Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Вяткина, А. Н. Панов, Поле U -инвариантов при-
соединенного представления группы $GL(n, K)$, *Матем.
заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 144–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:26:48

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Поле U -инвариантов присоединенного представления группы $GL(n, K)$

К. А. Вяткина, А. Н. Панов

Известно, что поле инвариантов произвольной унитарной подгруппы преобразований рационально (см. [1]). В настоящей работе для случая присоединенного представления группы $GL(n, K)$ будет найдена в явном виде алгебраически независимая система образующих поля U -инвариантов. Отметим, что в [2; гл. 1] был предложен алгоритм для нахождения образующих элементов поля U -инвариантов для произвольного рационального представления унитарной группы. Инварианты строятся индуктивным методом по длине ряда Жордана–Гельдера. В рассматриваемой задаче длина равна n^2 , что делает использование этого алгоритма проблематичным.

Рассматривается присоединенное представление $\text{Ad}_g A = gAg^{-1}$ группы $GL(n, K)$, где K – произвольное поле нулевой характеристики, на алгебре матриц $M = \text{Mat}(n, K)$. Присоединенное представление определяет представление ρ_g в $K[M]$ (соответственно $K(M)$) по формуле $\rho_g f(A) = f(g^{-1}Ag)$.

Пусть U – подгруппа верхнетреугольных матриц в $GL(n, K)$ с единицами по диагонали. Многочлен (рациональную функцию) f на M называют U -инвариантом, если $\rho_u f = f$ для любого $u \in U$. Множество U -инвариантных рациональных функций $K(M)^U$ является подполем поля $K(M)$.

Пусть $\{x_{i,j}\}$ – набор стандартных координатных функций на M . Образует матрицу $\mathbb{X} = (x_{ij})$. Пусть $\mathbb{X}^* = (x_{ij}^*)$ – ее присоединенная матрица, $\mathbb{X} \cdot \mathbb{X}^* = \mathbb{X}^* \cdot \mathbb{X} = \det \mathbb{X} \cdot E$. Обозначим через J_k левый нижний угловой минор k -го порядка для матрицы $\mathbb{X}$.

С каждым минором J_k свяжем систему из k определителей $J_{k,i}$, где $0 \leq i \leq k-1$. Определитель $J_{k,0}$ совпадает с минором J_k . В определителе $J_{k,i}$ первые $k-i$ строк совпадают с последними $k-i$ строками из минора J_k ; а последние i строк совпадают с аналогичными строками из минора $J_k(\mathbb{X}^*)$ присоединенной матрицы $\mathbb{X}^* = (x_{ij}^*)$.

ПРИМЕР 1. Случай $n = 2$,

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* \end{pmatrix}$$

$$J_{1,0} = x_{2,1}, \quad J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \quad J_{2,1} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{21}^* & x_{22}^* \end{vmatrix}.$$

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00137, 12-01-00070).

DOI: 10.4213/mzm10137

ПРИМЕР 2. Случай $n = 3$,

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}^* = \begin{pmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & x_{13}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & x_{23}^* \\ x_{31}^* & x_{32}^* & x_{33}^* \end{pmatrix},$$

$$J_{1,0} = x_{3,1}, \quad J_{2,0} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix}, \quad J_{3,0} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_{2,1} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{31}^* & x_{32}^* \end{vmatrix}, \quad J_{3,1} = \begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{31}^* & x_{32}^* & x_{33}^* \end{vmatrix}, \quad J_{3,2} = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{21}^* & x_{22}^* & x_{23}^* \\ x_{31}^* & x_{32}^* & x_{33}^* \end{vmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякий многочлен $J_{k,i}$, где $1 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq k-1$, является U -инвариантом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, из формулы $\rho_u \mathbb{X} = u^{-1} \mathbb{X} u$ видно, что каждый левый нижний угловой минор J_k , где $1 \leq k \leq n$, является U -инвариантом. На самом деле, каждый J_k инвариантен относительно правого и левого умножения на $u \in U$. Для любого $1 \leq i \leq n$ образуем $n \times n$ матрицу

$$\mathbb{Y}_i = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_{n-i} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbb{X}_i^* \end{pmatrix},$$

где блок $\mathbb{X}_{n-i}$ имеет размер $(n-i) \times n$ и получается из матрицы $\mathbb{X}$ удалением первых i строк, а блок $\mathbb{X}_i^*$ имеет размер $i \times n$ и получается из матрицы $\mathbb{X}^*$ удалением первых $n-i$ строк.

