Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Зубков, Т. А. Татаренко, Эквивалентность отношения порядка по Шуру и стохастических порядков, порожденных схемой размещения частиц по ячейкам, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 56–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:13:06

Эквивалентность отношения порядка по Шуру и стохастических порядков, порожденных схемой размещения частиц по ячейкам

А. М. Зубков, Т. А. Татаренко

В 1982 г. было доказано, что отношение частичного порядка по Шуру на множестве распределений на $\{1, 2, \dots\}$ эквивалентно отношению порядка, порожденному распределениями числа занятых ячеек в схеме независимого размещения частиц по ячейкам. Здесь показано, что то же самое отношение частичного порядка порождается распределениями чисел ячеек, в которые попало не менее r частиц, при любом $r \geq 2$.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10135

1. Постановка задачи. В работе [1] изучалось отношение частичного порядка на множестве

$$\mathfrak{A} = \left\{ \mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^{\infty} : \inf_{i \geq 1} a_i = 0, \sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1 \right\}$$

вероятностных распределений на множестве $\{1, 2, \dots\}$. Для каждого $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ вводится последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимых случайных величин с распределением $\mathbf{a}$:

$$P\{\xi_t = j\} = a_j, \quad t, j \in \{1, 2, \dots\}.$$

Последовательности $\{\xi_t\}$ сопоставляется процесс размещения частиц по ячейкам с номерами $1, 2, \dots$: t -я частица попадает в j -ю ячейку, если $\xi_t = j$. В теории размещения частиц по ячейкам (см., например, [2], [3]) изучаются случайные величины $\mu_r(n; \mathbf{a})$, равные числу ячеек, в которые после размещения n частиц попало ровно r частиц. Вводятся также случайные величины $\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) = \sum_{k \geq r} \mu_k(n; \mathbf{a})$ – числа ячеек, в которые попало не менее r частиц. В [1] рассматривалось отношение частичного порядка на множестве $\mathfrak{A}$, порожденное случайными величинами $\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a})$ – числами ячеек, оказавшихся не пустыми после размещения первых n частиц.

Это отношение задается следующим образом: элемент $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ мажорируется элементом $\mathbf{a}' \in \mathfrak{A}$ ($\mathbf{a} \preceq \mathbf{a}'$) тогда и только тогда, когда

$$P\{\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a}) \leq k\} \leq P\{\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a}') \leq k\} \quad \text{для всех } n, k \in \{1, 2, \dots\}. \quad (1)$$

Если выполняется условие (1), то можно задать на одном вероятностном пространстве случайные величины $\zeta(n; \mathbf{a})$ и $\zeta(n; \mathbf{a}')$ так, что $\zeta(n; \mathbf{a})$ имеет такое же распределение, как $\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a})$, $\zeta(n; \mathbf{a}')$ – такое же распределение, как $\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a}')$, и

$$P\{\zeta(n; \mathbf{a}) \geq \zeta(n; \mathbf{a}')\} = 1,$$

т.е. $\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a})$ стохастически больше $\bar{\mu}_1(n; \mathbf{a}')$.

Отметим, что из выполнения условия (1) не следует выполнение аналогичного условия для величин μ_1 .

В силу инвариантности (1) относительно перестановок элементов последовательностей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ можно, не ограничивая общности, рассматривать введенное отношение порядка на подмножестве

$$\mathfrak{A}^* = \{\mathbf{a} \in \mathfrak{A} : a_1 \geq a_2 \geq \dots\} \subset \mathfrak{A}.$$

Будем использовать обозначения $A_0 = 0$, $A_n = a_1 + \dots + a_n$, $n = 1, 2, \dots$, и $N_a = \sup\{i : a_i > 0\}$, $N_{a,a'} = \sup\{i : a_i + a'_i > 0\}$.

В [1] доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Для $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathfrak{A}^*$ условие (1) эквивалентно условию

$$A_k \leq A'_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}^*$ и $N_a = N < \infty$, то

$$(N^{-1}, \dots, N^{-1}) \preceq \mathbf{a},$$

т.е. число занятых ячеек в равновероятной схеме “стохастически больше” числа занятых ячеек в любой другой полиномиальной схеме с таким же числом ячеек при одинаковом числе размещаемых частиц.

