Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбачев, Об инвариантных субримановых структурах на компактных однородных пространствах с дискретной стационарной подгруппой, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 821–829

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:42:17

Об инвариантных субримановых структурах на компактных однородных пространствах с дискретной стационарной подгруппой

В. В. Горбацевич

В статье изучаются инвариантные распределения на компактных однородных пространствах с дискретной стационарной подгруппой. Особое внимание уделено наличию на таких распределениях субримановой структуры и условию полной неголономности. Получено описание указанных однородных пространств, допускающих инвариантную вполне неголономную субриманову структуру.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10139

Однородное пространство M группы Ли G имеет вид G/H , где H – замкнутая подгруппа Ли в группе Ли G (стационарная подгруппа). При этом можно предполагать, что транзитивное действие группы Ли G на многообразии M локально эффективно. Это означает, что в подгруппе Ли H не содержится нормальных делителей группы Ли G , имеющих положительную размерность. В данной работе мы будем рассматривать в основном однородные пространства, стационарная подгруппа для которых дискретна. Их иногда называют специальными. Можно предложить более выразительное наименование – локально-групповые. Это название отражает тот факт, что в случае, когда стационарная подгруппа дискретна, однородное пространство в окрестности любой своей точки может быть естественно (и локально) отождествлено с транзитивной на нем группой Ли. В этом случае имеем $M = G/\Gamma$, где Γ – дискретная подгруппа в G . Более того, мы будем рассматривать только компактные однородные пространства. В этом случае подгруппу Γ называют кокомпактной или же решеткой (иногда – равномерной решеткой). Такие однородные пространства $M = G/\Gamma$ в последнее время часто используют для построения разного рода примеров и контрпримеров, связанных с самыми различными геометрическими структурами.

Пусть теперь на время M – совершенно произвольное гладкое многообразие размерности n . Гладким p -мерным распределением $\mathcal{P}$ на M называется гладкое сечение расслоения над M со слоем $Gr_{n,p}$ (грассмановым многообразием p -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$), ассоциированного с касательным расслоением над M .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00465а).

Другими словами, задается семейство p -мерных подпространств $\mathcal{P}_x$ (которые будем называть *листами* распределения) в касательных пространствах $T_x(M)$, гладко зависящее от точки $x \in M$. Часто распределения на многообразиях вводятся как объекты, двойственные к системам уравнений Пфаффа (задаваемым системами линейных дифференциальных форм).

Распределение $\mathcal{P}$ называется *голономным* (или *интегрируемым*), если интегрируема соответствующая ему система уравнений Пфаффа. Это означает, что существует разбиение многообразия M на p -мерные подмногообразия, касательные пространства к которым совпадают с элементами $\mathcal{P}_x$ распределения $\mathcal{P}$. Отметим, что при $p = 1$ (одномерное распределение) распределение всегда голономно, так как система Пфаффа здесь сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые всегда интегрируемы (получаем разбиение многообразия на интегральные линии) в силу теоремы Коши. Но при $p > 1$ существуют и неголономные распределения. Голономным распределениям в механике соответствуют конечные связи (задаваемые системами соотношений на координаты), а неголономным – дифференциальные связи (в которые входят не только координаты, но и их производные). Особый интерес представляют неголономные распределения, точнее вполне неголономные распределения. Для их определения вначале введем некоторые понятия.

Допустимым векторным полем на многообразии M с заданным на нем распределением $\mathcal{P}$ называется такое векторное поле, векторы которого в каждой точке x многообразия M принадлежат листам $\mathcal{P}_x$. Коммутатор допустимых векторных полей уже не всегда допустим. Если же такой коммутатор тоже всегда допустим, то распределение называется *инволютивным*. Классическая теорема Фробениуса утверждает, что голономность распределения эквивалентна его инволютивности (необходимость этого условия очевидна).