Так как $\rho_u \mathbb{X} = u^{-1} \mathbb{X} u$ и $\rho_u \mathbb{X}^* = u^{-1} \mathbb{X}^* u$, то

$$\rho_u \mathbb{Y}_i = \begin{pmatrix} u_{n-i}^{-1} \mathbb{X}_{n-i} u \\ \dots\dots\dots \\ u_i^{-1} \mathbb{X}_i^* u \end{pmatrix} = u_* \mathbb{Y}_i u, \quad (1)$$

где

$$u_* = \begin{pmatrix} u_{n-i}^{-1} & 0 \\ 0 & u_i^{-1} \end{pmatrix},$$

u_{n-i} (соответственно u_i) – правый нижний блок порядка $n-i$ (соответственно i) для $u \in U$.

Заметим, что для любых $1 \leq i \leq k-1$ определитель $J_{k,i}$ является левым нижним угловым минором k -го порядка для матрицы $\mathbb{Y}_i$. Из формулы (1) вытекает, что $J_{k,i}$ является U -инвариантом.

Рассмотрим открытое по Зарисскому подмножество $\Omega \subset M$, состоящее из матриц, на которых все $\{J_k\}$ отличны от нуля. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество матриц вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{3,0} & \dots & b_{n,n-3} \\ 0 & b_{2,0} & b_{3,1} & \dots & b_{n,n-2} \\ b_{1,0} & b_{2,1} & b_{3,2} & \dots & b_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

с элементами из поля K , причем $b_{j,0} \neq 0$, $1 \leq j \leq n$. Очевидно, что $\mathcal{L}$ содержится в Ω . Хорошо известно, что множество Ω инвариантно относительно Ad_U , и каждая Ad_U -орбита из Ω пересекает $\mathcal{L}$ в единственной точке.

Поскольку Ω плотно в M , любой $f \in K(M)^U$ однозначно определяется своим ограничением на $\mathcal{L}$. Отображение ограничения π , сопоставляющее рациональной функции $f \in K(M)^U$ ее ограничение на $\mathcal{L}$, является вложением поля $K(M)^U$ в поле $K(\mathcal{L})$.

Образуем матрицу

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & s_{n,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & s_{3,0} & \dots & s_{n,n-3} \\ 0 & s_{2,0} & s_{3,1} & \dots & s_{n,n-2} \\ s_{1,0} & s_{2,1} & s_{3,2} & \dots & s_{n,n-1} \end{pmatrix},$$

в которой $s_{k,i}$ – ограничение соответствующего элемента из матрицы $\mathbb{X}$ на $\mathcal{L}$ (точнее, $x_{a,b}$, где $a = i - k + n + 1$, $b = k$). Очевидно, что $s_{k,i}(B) = b_{k,i}$. Система координатных функций $\{s_{k,i}\}$ алгебраически независима и порождает поле $K(\mathcal{L})$. Упорядочим $\{s_{k,i}\}$ следующим образом:

$$s_{1,0} < \dots < s_{n,0} < s_{2,1} < s_{3,2} < s_{3,1} < \dots < s_{n,n-1} < \dots < s_{n,1}. \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой пары (k,i) , $1 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq k-1$, существуют рациональные функции $\phi_{k,i} \neq 0$ и $\psi_{k,i}$ от координатных функций $\{s_{a,b}\}$, меньших $s_{k,i}$ в смысле (2), такие, что

$$\pi(J_{k,i}) = \phi_{k,i}s_{k,i} + \psi_{k,i}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по методу индукции относительно координатных функций из (2). Утверждение очевидно для случая $i = 0$. Предположим, что утверждение доказано для координатных функций $< s_{k,i}$, где $i \geq 1$; докажем для $s_{k,i}$.