Отношение порядка (2) называется *отношением порядка по Шуру* (см., например, [4]). В настоящей работе показано, что это отношение порядка на $\mathfrak{A}^*$ эквивалентно и аналогичным (1) отношениям порядка, построенным по случайным величинам $\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a})$ – числам ячеек, содержащих не менее $r \geq 2$ частиц.

ТЕОРЕМА 2. Для $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathfrak{A}^*$ при фиксированном $r \leq (n+1)/2$ условие

$$P\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\} \leq P\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\} \quad \text{для всех } n, k \in \{1, 2, \dots\} \quad (3)$$

эквивалентно условию (2).

СЛЕДСТВИЕ 2. При любых натуральных числах r и N число ячеек, содержащих не менее r частиц, в равновероятной схеме размещения по N ячейкам “стохастически больше” числа ячеек, содержащих не менее r частиц, в любой другой полиномиальной схеме размещения по N ячейкам при одинаковом числе размещаемых частиц.

Отметим, что в [5] описаны полиномиальные распределения $\mathbf{a}$, для которых при фиксированных числе ячеек N , числе частиц n и целом $r \geq 1$ достигаются максимальные и минимальные значения $\mathbf{M}\bar{\mu}_r(n, \mathbf{a})$, и получены двусторонние оценки максимального значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\eta_j(n, \mathbf{a})$ – число частиц, попавших в j -ю ячейку после размещения n частиц. Оценим вероятность $\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\}$ снизу:

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\} \geq \mathbf{P}\left\{\max_{j>k} \eta_j(n, \mathbf{a}) = 0\right\} = (A_k)^n, \quad (4)$$

т.е.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_k)^{-n} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\} > 0. \quad (5)$$

Теперь получим оценку сверху для $\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\}$. Рассмотрим сначала случай, когда $N_{a'} < \infty$:

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\} \leq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N_{a'}} P_{i_1 \dots i_k},$$

где $P_{i_1 \dots i_k} = \mathbf{P}\{\eta_j(n, \mathbf{a}') \geq r \Rightarrow j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\}$ – вероятность того, что все ячейки, содержащие не менее r частиц, находятся среди ячеек с номерами $i_1, \dots, i_k$. Если в каждую ячейку с номером, отличным от $i_1, \dots, i_k$, попало не более $r-1$ частиц, то $\sum_{w=1}^k \eta_{i_w}(n, \mathbf{a}') \geq n - (N_{a'} - k)(r-1)$. Поэтому при $n > 2(N_{a'} - k)(r-1)$

$$\begin{aligned} P_{i_1 \dots i_k} &\leq \mathbf{P}\left\{\sum_{w=1}^k \eta_{i_w}(n; \mathbf{a}') \geq n - (N_{a'} - k)(r-1)\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{(N_{a'}-k)(r-1)} C_n^m (a'_{i_1} + \dots + a'_{i_k})^{n-m} \\ &\leq ((N_{a'} - k)(r-1) + 1) C_n^{(N_{a'}-k)(r-1)} (a'_{i_1} + \dots + a'_{i_k})^{n-(N_{a'}-k)(r-1)} \\ &\leq N_{a'} r C_n^{(N_{a'}-k)(r-1)} (A'_k)^{n-(N_{a'}-k)(r-1)} \leq C_2 n^{(N_{a'}-k)(r-1)} (A'_k)^n, \end{aligned}$$

где $C_2 = C_2(\mathbf{a}', k, r) < \infty$, и

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\} \leq C_{N_{a'}}^k C_2 n^{(N_{a'}-k)(r-1)} (A'_k)^n. \quad (6)$$

Значит,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-(N_{a'}-k)(r-1)} (A'_k)^{-n} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\} < \infty. \quad (7)$$

Допустим, что $A_k = A'_k + \delta > A'_k$. Тогда в силу условия (3) и оценки (7)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (A_k)^{-n} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A'_k + \delta}{A'_k}\right)^{-n} (A'_k)^{-n} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\} = 0,$$

что противоречит (5). Следовательно, $A_k \leq A'_k$, если $N_{a'} < \infty$.