Распределение $\mathcal{P}$ называется *вовне неголономным*, если допустимые векторные поля и их всевозможные коммутаторы в каждой точке $x \in M$ заполняют все касательное пространство $T_x(M)$. Впервые вполне неголономные распределения рассматривал Рашевский [1] (и, позже, независимо от него, Чжоу [2]). Поэтому будет естественно называть многообразие с выделенным вполне неголономным распределением пространством Рашевского. В [1] было доказано, что в таких пространствах любые две точки многообразия M можно соединить кусочно гладкой допустимой кривой (т.е. кривой, касательные векторы к которой лежат в листах рассматриваемого распределения).

Большинство распределений на фиксированном многообразии вполне неголономны (см. обзор [3]). Классический пример неголономного распределения на $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ – это распределение, задаваемое уравнением Пфаффа

$$x \, dy + dz = 0$$

(и соответствующее контактной структуре на $\mathbb{R}^3$).

Если на многообразии M действует некоторая группа (например, конечная группа или группа Ли), то естественно рассматривать инвариантные относительно этого действия распределения. Это часто делается, например, в теории управления (см., например, обзор [3]). При этом в качестве многообразия M обычно берется группа Ли (компактная или некомпактная) или однородное пространство (причем обычно рассматривают только однородные пространства компактных групп Ли). Мы в данной статье будем изучать инвариантные распределения на компактных однородных

пространствах произвольных групп Ли с дискретной (и, обычно, бесконечной) стационарной подгруппой. Условие компактности многообразия здесь представляется вполне естественным.

Как указано в заголовке статьи, она посвящена изучению субримановых структур на однородных пространствах специального вида. Коротко говоря, субриманова структура – это римановы структуры на всех листах $\mathcal{P}_x$ некоторого распределения $\mathcal{P}$, гладко зависящие от точки многообразия. Отметим, что при изучении инвариантных субримановых структур на компактных однородных пространствах мы при $p = 0$ приходим к произвольным компактным однородным пространствам (о которых см., например, обзор [4]), а при $p = \dim(M)$ – к римановым однородным пространствам (о которых см. [5]). Так что рассмотрение субримановых структур включает эти два важных случая и дает возможность существенно расширить область исследования.

Как нетрудно понять, инвариантное распределение $\mathcal{P}$ на однородном пространстве вида G/Γ (т.е. с дискретной стационарной подгруппой и потому с тривиальной стационарной подалгеброй Ли) задается подпространством $W \subset \mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G , инвариантным относительно естественного действия подгруппы Γ (порожденного присоединенным действием группы Ли G на своей алгебре Ли). Оно вполне неголономно тогда и только тогда, когда подпространство W порождает $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли, другими словами, любой элемент из $\mathfrak{g}$ выражается в виде линейной комбинации слагаемых, получаемых коммутированием некоторых элементов из W . И, наконец, очевидно, что на этом распределении можно задать субриманову структуру тогда и только тогда, когда действие подгруппы Γ на W ортогонально (т.е. сохраняет некоторое скалярное произведение).

В данной статье будут рассмотрены некоторые примеры инвариантных распределений на компактных однородных пространствах. Такого рода примеры интересны при изучении различных геометрических структур на многообразиях. В последние годы удобными модельными многообразиями для построения интересных геометрических примеров и контрпримеров служат как раз компактные однородные пространства различных групп Ли, стационарные подгруппы для которых дискретны. Мы докажем в этой работе один отрицательный результат, показывающий, что для рассматриваемых здесь однородных пространств инвариантных вполне неголономных распределений, кроме простейших (задаваемых на компактных группах Ли или их факторах по конечным подгруппам), практически не существует. В дальнейшем автор предполагает рассмотреть более общие классы компактных однородных пространств в том же направлении.

Рассмотрим некоторые примеры инвариантных распределений и субримановых структур на однородных пространствах с дискретной стационарной подгруппой.

