}-3)/2\}$, для которого $t_i \geq \nu_{p_i}(c_m^{\mathbb{H}})$, через $K_{n,i}^{\mathbb{H}}$. Следующая теорема содержит формулы для непосредственного вычисления $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ и $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $n = p_1^{t_1} \times \dots \times p_r^{t_r} \times l$, где $t_i \geq 1$ для каждого $i = 1, \dots, r$. Тогда если $\nu_{p_{r+1}}(l) = 0$, то

- (i) $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \min\{K_{n,i}^{\mathbb{C}} : i = 1, \dots, r\};$
- (ii) $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = \min\{K_{n,i}^{\mathbb{H}} : i = 1, \dots, r\}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Во-первых, поскольку $\nu_{p_{r+1}}(c_{p_{r+1}-1}^{\mathbb{C}}) = 1$ и $c_i^{\mathbb{C}} \mid c_{i+1}^{\mathbb{C}}$ для каждого $i \geq 1$, имеем $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \leq K_{n,i}^{\mathbb{C}}$ для всех $i = 1, \dots, r$. С другой стороны, если $s = \min\{K_{n,i}^{\mathbb{C}} : i = 1, \dots, r\}$, то $t_i \geq \nu_{p_i}(c_s^{\mathbb{C}})$ для каждого $i = 1, \dots, r$, поэтому $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \geq s$, что и требовалось. Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Согласно следствию 2.6 число линейно независимых комплексных векторных полей на $S(\mathbb{C}^n)$ не превосходит половины числа линейно независимых вещественных векторных полей на $S(\mathbb{R}^{2n})$, а число линейно независимых кватернионных векторных полей на $S(\mathbb{H}^n)$ не превосходит половины числа линейно независимых комплексных векторных полей на $S(\mathbb{C}^{2n})$. Основной результат этого раздела – следующая теорема, которая содержит явные отношения, связывающие число линейно независимых комплексных векторных полей на $S(\mathbb{C}^{2n})$ и число линейно независимых кватернионных векторных полей на $S(\mathbb{H}^n)$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Выполнено равенство $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) = 2\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) + d$, где $d = 1$ или 3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) = m$. Тогда m – наименьшее целое, для которого n не кратно числу $c_{m+1}^{\mathbb{H}}$. Из результатов работы [5] вытекает, что число $c_{m+1}^{\mathbb{H}}$ равно либо $c_{2m+3}^{\mathbb{C}}/2$, либо $c_{2m+3}^{\mathbb{C}}$. Если $c_{m+1}^{\mathbb{H}} = c_{2m+3}^{\mathbb{C}}/2$, то $2n$ не кратно $2c_{m+1}^{\mathbb{H}} = c_{2m+3}^{\mathbb{C}}$. С другой стороны, если $c_{m+1}^{\mathbb{H}} = c_{2m+3}^{\mathbb{C}}$, то $\nu_2(c_{m+1}^{\mathbb{H}}) = \nu_2(c_{2m+3}^{\mathbb{C}}) = 2m + 3$. Значит, $2n$ не кратно числу $c_{m+2}^{\mathbb{H}}$, потому что $c_{m+2}^{\mathbb{H}} \geq c_{m+1}^{\mathbb{H}}$, $\nu_p(2n) = \nu_p(n)$ для каждого $p \neq 2$ и $\nu_2(c_{m+2}^{\mathbb{H}}) \geq 2m + 5$ (см. лемму 3.1). Но число $c_{m+2}^{\mathbb{H}}$ равно либо $c_{2m+5}^{\mathbb{C}}/2$, либо $c_{2m+5}^{\mathbb{C}}$. Таким образом, в любом случае $2n$ не кратно числу $c_{2m+5}^{\mathbb{C}}$, а значит, $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) < 2m + 5$. Поскольку $c_{2k+1}^{\mathbb{C}} = c_{2k}^{\mathbb{C}}$ для каждого $k \geq 1$ (см. [4]), число $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ должно быть четным. Согласно следствию 2.6 $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ равно либо $2m + 1$, либо $2m + 3$.

В следующей таблице приводятся значения $\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{4n})$, $\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$ и $\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ для некоторых n .

Таблица

n	1	2	4	6	12	24	1440
$\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{4n})$	3	7	8	7	8	9	15
$\rho^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$	1	1	1	1	3	3	5
$\rho^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$	0	0	0	0	0	1	2

4. Построение векторных полей на сферах. Построение $\rho^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ линейно независимых вещественных векторных полей на $S(\mathbb{R}^n)$ хорошо известно. Конструкции, использующие алгебры Клиффорда, описаны в [6], а комбинаторные конструкции – в недавней работе Огникяна [7]. Ситуация с комплексными и кватернионными векторными полями совершенно иная; в этих случаях нет явных конструкций, которые дают два (или больше) линейно независимых комплексных векторных полей на $S(\mathbb{C}^n)$ или хотя бы одно кватернионное векторное поле на $S(\mathbb{H}^n)$. Более того, единственное известное комплексное векторное поле на $S(\mathbb{C}^n)$ – это поле, описанное в примере 2.4.

Согласно теореме 2.5 из m линейно независимых комплексных (соответственно, кватернионных) векторных полей мы можем получить $2m$ линейно независимых вещественных (соответственно, комплексных) векторных полей. Возникает естественный вопрос, можно ли из линейно независимых вещественных (комплексных) векторных полей получать линейно независимые комплексные или кватернионные (соответственно, кватернионные) векторные поля.

