Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Тепляков, Верхняя оценка в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 148–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:44:11

Верхняя оценка в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа

С. М. Тепляков

1. Введение. В 1961 г. Эрдеш и Хайнал предложили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему числу ребер у n -однородного гиперграфа, вершины которого нельзя так раскрасить в два цвета, чтобы все его ребра были неодноразноцветными (см. [1]). Задача Эрдеша–Хайнала является одной из классических проблем экстремальной комбинаторики. Ей и ее многочисленным обобщениям посвящено множество работ. Обзоры по этой теме можно найти, например, в [2] и [3].

В данной работе мы обсудим вариант задачи Эрдеша–Хайнала, предложенный в 2004 г. Шабановым и Райгородским (см. [4]). Речь идет о величине $m_k(n)$, равной наименьшему числу ребер у n -однородного гиперграфа, вершины которого нельзя так раскрасить в два цвета, чтобы каждое его ребро содержало не менее k вершин каждого из цветов. Ясно, что $k \leq n/2$ и что $m_1(n) = m(n)$.

Величину $m_k(n)$ довольно активно изучали. С одной стороны, случай $k \sim n/2$ был фактически рассмотрен задолго до появления статьи [4]. Он известен под названием “задача об уклонении” (см. [5]). Постановка задачи несколько иная, но исключительно близкая к нашей. Также случай $k \sim n/2$ изучен в недавней статье [6]. С другой стороны, детально исследовались сравнительно малые значения k . В работах [4]–[8], [9] получены различные нижние и верхние оценки величины $m_k(n)$ при тех или иных соотношениях между параметрами задачи. В частности, в [4], [7] показано, что при условии $k = o(n/\ln n)$ выполнено неравенство

$$m_k(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j} (1 + o(1)). \quad (1)$$

При малых k , n имеются уточнения (см. [10]), но в асимптотике это неравенство никто не улучшал.

В этой заметке мы не станем уточнять неравенство (1). Однако мы докажем его при более слабых ограничениях на k . Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $k = o(n)$, то $m_k(n)$ удовлетворяет неравенству (1).

2. Доказательство теоремы. Начало доказательства стандартно (ср. [4], [7]). Поэтому мы изложим его совсем сжато.

Нам нужно доказать существование такого n -однородного гиперграфа с

$$m = \frac{e \ln 2}{4} n^2 \frac{2^n}{\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j} (1 + o(1))$$

ребрами, что он не допускает требуемую раскраску. Строим случайный гиперграф с m ребрами: каждое ребро независимо от всех остальных ребер выбирается с вероятностью $1/C_v^m$ из множества вершин $\{1, \dots, v\}$. Величина v в итоге подбирается оптимально. Не обосновывая оптимальность, положим сразу $v = n^2/2$ (считаем, что n четно). Если с положительной вероятностью гиперграф обладает необходимым нам свойством, то теорема доказана. Нетрудно проверить (ср. [4], [7]), что для завершения доказательства достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683).

DOI: 10.4213/mzm10136

ЛЕММА. Пусть $k = o(n)$, $v = n^2/2$. Тогда существует такая функция γ аргумента n , что $\gamma(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и для любого $a \leq v$ величина

$$D_a = \sum_{j=0}^{k-1} (C_a^{n-j} C_{v-a}^j + C_a^j C_{v-a}^{n-j})$$

оценивается снизу величиной

$$\gamma(n) e^{-1} 2^{1-n} C_v^n \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j.$$

Здесь $C_r^s = 0$, коль скоро $r < s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Положим $S = 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j$. Поскольку $k = o(n)$, имеем $S = 2^{-n} e^{o(n)} = e^{-n \ln 2 + o(n)}$.

Дальнейшее доказательство разобьем на три случая, считая без ограничения общности, что $a \geq v/2$. Также при необходимости считаем, что n достаточно велико.

Случай 1. В этом случае $a > (n^2/4)(1 + \varepsilon_1)$, где ε_1 – некоторая фиксированная константа ($\varepsilon_1 > 0$). Например, можно считать $\varepsilon_1 = 0.01$.