ПРИМЕР 1. Если W – подпространство в центре $Z(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то W инвариантно относительно действия любой подгруппы группы Ли G , в том числе и относительно Γ . Поэтому на многообразии G/Γ это подпространство W задает инвариантное распределение. Более того, это распределение допускает субриманову структуру, так как действие подгруппы Γ будет, конечно, ортогональным (ибо оно тривиально). Отметим, что в этой конструкции все инвариантные распределения будут голономны (интегрируемы), так как подпространство W является, очевидно, подалгеброй Ли в $\mathfrak{g}$.

Тем самым, получается, что на однородном пространстве G/Γ существуют инвариантные субримановы структуры любой размерности, не превосходящей $\dim Z(g)$. Но если центр алгебры Ли g тривиален, то эта конструкция не дает ничего интересного.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим солвмногообразия (однородные пространства разрешимых групп Ли) вида R/Γ , где R – разрешимая односвязная группа Ли). Пусть W – идеал в алгебре Ли r группы Ли R . Тогда, очевидно, W задает на R/Γ инвариантное распределение. Известно (см., например, [6; гл. I, 5.3]), что в разрешимой вещественной алгебре Ли существуют идеалы размерности 1 или 2 (а потому и многих больших размерностей). В результате получаем возможность строить на солвмногообразиях вида R/Γ инвариантные распределения. Но субриманову структуру они допускают далеко не всегда.

ПРИМЕР 3. Если M – это на самом деле некоторая компактная группа Ли K , то на ней существует много субримановых структур, причем и вполне неголономных. А именно, в качестве W можно взять любое подпространство в k – алгебре Ли группы Ли K . Так как стационарная подгруппа в данном случае тривиальна, то такое подпространство всегда задает инвариантное распределение на K . На K естественным образом вводится субриманова структура: достаточно задать на W некоторое скалярное произведение.

Как известно, в алгебре Ли любой компактной полупростой группы Ли всегда существуют двумерные подпространства (или просто пары элементов), ее порождающие. Поэтому на такой K существуют инвариантные вполне неголономные субримановы структуры любой размерности из отрезка $[2, \dim(k)]$. Ясно, что одномерное распределение всегда голомерно (оно задается одномерным подпространством, являющимся одномерной подалгеброй Ли).

Эту конструкцию можно обобщить. Рассмотрим однородное пространство M вида $K \times M_1$, где K – некоторая компактная полупростая группа Ли, а M_1 – некоторое компактное однородное пространство группы Ли G_1 . На M транзитивна группа Ли $K \times G_1$. В алгебре Ли g группы Ли G возьмем подпространство $W = c + g_1$, где c – подпространство в компактной полупростой алгебре Ли k , ее порождающее. Тогда очевидно, что подпространство W определяет на компактном однородном пространстве M инвариантное вполне неголономерное распределение, причем на нем можно ввести субриманову структуру. Такую структуру можно называть тривиальным расширением субримановой структуры на K . Как будет показано ниже, этот пример – практически самый общий (с точностью до диффеоморфизма) для компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой, имеющих вполне неголономерные субримановы структуры (причем в качестве M_1 берется тор).

ПРИМЕР 4. Рассмотрим группу Ли G и содержащуюся в ней решетку

$$G = T^n \cdot \mathbb{R}^{2n} \supset \Gamma = \mathbb{Z}^{2n}, \quad M = G/\Gamma$$

(здесь T^n – тор, который с помощью гомоморфизма ϕ естественным образом отождествляется с компактной подгруппой Ли в $Gl_{2n}(\mathbb{R})$). При $n = 1$ получаем $E(2)$ – группу изометрий евклидовой плоскости. Положив $W = \mathbb{R}^n$, получим инвариантное распределение на G/Γ . На этом распределении существует, как легко понять, и субриманова структура. Но это распределение, конечно, голомерно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M = G/\Gamma$ – компактное однородное пространство группы Ли G с дискретной стационарной подгруппой Γ . Если на G/Γ существует инвариантная вполне интегрируемая субриманова структура, то группа Ли G локально изоморфна прямому произведению $K \times A$ компактной полупростой группы Ли K и абелевой группы Ли A (изоморфной $\mathbb{R}^m$ при некотором $m \geq 0$).