Следующая теорема содержит необходимые и достаточные условия того, что данные линейно независимые вещественные (комплексные) векторные поля являются линейно независимыми комплексными или кватернионными (соответственно, кватернионными) векторными полями. Для краткости мы используем обозначения $r_{\mathbb{C},i} = r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_i \circ r_{\mathbb{C}}^{-1}$, $c_{\mathbb{H},j} = r_{\mathbb{C}} \circ \alpha_j \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}$ и $r_{\mathbb{H},t} = r_{\mathbb{H}} \circ \alpha_t \circ r_{\mathbb{H}}^{-1}$ для каждого $t \in \{i, j, k\}$.

ТЕОРЕМА 4.1. (i) Пусть $u_1, \dots, u_m$ – линейно независимые вещественные векторные поля на $S(\mathbb{R}^{2n})$. Тогда $r_{\mathbb{C}}^{-1} \circ u_1 \circ r_{\mathbb{C}}, \dots, r_{\mathbb{C}}^{-1} \circ u_m \circ r_{\mathbb{C}}$ являются линейно независимыми комплексными векторными полями на $S(\mathbb{C}^n)$, если и только если $u_1, \dots, u_m, r_{\mathbb{C},i} \circ u_1, \dots, r_{\mathbb{C},i} \circ u_m$ являются линейно независимыми вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{2n})$.

(ii) Пусть $v_1, \dots, v_m$ — линейно независимые комплексные векторные поля на $S(\mathbb{C}^{2n})$. Тогда $c_{\mathbb{H}}^{-1} \circ v_1 \circ c_{\mathbb{H}}, \dots, c_{\mathbb{H}}^{-1} \circ v_m \circ c_{\mathbb{H}}$ являются линейно независимыми кватернионными векторными полями на $S(\mathbb{H}^n)$, если и только если $v_1, \dots, v_m, c_{\mathbb{H},j} \circ v_1, \dots, c_{\mathbb{H},j} \circ v_m$ являются линейно независимыми комплексными векторными полями на $S(\mathbb{C}^{2n})$.

(iii) Пусть $u_1, \dots, u_m$ — линейно независимые вещественные векторные поля на $S(\mathbb{R}^{4n})$. Тогда $r_{\mathbb{H}}^{-1} \circ u_1 \circ r_{\mathbb{H}}, \dots, r_{\mathbb{H}}^{-1} \circ u_m \circ r_{\mathbb{H}}$ являются линейно независимыми кватернионными векторными полями на $S(\mathbb{H}^n)$, если и только если $u_1, \dots, u_m, r_{\mathbb{H},t} \circ u_1, \dots, r_{\mathbb{H},t} \circ u_m$, где $t \in \{i, j, k\}$, являются линейно независимыми вещественными векторными полями на $S(\mathbb{R}^{4n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемые утверждения немедленно вытекают из теоремы 2.5.

В [11] Беккер решил проблему эквивариантных вещественных векторных полей (как задачу о максимальном числе, так и задачу о построении) в некоторых важных случаях, а именно, на сферах со свободным действием группы, при помощи известных конструкций неэквивариантных вещественных векторных полей на сферах, использующих алгебры Клиффорда. Как отмечено в статьях [8] и [9], оба вопроса (о максимальном числе и построении) полностью открыты для эквивариантных комплексных и кватернионных векторных полей на сферах со свободным действием группы. Возможно, с помощью метода, подобного методу Беккера, из конструкции неэквивариантных комплексных и кватернионных векторных полей на сферах удастся получить решение проблемы об эквивариантных комплексных и кватернионных векторных полях на сферах со свободным действием группы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Mahammad, R. Piccinini, U. Suter, *Some Applications of Topological K-Theory*, North-Holland Math. Stud., **45**, North Holland Publ., Amsterdam, 1980.
- [2] E. Thomas, “Vector fields on manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 643–683.
- [3] J. F. Adams, “Vector fields on spheres”, *Ann. of Math.* (2), **75**:3 (1962), 603–632.
- [4] J. F. Adams, G. Walker, “On complex Stiefel manifolds”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **61** (1965), 81–103.
- [5] F. Sigrist, U. Suter, “Cross-sections of symplectic Stiefel manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184** (1973), 247–259.
- [6] P. Zvengrowski, “Canonical vector fields on spheres”, *Comment. Math. Helv.*, **43** (1968), 341–347.
- [7] A. A. Огникян, “Комбинаторное построение касательных векторных полей на сферах”, *Матем. заметки*, **83**:4 (2008), 590–605.
- [8] T. Önder, “Equivariant cross sections of complex Stiefel manifolds”, *Topology Appl.*, **109**:1 (2001), 107–125.
- [9] M. Obiedat, “Real, complex and quaternionic equivariant vector fields on spheres”, *Topology Appl.*, **153**:12 (2006), 2182–2189.
- [10] I. M. James, “Cross-sections of Stiefel manifolds”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **8** (1958), 536–547.
- [11] J. C. Becker, “The span of spherical forms”, *Amer. J. Math.*, **94**:4 (1972), 991–1026.

М. Обиедат

Gallaudet University, USA

E-mail: mohammad.obiedat@gallaudet.edu

Поступило

17.01.2011