Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Хианглин Вей, Случай существования внутренних точек трех типов, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 1, 152–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:21:04

Случай существования внутренних точек трех типов

Хианлин Вей

1. Введение. В данной работе рассматривается только плоское точечное множество в общем положении, т.е. точечное множество, в котором никакие три точки не являются коллинеарными (т.е. не лежат на одной прямой). В 2001 г. Авис, Хосоно и Урабе [1] исследовали следующую задачу, связанную с наиболее знаменитой и привлекательной задачей Эрдеша–Секереша.

Для любого целого числа $k \geq 1$ найти наименьшее целое число $g(k)$ такое, что всякое точечное множество P , содержащее по крайней мере $g(k)$ внутренних точек, имеет подмножество, содержащее в точности k внутренних точек.

В работе [1] показано, что

$$g(1) = 1, \quad g(2) = 4, \quad g(3) \geq 8.$$

Февенс [2] показал, что

$$g(k) \geq 3k - 1 \quad \text{для} \quad k \geq 3.$$

Недавно мы улучшили оценку нижней грани, доказав, что

$$g(k) \geq 3k \quad \text{при} \quad k \geq 3$$

в [3], и получили точное значение $g(3) = 9$ (см. [4], [5]).

В 2000 году Авис, Хосоно и Урабе [6] рассматривали следующую задачу:

Для любого целого числа $k \geq 1$ найти наименьшее целое число $h(k)$ такое, что всякое точечное множество P , содержащее по крайней мере $h(k)$ внутренних точек, имеет подмножество, содержащее в точности k или $k + 1$ внутренних точек множества P .

Они привели единственные известные нетривиальные точные значения $h(k)$:

$$h(3) = 3 \quad \text{и} \quad h(4) = 7.$$

Февенс [2] доказал, что

$$h(k) \geq 2k + 1 \quad \text{при} \quad 5 \leq k \leq 8 \quad \text{и} \quad h(k) \geq 3k - 7 \quad \text{при} \quad k \geq 8.$$

Эти задачи привлекли наше внимание, и в данной работе мы рассматриваем задачу отыскания наименьшего целого числа $t(k)$ такого, что всякое точечное множество P , содержащее по крайней мере $t(k)$ внутренних точек, имеет подмножество, содержащее в точности k или $k + 1$ или $k + 2$ внутренних точек множества P . Решение этой задачи может быть полезно для отыскания $g(k)$.

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (10901045), Фонда естественных наук провинции Хебей (A2010000828), Научного фонда университета науки и технологии провинции Хебей (QD200955) и Фонда естественных наук Департамента образования провинции Хебей (Z2009113). На заключительной стадии данной работы, автор работал в Пекинском университете, Китай, и получил финансовую поддержку от Пекинского университета.

DOI: 10.4213/mzm10138

2. Определения и обозначения. Напомним некоторые определения и обозначения, которые использовались в работе [4].

Пусть P – точечное множество, $CH(P)$ – выпуклая оболочка множества P , а $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – множество вершин выпуклой оболочки $CH(P)$, или, коротко, множества P . Здесь вершины $v_1, v_2, \dots, v_m$ всегда отсчитываются против часовой стрелки. Внутренняя точка множества P – это точка множества P , которая не лежит на границе выпуклой оболочки $CH(P)$. Через $I(P)$ обозначим совокупность внутренних точек множества P . При индексации множества, состоящего из t точек, индексы отождествляются по модулю t . Пусть $Q \subset P$. Будем говорить, что Q содержит внутреннюю точку p множества P , если $p \in I(P) \cap \text{int } CH(Q)$, где $\text{int } CH(Q)$ – внутренность выпуклой оболочки множества Q , и для краткости будем писать $I^*(Q)$ вместо $I(P) \cap \text{int } CH(Q)$. Легко привести примеры, показывающие, что $I(Q) \neq I^*(Q)$. Через $i^*(Q) = |I^*(Q)|$ обозначим число внутренних точек множества P , содержащихся в Q . Если $i^*(Q) = k$, то будем говорить, что Q – “подмножество, содержащее в точности k внутренних точек множества P ” или, для краткости, “подмножество, содержащее в точности k внутренних точек”. Будем также говорить, что точечное множество Q находится в выпуклом положении или является выпуклым, если оно образует множество вершин некоторого точечного множества. Применяя эти определения, можно записать $t(k)$ следующим образом:

$$t(k) = \min\{s : |I(P)| \geq s \rightarrow \exists Q \subset P, i^*(Q) = |I(P) \cap \text{int } CH(Q)| = k, \text{ или } k+1, \text{ или } k+2\}.$$