Обратно, для произвольных компактной группы Ли K и связной абелевой группы Ли A можно найти такую решетку Γ в группе Ли $G = K \times A$, что на компактном однородном пространстве G/Γ существует инвариантная вполне неголономная субриманова структура.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подпространство $W \subset g$ задает некоторую вполне неголономную инвариантную субриманову структуру на M . Мы можем считать, что группа Ли G односвязна. Рассмотрим ее разложение Леви $G = S \cdot R$ (где R – радикал, а S – полупростая часть в группе Ли G).

Полупростая группа S может быть разложена в прямое произведение $S = S_c \times S_n$ компактной полупростой группы Ли S_c и полупростой группы Ли S_n , не имеющей компактных компонент (ее иногда называют *некомпактной компонентой* полупростой группы Ли S). Имеется естественно действие группы Ли S_c на радикале (индуцированное действием группы Ли G на самой себе сопряжениями). Вообще говоря, ядро этого действия группы Ли S_c может быть нетривиальным и даже иметь положительную размерность. Первым шагом нашего доказательства теоремы будет сведение его к случаю, когда указанное действие некомпактного фактора имеет только конечное ядро (естественно, оно может быть и тривиальным).

Пусть S^* – связная компонента единицы ядра указанного выше действия группы Ли S_c на R . Тогда, как легко понять, S^* полупроста и является связным компактным нормальным делителем группы Ли G . Рассмотрим естественный эпиморфизм $\alpha: G \rightarrow G/S^*$ и положим

$$G_1 = G/S^*, \quad \Gamma_1 = \Gamma/\Gamma \cap S^*, \quad M_1 = G_1/\Gamma_1.$$

Тогда Γ_1 – решетка в связной и односвязной группе Ли G_1 , а однородное пространство M_1 имеет дискретную стационарную подгруппу и компактно. При этом действие некомпактной компоненты полупростой части группы Ли G_1 на ее радикале имеет не более чем конечное ядро. Далее, через W_1 обозначим образ подпространства $W \subset g$ (задающего инвариантную вполне неголономную субриманову структуру на M) при гомоморфизме алгебр Ли, индуцированном указанным выше гомоморфизмом α групп Ли. Ясно, что это подпространство $W_1 \subset g_1$ естественным образом задает на однородном пространстве M_1 вполне неголономную инвариантную субриманову структуру. Если мы докажем, что группа Ли G_1 абелева, то отсюда легко будет вытекать, что исходная группа Ли G компактна имеет указанную в формулировке теоремы структуру и теорема будет доказана. Тем самым, от рассмотрения однородного пространства M переходим к рассмотрению M_1 и потому можем предполагать далее, что естественное действие группы Ли S_c на R имеет конечное ядро.

Пусть N – нильрадикал группы Ли G . Его естественное действие (с помощью присоединенного представления Ad_G группы Ли G на ее алгебре Ли) на алгебре Ли g унитарно. Через N^* обозначим алгебраическое замыкание образа N при присоединенном представлении Ad_G .

Образ подгруппы Γ при присоединенном представлении Ad_G сохраняет подпространство $W \subset g$. Но тогда и алгебраическое замыкание этого образа тоже сохраняет W . В силу леммы 3.1 из [7] в этом замыкании содержится унитарный радикал алгебраического замыкания подгруппы $\text{Ad}_G(G)$ (именно здесь – для использования [7] – нам нужен тот факт, что действие S_c на R имеет конечное ядро). Но очевидно, что этот унитарный радикал содержит подгруппу N^* . Следовательно, действие нильрадикала N сохраняет подпространство W (действуя на нем унитарно).