В случае, когда $N_{a'} = \infty$, получим оценки, немного более грубые, чем (6). Для любого $\varepsilon > 0$ положим $M = M(\mathbf{a}', k, \varepsilon) = \min\{i \geq k : 1 - A'_i \leq \varepsilon A'_k\} < \infty$ и представим $\mathbf{a}'$ в виде смеси двух вспомогательных распределений: $\mathbf{a}' = A'_M \mathbf{a}_1 + (1 - A'_M) \mathbf{a}_2$, где

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{a'_1}{A'_M}, \dots, \frac{a'_M}{A'_M}, 0, 0, \dots\right) \in \mathfrak{A}^*, \quad \mathbf{a}_2 = \left(0, \dots, 0, \frac{a'_{M+1}}{1 - A'_M}, \frac{a'_{M+2}}{1 - A'_M}, \dots\right) \in \mathfrak{A}.$$

Используя формулу полной вероятности и то, что в силу (6) при $s \leq k$

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(m; \mathbf{a}_1) \leq s\} \leq \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(m; \mathbf{a}_1) \leq k\} \leq C_M^k C_2 m^{(M-k)(r-1)} \left(\frac{A'_k}{A'_M} \right)^m,$$

находим, что при $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{s=0}^k C_n^m (A'_M)^m (1 - A'_M)^{n-m} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(m; \mathbf{a}_1) \leq s\} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n-m; \mathbf{a}_2) = k-s\} \\ &\leq \sum_{m=0}^n C_n^m (A'_M)^m (\varepsilon A'_k)^{n-m} C_M^k C_2 m^{(M-k)(r-1)} \left(\frac{A'_k}{A'_M} \right)^m \\ &\leq (A'_k)^n n^{(M-k)(r-1)} \sum_{m=0}^n C_n^m \varepsilon^{n-m} = n^{(M-k)(r-1)} (A'_k (1 + \varepsilon))^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Опять допустим, что $A_k > A'_k$. Тогда в силу условия (3) и оценки (8), в которой $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $A'_k(1 + \varepsilon) < A_k$, получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\}}{(A_k)^n} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A'_k(1 + \varepsilon)}{A_k} \right)^n \frac{\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\}}{(A'_k(1 + \varepsilon))^n} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A'_k(1 + \varepsilon)}{A_k} \right)^n n^{(M-k)(r-1)} = 0, \end{aligned}$$

что противоречит (5). Следовательно, $A_k \leq A'_k$ и при $N_{a'} = \infty$.

(2) $\Rightarrow$ (3). В случае, когда $N_{a,a'} < \infty$, используем индукцию по $N_{a,a'} = N$. При $N = 2$ и $r \leq (n+1)/2$ для доказательства утверждения (2) $\Rightarrow$ (3) достаточно рассмотреть случай $k = 1$, поскольку

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq 2\} = 1, \quad \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq 0\} = 0.$$

Далее, при $n \geq 3$, $N_a = 2$ и $r \leq (n+1)/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq 1\} &= \mathbf{P}\{\eta_1(n; \mathbf{a}) < r\} + \mathbf{P}\{\eta_2(n; \mathbf{a}) < r\} \\ &= \sum_{m=0}^{r-1} C_n^m (a_1^{n-m} (1 - a_1)^m + a_1^m (1 - a_1)^{n-m}) \\ &= \sum_{m=0}^{r-1} C_n^m a_1^m (1 - a_1)^{n-m} + 1 - \sum_{m=0}^{n-r} C_n^m a_1^m (1 - a_1)^{n-m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если $N_a = 2$ и $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}^*$, то $a_1 \geq 1/2$; из тождества

$$\frac{d}{da_1} \sum_{m=0}^k C_n^m a_1^m (1 - a_1)^{n-m} = -nC_{n-1}^k a_1^k (1 - a_1)^{n-k-1}$$