Множество точек T называется *треугольником* и обозначается как $T = \triangle v_1 v_2 v_3$, если $V(T) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Внутренняя точка треугольника T называется (x, y) -*разделителем* треугольника T , если она разделяет T на три треугольника, содержащих $x \geq y \geq 0$ внутренних точек, соответственно. Через $H(ab; c)$ обозначим полуплоскость, ограниченную прямой линией ab так, что точка c лежит внутри полуплоскости. Множество точек P называется *дефицитным точечным множеством* $P(m, s, k)$, если $|V(P)| = m$, $|I(P)| = s$ и для любого $Q \subset P$ выполняются неравенства $i^*(Q) \neq k, k+1, k+2$.

3. Нижняя грань для $t(k)$. Пусть $k \geq 6$ – целое число. Представим дефицитное точечное множество $P(3, (3k-1)/2, k)$ для нечетного k (см. рис. 1), где

$$\begin{aligned} |V(P \setminus \{v_1\})| &= \frac{k-3}{2} + 4 & \text{при } i^*(P \setminus \{v_1\}) &= k-1, \\ |V(P \setminus \{v_2\})| &= \frac{k-1}{2} + 4 & \text{при } i^*(P \setminus \{v_2\}) &= k-2, \\ |V(P \setminus \{v_3\})| &= \frac{k-3}{2} + 4 & \text{при } i^*(P \setminus \{v_3\}) &= k-1, \end{aligned}$$

и дефицитное точечное множество $P(3, 3k/2, k)$ для четного k (см. рис. 2), где

$$|V(P \setminus \{v_i\})| = \frac{k-2}{2} + 4 \quad \text{при } i^*(P \setminus \{v_i\}) = k-1,$$

где $i = 1, 2, 3$. Таким образом, известно, что

$$t(k) \geq \frac{3k+1}{2} \quad \text{для нечетного } k, \quad \text{и} \quad t(k) \geq \frac{3k}{2} + 1 \quad \text{для четного } k.$$

4. Доказательство равенства $t(6) = 10$.

ЛЕММА 1 [1]. *Всякое плоское точечное множество, содержащее по крайней мере k внутренних точек, имеет выпуклое подмножество, содержащее от k до $\lfloor 3k/2 \rfloor$ внутренних точек.*

Из леммы 1 следует, что $t(k) = k$ при $1 \leq k \leq 5$.

Для доказательства равенства $t(6) = 10$ нам понадобится следующее свойство дефицитного точечного множества $P(3, 9, 6)$.

Рис. 1. k нечетное Рис. 2. k четное

ЛЕММА 2. Пусть P – дефицитное точечное множество $P(3, 9, 6)$, где $V(P) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Тогда P обладает следующими свойствами:

$$|V(P \setminus \{v_i\})| = 6 \quad \text{при} \quad i^*(P \setminus \{v_i\}) = 5,$$

где $i = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый (x, y) -разделитель множества $P = P(3, 9, 6)$ может быть либо $(5, 3)$ -разделителем, либо $(4, 4)$ -разделителем. Предположим, что P имеет $(5, 3)$ -разделитель. (В случае, когда все (x, y) -разделители множества P являются $(4, 4)$ -разделителями, результат не изменится.)