С другой стороны, из существования на распределении, задаваемом подпространством $W \subset g$, субримановой структуры следует, что действие подгруппы Γ на W ортогонально. Ортогональным будет и действие на W алгебраического замыкания образа $\text{Ad}_G(\Gamma)$ при присоединенном представлении. Но тогда в силу сказанного выше и действие нильрадикала N на W будет ортогонально. Но оно и унитарно, а потому должно быть тривиальным. Итак, мы доказали, что нильрадикал N на W действует тривиально.

Так как рассматриваемое нами инвариантное распределение вполне неголономно, то подпространство W порождает алгебру Ли g . Но тогда действие N на всей алгебре Ли g будет тривиально. Это означает, что нильрадикал N группы Ли G централен, т.е. содержится в центре $Z(G)$ группы Ли G . Теперь нам понадобится одно простое утверждение из теории алгебр Ли. Для полноты изложения мы приведем и доказательство этого простого утверждения.

ЛЕММА. *Если нильрадикал некоторой алгебры Ли централен, то она есть прямая сумма полупростой части и абелева идеала.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение Леви $g = s + r$ алгебры Ли g (r – радикал, а s – полупростая часть в g). По условию $[g, n] = \{0\}$ (где n – нильрадикал в g). Рассмотрим присоединенное действие r на g . Индуцированные им действия на s и на r/n тривиальны (последнее – в силу абелевости r/n). Но и действие r на n тривиально (по условию леммы). В результате получаем, что действие r на g нильпотентно. Но это означает, что радикал r в данном случае совпадает с нильрадикалом. Поэтому, в частности, этот радикал абелев. Так как радикал еще и централен, то получаем, что разложение Леви для алгебры Ли g прямое. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. В силу этой леммы получаем, что $g = s + a$ – прямая сумма полупростой алгебры Ли s и абелева радикала a . При этом в силу сказанного выше мы можем считать, что в s вообще нет компактных факторов (так действие s тривиально на a). Но тогда, как известно (см., например, [7]), подгруппа $\Gamma/\Gamma \cap A$ – равномерная дискретная подгруппа в полупростой группе Ли S . Рассмотрим естественный эпиморфизм $\mu: g \rightarrow s$, индуцированный естественным эпиморфизмом групп Ли $G \rightarrow S$ с ядром R . Подпространство $\mu(W)$ должно быть инвариантно относительно сопряжений элементами подгруппы $\Gamma/\Gamma \cap A$. Но тогда оно будет идеалом в s (см. [8]). Так как подпространство W порождает g , то подпространство $\mu(W)$ должно порождать s . Но это возможно, только если $\mu(W) = s$. Отсюда в силу строения алгебры Ли g , указанного выше, получаем, что подпространство W инвариантно относительно действия S , т.е. имеем $[s, W] \subset W$. Но, с другой стороны,

$$[s, W] = [s, W + a] = [s, s] = s$$

(так как s в нашем случае является идеалом в g , причем полупростым) и потому $W \supset s$. Далее, если подпространство W не содержит a , то оно не может порождать алгебру Ли g . Поэтому должно быть $W \supset a$ и потому $W = g$.

Действие решетки D на W должно быть ортогональным, поэтому действие полупростой группы S тоже ортогонально (см. выше) и потому полупростая группа Ли S должна быть компактна. Но тогда получаем, что $S = \{0\}$, ибо мы предположили, что G не имеет компактных факторов.

Тем самым доказано, что в исходной группе Ли G полупростая часть компактна и является нормальным делителем, фактор по которому абелев. Но тогда для группы Ли G , если она односвязна (что мы можем всегда предполагать), разложение Леви прямое и потому эта группа Ли есть прямое произведение компактной полупростой группы Ли и односвязной абелевой группы Ли. Если же группа Ли G не односвязна, то она локально изоморфна своей универсальной накрывающей, разлагающейся в указанное только что прямое произведение.