и условия $r \leq (n+1)/2$ следует, что производная правой части (9) по a_1 положительна при $a_1 > 1/2$:

$$\begin{aligned} & n(C_{n-1}^{n-r} a_1^{n-r} (1 - a_1)^{r-1} - C_{n-1}^{r-1} a_1^{r-1} (1 - a_1)^{n-r}) \\ &= nC_{n-1}^{r-1} a_1^{r-1} (1 - a_1)^{r-1} (a_1^{n-2r+1} - (1 - a_1)^{n-2r+1}) > 0. \end{aligned}$$

Значит, $(d/da_1) \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; (a_1, 1 - a_1, 0, 0, \dots)) \leq 1\} > 0$ при $r \leq (n + 1)/2$, поэтому из (2) следует, что при $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathfrak{A}^*$, $N_{a,a'} = 2$, $\mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{a}'$

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq 1\} \leq \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq 1\}.$$

Покажем, далее, что при любом конечном $N = N_{a,a'} \geq 3$ утверждение (2) $\Rightarrow$ (3) следует из того, что (2) $\Rightarrow$ (3) при всех меньших значениях N . Пусть для $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathfrak{A}^*$ выполнено (2) и

$$a_t = a'_t \quad \text{для некоторого } t \in \{1, \dots, N - 1\}. \quad (10)$$

Тогда условие (2) выполняется для распределений

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} &= (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{N-1}), & \tilde{\mathbf{a}}' &= (\tilde{a}'_1, \dots, \tilde{a}'_{N-1}) \in \mathfrak{A}^*, \\ \tilde{a}_k &= \begin{cases} \frac{a_k}{1 - a_t}, & 1 \leq k < t, \\ \frac{a_{k+1}}{1 - a_t}, & t < k \leq N - 1, \end{cases} & \tilde{a}'_k &= \begin{cases} \frac{a'_k}{1 - a_t}, & 1 \leq k < t, \\ \frac{a'_{k+1}}{1 - a_t}, & t < k \leq N - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя формулу полной вероятности по числу частиц, попавших в t -ю ячейку, и предположение индукции для $\tilde{\mathbf{a}}$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\} &= \sum_{m=0}^n C_n^m a_t^m (1 - a_t)^{n-m} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n - m; \tilde{\mathbf{a}}) \leq k - I\{m \geq r\}\} \\ &\leq \sum_{m=0}^n C_n^m a_t^m (1 - a_t)^{n-m} \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n - m; \tilde{\mathbf{a}}') \leq k - I\{m \geq r\}\} \\ &= \mathbf{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\}. \end{aligned}$$

Если (2) выполнено, а (10) – нет, то для доказательства индуктивного перехода достаточно построить “промежуточное” распределение вероятностей $\mathbf{a}'' \in \mathfrak{A}^*$, $N_{a''} \leq N$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $A_m \leq A''_m \leq A'_m$ для всех $m \in \{1, \dots, N - 1\}$,
- 2) существуют такие $t_1, t_2 \in \{1, \dots, N\}$, что $a_{t_1} = a''_{t_1}$, $a'_{t_2} = a''_{t_2}$.

Действительно, для такого распределения в силу только что доказанного $\mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{a}''$ и $\mathbf{a}'' \preccurlyeq \mathbf{a}'$, откуда следует, что $\mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{a}'$.

Рис. 1 иллюстрирует приведенное ниже формальное построение.

Заметим, что если выполнено условие (2) и $A_t < A'_t$ при некотором $t \in \{1, \dots, N - 1\}$, то существуют

$$t_1 = \min\{t \geq 1 : a_t < a'_t\} < t_2 = \max\{t \leq N : a_t > a'_t\}.$$

Пусть $t_0 = \min\{t \in \{t_1, \dots, t_2 - 1\} : a_t < a'_t, a_{t+1} > a'_{t+1}\}$. Тогда

$$a'_{t_0-1} \geq a'_{t_0} > a_{t_0} \quad (\text{если } t_0 > 1) \quad \text{и} \quad a'_{t_0+2} \leq a'_{t_0+1} < a_{t_0+1} \quad (\text{если } t_0 < N - 1).$$

Положим $a''_t = a'_t$ при всех $t \in \{1, \dots, N\} \setminus \{t_0, t_0 + 1\}$,

$$A''_{t_0+1} = A'_{t_0+1}, \quad A''_{t_0} = \max\{A'_{t_0-1} + a_{t_0}, A'_{t_0+1} - a_{t_0+1}\} \in (A_{t_0}, A'_{t_0}).$$

Рис. 1. Построение $\mathbf{a}''$.