Пусть точка $u \in I(P)$ такая, что u является $(5, 3)$ -разделителем множества P , где

$$i^*(\Delta uv_2v_3) = 5 \quad \text{и} \quad i^*(\Delta v_1uv_3) = 3.$$

Если существует внутренняя точка $p \in I^*(\Delta v_1uv_3)$, лежащая в $H(v_2u; v_1)$, то $i^*(\Delta pv_2v_3) = 6$ или 7, или 8. Итак, три внутренних точки треугольника Δv_1uv_3 лежат в $H(v_2u; v_3)$. Тогда известно, что $|V(P \setminus \{v_1\})| = 6$ при $i^*(P \setminus \{v_1\}) = 5$, поскольку иначе $i^*(P \setminus \{v_1\}) = 6$ или 7, или 8. Предположим, что

$$V(P \setminus \{v_1\}) = \{u, v_2, v_3, w, x_1, x_2\}.$$

Тогда w является либо $(5, 3)$ -разделителем, либо $(4, 4)$ -разделителем множества P . Если $|V(P \setminus \{v_3\})| = 7$ или 8, то $i^*(P \setminus \{v_2\}) = 6$ или 7, или 8. Если $|V(P \setminus \{v_3\})| = 3$ или 4, или 5, то $i^*(P \setminus \{v_3\}) = 6$ или 7, или 8. Итак, $|V(P \setminus \{v_3\})| = 6$ при $i^*(P \setminus \{v_3\}) = 5$. Ясно, что $|V(P \setminus \{v_2\})| = 6$ при $i^*(P \setminus \{v_2\}) = 5$ (см. рис. 2 при $k = 6$).

Из существования множества $P(3, 9, 6)$ следует, что $t(6) \geq 10$. Чтобы доказать, что $t(6) \leq 10$, нам нужно доказать, что для любого точечного множества P при $|I(P)| \geq 10$ всегда существует подмножество $Q \subset P$ при $i^*(Q) = 6$ или 7 или 8. Для краткости в последующих доказательствах всегда предполагается, что всякий треугольник Δ при $i^*(\Delta) = 9$ является дефицитным точечным множеством $P(3, 9, 6)$, а (x, y) -разделители не рассматриваются при $x, y = 6$ или 7 или 8, поскольку иначе сразу получается искомое подмножество.

ЛЕММА 3. Если $10 \leq |I(P)| \leq 15$ и $|V(P)| = 3$, то существует подмножество

$$Q \subset P \quad \text{при} \quad i^*(Q) = 6 \text{ или } 7, \text{ или } 8.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V(P) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Приведем доказательство для $|I(P)| = 10$ (в случае $11 \leq |I(P)| \leq 15$ доказательства аналогичны).

Случай 1: множество P имеет $(9, 0)$ -разделитель. Предположим, что u_1 является $(9, 0)$ -разделителем, где $i^*(\Delta_{u_1 v_2 v_3}) = 9$. Напомним, что $\Delta_{u_1 v_2 v_3}$ – это дефицитное точечное множество $P(3, 9, 6)$. Пусть точка $u_2 \in I^*(\Delta_{u_1 v_2 v_3})$ такая, что $i^*(\Delta_{u_2 v_2 v_3}) = 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $u_2 \in H(v_1 u_1; v_3)$. Применяя лемму 2 к треугольнику $\Delta_{u_1 v_2 v_3}$, получим, что u_2 является вершиной треугольника $\Delta_{u_1 v_2 v_3} \setminus \{v_3\}$. Предположим, что

$$V(\Delta_{u_1 v_2 v_3} \setminus \{v_3\}) = \{v_2, u_2, u_3, x_1, x_2, u_1\}.$$

Если u_2 – $(9, 0)$ -разделитель множества P , то $u_3 \in H(v_1 u_2; v_2)$ и $i^*(\Delta_{v_1 v_2 u_3}) = 6$ или 7, или 8. Если u_2 – $(5, 4)$ -разделитель множества P , то $u_3 \in H(v_1 u_2; v_3)$ и $i^*(P \setminus \{v_3\}) = 6$ или 7, или 8.