Обратное утверждение было фактически доказано в примере 2 выше. Теорема 1 доказана.

В силу доказанной теоремы 1 в поисках примеров инвариантных вполне неголономных субримановых структур на компактных однородных пространствах следует рассматривать компактные однородные пространства, стационарная подгруппа которых не является дискретной. Автор имеет намерение продолжить свои исследования в этом направлении.

В заключение опишем связанное с темой доказанной нами теоремы 1 строение компактных однородных пространств групп Ли вида $K \times A$ с дискретной стационарной подгруппой. Начнем с описания одной конструкции.

Пусть K – произвольная полупростая компактная и односвязная группа Ли, а A – некоторая односвязная абелева группа Ли (изоморфная $\mathbb{R}^n$ при некотором $n \geq 0$). Положим $G = K \times A$. Далее, пусть T – некоторый максимальный тор в K (т.е. максимальная компактная связная абелева подгруппа). При $A = \mathbb{R}^n$ рассмотрим решетку $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Выберем некоторый гомоморфизм $\alpha: \mathbb{Z}^n \rightarrow T$ (совершенно произвольный) и через Γ_α обозначим его график ($\Gamma_\alpha \subset T \times A \subset K \times A$). Получаем подгруппу Γ_α в G , причем, очевидно, дискретную и с компактным фактор-пространством G/Γ_α . Это однородное пространство задается тройкой (K, A, α) . Если гомоморфизм α тривиален, то это однородное пространство диффеоморфно $K \times T^n$, где T^n – n -мерный тор. В частности, оно диффеоморфно компактной группе Ли (но не обязательно полупростой). В общем случае (при произвольном α) построенное нами выше однородное пространство можно рассматривать как “скрученный аналог” компактной группы Ли.

ТЕОРЕМА 2. Пусть M – компактное однородное пространство односвязной группы Ли, полупростая часть которой компактна, а радикал централен (и потому абелев). Тогда выполнены следующие утверждения:

- 1) существует однородное пространство M_1 , конечнолистно накрывающее M и изоморфное (как однородное пространство) некоторому “скрученному аналогу” компактной группы Ли;
- 2) существует многообразие, конечнолистно накрывающее M и диффеоморфное компактной группе Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с доказательства пункта 1).

Пусть $M = G/\Gamma$, где $G = K \times A$ – прямое произведение односвязной полупростой группы Ли K и односвязной абелевой группы Ли A , а Γ – решетка в G . Рассмотрим пересечение $K \cap \Gamma$ – это конечный нормальный делитель решетки Γ , причем фактор-группа по нему абелева (так как изоморфна подгруппе в A). Поэтому решетка Γ почти абелева. Рассмотрим проекцию G на K и образ подгруппы Γ при этой проекции. Образ этот почти абелев, и его замыкание – компактная (хотя, возможно, несвязная) подгруппа Ли в K . Связная компонента единицы этого замыкания – некоторый тор, и потому она содержится в некотором максимальном торе T . Поэтому $\Gamma_1 = \Gamma \cap (T \times A)$ – подгруппа конечного индекса в Γ . Положим $M_1 = G/\Gamma_1$; это однородное пространство конечнолистно покрывает исходное однородное пространство G/Γ . Как нетрудно видеть, M_1 – это как раз пример “скрученного аналога” компактной группы Ли, что и завершает доказательство пункта 1) теоремы 2.

Переходим к доказательству пункта 2). В силу сказанного выше мы можем считать, что G – группа Ли вида $K \times \mathbb{R}^n$ ($A = \mathbb{R}^n$), а решетка Γ содержится в абелевой подгруппе Ли $T \times \mathbb{R}^n \subset G$, где T – некоторый максимальный тор в K . Наш план доказательства пункта 2) таков: мы деформируем решетку Γ (или ее подгруппу конечного индекса) в решетку, целиком лежащую в $\mathbb{R}^n$. При деформации соответствующее фактор-пространство по решетке с точностью до диффеоморфизма неизменно, что и даст нам требуемый диффеоморфизм исходного однородного пространства (или пространства, его конечнолистно покрывающего) с компактной группой Ли. Переходим к реализации этого плана.