Очевидно,

$$\frac{D_a}{C_v^n} \geq \frac{C_a^n}{C_v^n} \quad (\text{возникает при подстановке } j = 0 \text{ в } D_a).$$

Оценим последнее выражение снизу для произвольного a :

$$\frac{C_a^n}{C_v^n} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{v(v-1) \cdots (v-n+1)} \geq \frac{(a-n+1)^n}{(n^2/2)^n} = \left(\frac{2a}{n^2} - \frac{2n-2}{n^2} \right)^n = e^{n \ln(2a/n^2 - (2n-2)/n^2)}.$$

Заметим, что итоговая функция монотонно возрастает по a . Таким образом, для любого $a > (n^2/4)(1 + \varepsilon_1)$ справедлива оценка

$$e^{n \ln(2a/n^2 - (2n-2)/n^2)} \geq e^{n \ln((1+\varepsilon_1)/2 - (2n-2)/n^2)} \geq C_1 e^{-n \ln(2/(1+\varepsilon_1))}$$

с некоторой константой C_1 .

Сравнивая полученное выражение с верхней оценкой для величины S , имеем

$$\frac{D_a}{C_v^n} \geq C_1 e^{-n \ln(2/(1+\varepsilon_1))} \geq 2e^{-1} e^{-n \ln 2 + cn} \geq 2e^{-1} S$$

с некоторой положительной константой c .

Наконец, положим $\gamma(n) = 1$. Лемма в случае 1 доказана.

Случай 2. Здесь

$$\frac{n^2}{4} (1 + \beta(n)) < a \leq \frac{n^2}{4} (1 + \varepsilon_1),$$

где функция β положительна и такова, что $n\beta^2(n) \rightarrow 0$, но $n\beta(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Например, $\beta(n) = n^{-2/3}$.

В этом случае напомним

$$D_a = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_a^{n-j} C_{v-a}^j}{C_v^n} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{C_{v-a}^{n-j} C_a^j}{C_v^n} \right) C_v^n. \quad (2)$$

Оценим каждое слагаемое первой суммы:

$$\frac{C_a^{n-j} C_{v-a}^j}{C_v^n} = C_n^j \frac{(v-a)(v-a-1) \cdots (v-a-j+1) \cdot a(a-1) \cdots (a-n+j+1)}{v(v-1) \cdots (v-n+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= C_n^j \left(\frac{a}{v} \right)^{n-j} (1-a/v)(1-(a+1)/v) \cdots (1-(a+j-1)/v) \\
&\quad \times \frac{1(1-1/a) \cdots (1-(n-j-1)/a)}{1(1-1/v) \cdots (1-(n-1)/v)} \\
&\geq C_n^j \left(\frac{a}{v} \right)^{n-j} \frac{(1-(a+j-1)/v)^j \cdot e^{-((n-j)(n-j-1))/(2a)}}{e^{-n(n-1)/(2v)}} \gamma_1(n) \\
&\geq e^{(\beta(n)-1)/(\beta(n)+1)} C_n^j \left(\frac{a}{v} \right)^{n-j} \left(1 - \frac{a+k-1}{v} \right)^j \gamma_2(n) \\
&\geq e^{-1} C_n^j \left(\frac{a}{v} \right)^{n-j} \left(1 - \frac{a+k-1}{v} \right)^j \gamma_3(n). \tag{3}
\end{aligned}$$

Последние неравенства верны с некоторыми функциями $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, зависящими от n и *равномерно* по $j \leq k$ стремящимися к единице при $n \rightarrow \infty$. Далее будут появляться другие функции γ_i . Все они будут обладать схожими свойствами.

Введем обозначение $x = (2a - v)/v$. Тогда в новых обозначениях можно переписать неравенство (3) в виде

$$\frac{C_{v-a}^{n-j} C_a^j}{C_v^n} \geq e^{-1} 2^{-n} C_n^j (1+x)^{n-j} (1-x)^j \gamma_4(n).$$

Проделав аналогичные действия (с точностью до замены a на $v-a$) для второй суммы из равенства (2), получаем неравенство

$$\frac{C_{v-a}^{n-j} C_a^j}{C_v^n} \geq e^{(\varepsilon_1+1)/(\varepsilon_1-1)} 2^{-n} C_n^j (1-x)^{n-j} (1+x)^j \gamma_5(n).$$

Выбирая $\gamma_6(n) = \min\{\gamma_4(n), \gamma_5(n)\}$, имеем

$$\frac{D_a}{C_v^n} \geq \gamma_6(n) e^{(\varepsilon_1+1)/(\varepsilon_1-1)} 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j ((1+x)^{n-j} (1-x)^j + (1-x)^{n-j} (1+x)^j). \tag{4}$$