Случай 2: всякий (x, y) -разделитель множества P является $(5, 4)$ -разделителем. Предположим, что u_1 – $(5, 4)$ -разделитель, где $i^*(\Delta_{u_1 v_2 v_3}) = 5$ и $i^*(\Delta_{v_1 u_1 v_3}) = 4$. Тогда $i^*(P \setminus \{v_1\}) = 5$ при $|V(P \setminus \{v_1\})| = 7$, поскольку иначе $i^*(P \setminus \{v_1\}) = 6$ или 7, или 8. Кроме того, $i^*(P \setminus \{v_2\}) = 4$ или 5 при $|V(P \setminus \{v_2\})| = 8$ или 7, поскольку иначе $i^*(P \setminus \{v_2\}) = 6$ или 7, или 8. Теперь легко определить подмножество, содержащее искомые внутренние точки.

ЛЕММА 4. Если

$$10 \leq |I(P)| \leq 13 \quad \text{и} \quad m = |V(P)| \geq 4,$$

то существует подмножество $Q \subset P$ при $i^*(Q) = 6$ или 7, или 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем простое доказательство равенства $|I(P)| = 10$ (в случае $11 \leq |I(P)| \leq 13$ доказательства аналогичны).

Триангулируем множество P , т.е. соединим вершину v_1 выпуклой оболочки с каждой из остальных вершин выпуклой оболочки, и получим $m - 2$ треугольника. Если существует треугольник Δ при $i^*(\Delta) = 6, 7, 8$ или 10, то наше утверждение выполнено. Если существует треугольник Δ при $i^*(\Delta) = 9$, то из леммы 2 следует, что искомое подмножество легко может быть найдено. Если существует треугольник Δ при $i^*(\Delta) \leq 4$, то желаемый результат легко получить, объединяя несколько смежных треугольников. Наконец, рассмотрим случай, когда существует треугольник Δ при $i^*(\Delta) = 5$. Ясно, что в этом случае легко можно определить подмножество, содержащее 6 или 7 или 8 внутренних точек.

Нам также понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 5 [1]. Пусть P – плоское точечное множество, имеющее $m \geq 3$ вершин и содержащее $s \geq 0$ внутренних точек. Тогда существует вершина v_i множества P такая, что множество $P' = P \setminus \{v_i\}$ имеет m' вершин и содержит s' внутренних точек и

(a) либо $m' = m - 1$ и $s' = s$,

(b) либо $m' = m + t$ и $s' = s - t - 1$, где $t = 0, 1, 2, \dots, \lfloor s/m \rfloor$.

ЛЕММА 6. Если $|V(P)| \geq 4$ и $|I(P)| = 14$ или 15, то существует подмножество $Q \subset P$ при $i^*(Q) = 6$ или 7 или 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|V(P)| \geq 4$, из леммы 5 следует существование собственного подмножества $P' \subset P$ при $10 \leq i^*(P') \leq i(P)$:

- если условие (а) выполняется, то $i^*(P') = 13$ или 14;
- если условие (b) выполняется, то $i^*(P') = |I(P)| - \lfloor \frac{|I(P)|}{4} \rfloor - 1 \geq 10$.

Тогда, применяя предыдущие результаты, получим подмножество $Q \subset P' \subset P$ при $i^*(Q) = 6$ или 7, или 8.

Аналогично доказывается следующий результат.

ЛЕММА 7. Если $|V(P)| \geq 3$ и $|I(P)| \geq 16$, то существует подмножество $Q \subset P$ при $i^*(Q) = 6$ или 7, или 8.

Теперь неравенство $t(6) \leq 10$ следует из предыдущих результатов, и доказательство для случая $t(6) = 10$ завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] D. Avis, K. Hosono and M. Urabe, *Discrete Math.*, **241**:1-3 (2001), 33–40. [2] T. Fevens, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Comput. Sci., **2866**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 152–158. [3] Хянглин Вей, Рен Динг, “О плоских точечных подмножествах с заданным числом внутренних точек”, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 752–756. [4] X. Wei, R. Ding, *Surveys on Discrete and Computational Geometry: Twenty Years Later*, Contemp. Math., **453**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 515–528. [5] X. Wei, R. Ding, *Discrete Comput. Geom.*, **42**:4 (2009), 640–653. [6] D. Avis, K. Hosono, M. Urabe, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Comput. Sci., **1763**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 57–64.

Хянглин Вей

Hebei University of Science and Technology, Китай

E-mail: wxlhebteu@126.com

Поступило

05.04.2011