Снова рассмотрим пересечение $\Gamma \cap T$ – это конечная подгруппа в конечнопорожденной (в силу того, что многообразие G/Γ компактно) почти абелевой группе Ли Γ . При этом фактор-группа $\Gamma/\Gamma \cap T$, будучи подгруппой в $\mathbb{R}^n$, не имеет кручения. Поэтому в Γ существует подгруппа Γ_* конечного индекса, изоморфная $\mathbb{Z}^n$, причем можно считать, что при естественном эпиморфизме $\alpha: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ эта подгруппа проектируется в $\mathbb{Z}^n$ (нужно только подходящим образом выбрать базис в $\mathbb{R}^n$ и эту подгруппу). Построим деформацию этой подгруппы Γ_* в подгруппу группы Ли $\mathbb{R}^n$.

Для этого рассмотрим некоторый базис $\{e_i\}$ в $\mathbb{Z}^n$. Элементы e_i представим в виде пар (a_i, b_i) , где $a_i \in T$, $b_i \in \mathbb{R}^n$. Легко понять, что элементы b_i сами порождают решетку в $\mathbb{R}^n$.

Так как тор T связан, то рассмотрим непрерывные кривые $a_i(t)$, соединяющие a_i с единичным элементом $e \in T$. Эти кривые индуцируют непрерывную деформацию $(a_i(t), b_i)$ решетки Γ_* , в результате которой мы получаем элементы из $\mathbb{R}^n$, порождающие решетку в $\mathbb{R}^n$. Итак, мы получили искомую деформацию некоторой подгруппы конечного индекса в Γ . Отметим, что переход к подгруппе конечного индекса в Γ эквивалентен переходу к компактному однородному пространству с дискретной стационарной подгруппой, конечнолистно покрывающему G/Γ .

Осуществим второй шаг описанного выше плана. Деформация решетки в группе Ли порождает (возможно, после перехода к подгруппе конечного индекса в решетке) диффеоморфизм соответствующих однородных пространств [8]. Поэтому с точностью до конечнолистного накрытия исходное однородное пространство G/Γ диффеоморфно однородному многообразию вида $K \times (\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n)$, т.е. прямому произведению компактной группы Ли G на n -мерный тор. Это завершает доказательство пункта 2), а с ним и всей теоремы 2.

Заметим, что условие односвязности транзитивной группы Ли в этой теореме 2 не очень существенно, но упрощает изложение. Отметим также следующее различие

утверждений в пунктах 1) и 2) теоремы 2: в пункте 1) говорится об однородных пространствах, а в пункте 2) – об однородных многообразиях (многообразиях, на которых существует транзитивное действие группы Ли, но само это действие не фиксируется).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. К. Рашевский, “О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией”, *Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем.*, **3:2** (1938), 83–94.
- [2] W. L. Chow, “Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung”, *Math. Ann.*, **117** (1940), 98–105.
- [3] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.
- [4] В. В. Горбачевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Группы Ли и алгебры Ли – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240.
- [5] Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982.
- [6] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*. Гл. 1–3. *Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли*, Элементы математики, Мир, М., 1976.
- [7] G. D. Mostow, “Arithmetic subgroups of groups with radical”, *Ann. of Math.* (2), **93:3** (1971), 409–438.
- [8] G. D. Mostow, “On the topology of homogeneous spaces of finite measure”, *Symp. Math.*, **16**, Acad. Press, London, 1975, 375–398.

В. В. Горбачевич

Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского (МАТИ),
г. Москва

E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступило

04.09.2012