В неравенстве (4) необходимо оценить второй множитель под знаком суммы:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^{n-j} (1-x)^j + (1-x)^{n-j} (1+x)^j \\
&\geq e^{(n-j)x/(1+x)-jx/(1-x)} + e^{jx/(1+x)-(n-j)x/(1-x)} \\
&= e^{((n-2j)x-nx^2)/(1-x^2)} + e^{((2j-n)x-nx^2)/(1-x^2)} \\
&> e^{((n-2j)x-nx^2)/(1-x^2)} \geq e^{((n-2k)x-nx^2)/(1-x^2)} =: \theta(n). \tag{5}
\end{aligned}$$

Заметим, что из условий, которым удовлетворяет величина a , следует, что $x \in (\beta(n), \varepsilon_1]$.

Поскольку максимум функции $(n-2k)x - nx^2$ при больших n достигается при $x \approx 1/2$, можно считать, что эта функция возрастает по x на промежутке $(\beta(n), \varepsilon_1]$, а значит,

$$\theta(n) \geq e^{((n-2k)\beta(n)-n\beta^2(n))/(1-\beta^2(n))}.$$

Но у нас $n\beta^2(n) \rightarrow 0$ и $n\beta(n) \rightarrow \infty$, откуда $(n-2k)\beta(n) - n\beta^2(n) \rightarrow \infty$ и

$$e^{((n-2k)\beta(n)-n\beta^2(n))/(1-\beta^2(n))} \geq e^{((n-2k)\beta(n)-n\beta^2(n))/(1-\beta^2(n))} \rightarrow \infty.$$

Итак,

$$\frac{D_a}{C_v^n} \geq e^{(\varepsilon_1+1)/(\varepsilon_1-1)} 2^{-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right) \gamma_6(n) e^{((n-2k)\beta(n)-n\beta^2(n))/(1-\beta^2(n))} \geq e^{-1} 2^{1-n} \left(\sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \right),$$

и лемма в случае 2 доказана.

Случай 3. Здесь

$$\frac{n^2}{4} \leq a \leq \frac{n^2}{4}(1 + \beta(n)).$$

Делая в точности то же, что и в случае 2, приходим к неравенству, аналогичному (4):

$$\frac{D_a}{C_v^n} \geq \gamma_7(n) e^{-1} 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j ((1+x)^{n-j} (1-x)^j + (1-x)^{n-j} (1+x)^j). \quad (4')$$

Слегка видоизменяется выкладка (5) (теперь мы пользуемся в ней неравенством Коши):

$$\begin{aligned} & (1+x)^{n-j} (1-x)^j + (1-x)^{n-j} (1+x)^j \\ & \geq e^{(n-j)x/(1+x)-jx/(1-x)} + e^{jx/(1+x)-(n-j)x/(1-x)} \\ & = e^{((n-2j)x-nx^2)/(1/(1-x^2))} + e^{((2j-n)x-nx^2)/(1/(1-x^2))} \\ & \geq 2e^{-2nx^2/(1-x^2)} \geq 2e^{-2n\beta^2(n)/(1-\beta^2(n))} =: 2\gamma_8(n). \end{aligned} \quad (5')$$

Завершение вычислений стандартно. Лемма и теорема доказаны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, A. Hajnal, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12**:1-2 (1961), 87–123.
 [2] A. V. Kostochka, *More Sets, Graphs and Numbers*, Bolyai Soc. Math. Stud., **15**, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 175–197. [3] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, *УМН*, **66**:5 (2011), 109–182. [4] Д. А. Шабанов, *ДАН*, **396**:2 (2004), 166–169. [5] N. Alon, J. H. Spencer, “The Probabilistic Method”, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 2000. [6] Д. Д. Черкашин, А. Б. Куликов, *ДАН*, **436**:3 (2011), 316–319. [7] Д. А. Шабанов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:6 (2007), 183–222. [8] Д. А. Шабанов, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 139–160. [9] А. П. Розовская, *ДАН*, **429**:3 (2009), 309–311. [10] С. М. Тепляков, *Тр. МФТИ*, **4**:1(13) (2012), 141–150.

С. М. Тепляков

ЗАО Страховая группа “Уралсиб”

E-mail: TeplyakovSM@coralsib.ru

Поступило

12.09.2012