Тогда либо $a''_{t_0} = a_{t_0}$, либо $a''_{t_0+1} = a_{t_0+1}$ и

$$\begin{aligned}
 a''_{t_0} &= A''_{t_0} - A''_{t_0-1} < A'_{t_0} - A'_{t_0-1} = a'_{t_0} \leq a'_{t_0-1} = a''_{t_0-1}, \\
 a''_{t_0+1} &= A''_{t_0+1} - A''_{t_0} > A'_{t_0+1} - A'_{t_0} = a'_{t_0+1} \geq a'_{t_0+2} = a''_{t_0+2}, \\
 a''_{t_0} - a''_{t_0+1} &= 2A''_{t_0} - A''_{t_0-1} - A''_{t_0+1} \\
 &= 2 \max\{A'_{t_0-1} + a_{t_0}, A'_{t_0+1} - a_{t_0+1}\} - A''_{t_0-1} - A''_{t_0+1} \\
 &= \max\{a_{t_0}, A'_{t_0+1} - A'_{t_0-1} - a_{t_0+1}\} + \max\{A'_{t_0-1} - A'_{t_0+1} + a_{t_0}, -a_{t_0+1}\} \\
 &\geq a_{t_0} - a_{t_0+1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, построенное распределение $\mathbf{a}''$ принадлежит $\mathfrak{A}^*$ и удовлетворяет условиям 1) и 2). Тем самым шаг индукции полностью обоснован, т.е. утверждение (2) $\Rightarrow$ (3) доказано для всех распределений с конечным носителем.

Пусть теперь $N_{a,a'} = \infty$ и выполнено (2). Для каждого $M \in \{1, 2, \dots\}$ введем распределения $\mathbf{a}(M), \mathbf{a}'(M) \in \mathfrak{A}^*$, $N_{\mathbf{a}(M)} = N_{\mathbf{a}'(M)} < \infty$, у которых первые M вероятностей совпадают с соответствующими вероятностями распределений $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$, а остальные подобраны так, чтобы $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{a}'(M)$ удовлетворяли условию (2).

Очевидно, что при любых фиксированных $n, k \in \{1, 2, \dots\}$, $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}^*$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}(M)) \leq k\} = \mathbb{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\}. \quad (11)$$

Так как согласно уже доказанному $\mathbf{a}(M) \preccurlyeq \mathbf{a}'(M)$ для любого $M < \infty$, то для всех $n, k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}(M)) \leq k\} \leq \mathbb{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}'(M)) \leq k\}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что при любых $n, k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}) \leq k\} \leq \mathbb{P}\{\bar{\mu}_r(n; \mathbf{a}') \leq k\},$$

т.е. $\mathbf{a} \preccurlyeq \mathbf{a}'$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Зубков, Н. Н. Попов, “Отношение частичного порядка, порожденное распределениями числа занятых ячеек”, *Матем. заметки*, **32**:1 (1982), 97–102.
- [2] N. L. Johnson, S. Kotz, *Urn Models and their Application. An Approach to Modern Discrete Probability Theory*, Wiley Ser. Probab. Math. Stat., J. Wiley & Sons, New York, 1977.
- [3] В. Ф. Колчин, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков, *Случайные размещения*, Теория вероятностей и математическая статистика, Наука, М., 1976.
- [4] А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения*, Мир, М., 1983.
- [5] Р. Р. Гильманшин, А. М. Зубков, Н. А. Колокольникова, “Оценки экстремальных значений среднего числа ячеек, содержащих заданное число частиц”, *Дискрет. матем.*, **19**:1 (2007), 11–16.

А. М. Зубков

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: zubkov@mi.ras.ru

Поступило

11.03.2012

Т. А. Татаренко

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tatarenko_ta@mail.ru