Обозначим через $S_{k,i}$ блок $(k-i)$ -го порядка матрицы $\mathbb{S}$, лежащий на пересечении последних $k-i$ строк и системы столбцов $\{i+1, \dots, k\}$. Пусть C_i – левый нижний угловой блок i -го порядка для присоединенной матрицы $\mathbb{S}^*$. Прямые вычисления показывают, что

$$\pi(J_{k,i}) = \begin{vmatrix} * & S_{k,i} \\ C_i & 0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

В блоке $S_{k,i}$ в правом верхнем углу находится $s_{k,i}$, остальные координатные функции $< s_{k,i}$. Минор $|S_{k,i}|$ отличен от нуля. Минор $|C_i|$ является мономом от $s_{1,0}, \dots, s_{n,0}$. Вычисляя определитель (4), получаем формулу (3).

ПРИМЕР 3. Случай $n = 2$,

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & s_{2,0} \\ s_{1,0} & s_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}^* = \begin{pmatrix} * & -s_{2,0} \\ -s_{1,0} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(J_{1,0}) = s_{1,0}, \quad \pi(J_{2,0}) = -s_{1,0}s_{2,0}, \quad \pi(J_{2,1}) = \begin{vmatrix} s_{1,0} & s_{2,1} \\ -s_{1,0} & 0 \end{vmatrix} = s_{1,0}s_{2,1}.$$

ПРИМЕР 4. Случай $n = 3$,

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{3,0} \\ 0 & s_{2,0} & s_{3,1} \\ s_{1,0} & s_{2,1} & s_{3,2} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}^* = \begin{pmatrix} * & * & s_{3,0}^* \\ * & s_{2,0}^* & 0 \\ s_{1,0}^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\pi(J_{1,0}) = s_{1,0}, \quad \pi(J_{2,0}) = -s_{1,0}s_{2,0}, \quad \pi(J_{3,0}) = -s_{1,0}s_{2,0}s_{3,0},$$

$$\pi(J_{2,1}) = s_{1,0}s_{2,1}, \quad \pi(J_{3,2}) = \begin{vmatrix} s_{1,0} & s_{2,1} & s_{3,2} \\ * & s_{2,0}^* & 0 \\ s_{1,0}^* & 0 & 0 \end{vmatrix} = s_{1,0}^*s_{2,0}^*s_{3,2},$$

$$\pi(J_{3,1}) = \begin{vmatrix} 0 & s_{2,0} & s_{3,1} \\ s_{1,0} & s_{2,1} & s_{3,2} \\ s_{1,0}^* & 0 & 0 \end{vmatrix} = s_{1,0}^* \begin{vmatrix} s_{2,0}s_{3,1} \\ s_{2,1}s_{3,2} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 1. Поле U -инвариантов присоединенного представления группы $GL(n, K)$ есть поле рациональных функций от $\{J_{k,i} : 1 \leq k \leq n, 0 \leq i \leq k-1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было сказано выше, отображение ограничения π является вложением поля $K(M)^U$ в поле $K(\mathcal{L})$. Из предложения 2 вытекает, что система элементов $\{\pi(J_{k,i}) : 1 \leq k \leq n, 0 \leq i \leq k-1\}$ алгебраически независима и порождает поле $K(\mathcal{L})$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Авторы благодарны Э. Б. Винбергу, Д. А. Тимашеву, Д. А. Шмелькину, М. Brion, С. De Concini за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] К. Miyata, *Nagoya Math. J.*, **41** (1971), 69–73. [2] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Monographies de la Société Mathématique de France, **2**, Dunod, Paris, 1967.

К. А. Вяткина

Самарский государственный университет

E-mail: vjatkina@gmail.com

Поступило

23.07.2012

А. Н. Панов

Самарский государственный университет

E-mail: apanov@list.ru