Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Вероятностный подход к задаче о дефектах допустимых множеств в решетке, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 910–916

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1014>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:26:00

УДК 511.9+519.112.71

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О ДЕФЕКТАХ ДОПУСТИМЫХ МНОЖЕСТВ В РЕШЕТКЕ

А. М. Райгородский

В настоящей работе для достаточно широкого класса множеств получены новые оценки величины дефекта допустимого множества в решетке.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ – n -мерная решетка в евклидовом пространстве, содержащая начало координат O . Пусть, кроме того, Λ содержит решетку целых чисел $\mathbb{Z}^n$ в качестве подрешетки. Рассмотрим репер $\mathcal{E} = O, e_1, \dots, e_n$, состоящий из начала координат и из единичных ортов $e_1, \dots, e_n$. Понятно, что $\mathcal{E} \subset \Lambda$. Определим величину f как максимальное число, для которого существует некоторая подсистема векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_f}$ из репера $\mathcal{E}$, дополнимая до базиса в решетке Λ . Величину $d(\mathcal{E}; \Lambda) = n - f$ мы будем называть *дефектом репера $\mathcal{E}$ относительно решетки Λ* . Иными словами, $d(\mathcal{E}; \Lambda)$ есть минимальное число векторов, которые необходимо удалить из репера с тем, чтобы оставшаяся система векторов оказалась дополнимой до базиса решетки Λ .

Рассмотрим теперь произвольную последовательность множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Omega_{\mathcal{E}}^n \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую следующим условиям.

УСЛОВИЕ 1. Множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n \subset [-1, 1]^n$ для всех $n \geq 1$.

УСЛОВИЕ 2. Имеет место вложение $\pm \mathcal{E} \subset \Omega_{\mathcal{E}}^n$ для всех $n \geq 1$.

УСЛОВИЕ 3. Сечение множества $\Omega_{\mathcal{E}}^n$ k -мерным координатным подпространством $\mathcal{R}_{i_1, \dots, i_k}$, которое отвечает координатам $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, совпадает с $\Omega_{\mathcal{E}}^k$ для всех значений $k \leq n$ и $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Назовем множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n$ *допустимым в решетке Λ* , если $\Omega_{\mathcal{E}}^n \cap \Lambda = \{O, \pm e_1, \dots, \pm e_n\}$. В случае, когда множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n$ допустимо в решетке Λ , величина дефекта репера $\mathcal{E}$ относительно решетки Λ называется *дефектом допустимого множества $\Omega_{\mathcal{E}}^n$ в решетке Λ* и обозначается $d(\Omega_{\mathcal{E}}^n; \Lambda)$. Определим теперь две величины, зависящие только от размерности n и рассматриваемого множества $\Omega_{\mathcal{E}}^n$:

$$d_n(\Omega_{\mathcal{E}}^n) = \max_{\Lambda} d(\Omega_{\mathcal{E}}^n; \Lambda), \quad d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n) = \widetilde{\max}_{\Lambda} d(\Omega_{\mathcal{E}}^n; \Lambda).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00357, № 00-15-96109.

Здесь в определении величины $d_n(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$ максимум берется по всем решеткам Λ , которые удовлетворяют указанным выше условиям, а в определении величины $d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$ предполагается, кроме того, что фактор-группа $\Lambda/\mathbb{Z}^n$ циклическая, т.е. найдется вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n$ такой, что $\Lambda = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{Z}}$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим последовательность множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$, каждый член которой имеет вид

$$\Omega_{\mathcal{E}}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_1|^{\alpha} + \dots + |x_n|^{\alpha} \leq 1\}.$$

(Здесь $\alpha > 0$ – некоторая произвольная константа.) Ясно, что для такой последовательности множеств выполнены все условия 1–3. Заметим, что, в частности, при $\alpha = 2$ множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n = \mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$ есть единичный шар, а при $\alpha = 1$ множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ есть единичный октаэдр. Эти два частных случая были рассмотрены в работах [1] и [2], где для величин $d_n(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n)$, $d_n(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n)$, $d_n^*(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n)$ и $d_n^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n)$ были получены точные по порядку оценки. Отметим также, что для случая малых размерностей сходные задачи рассматривались в работах [3]–[8].

ПРИМЕР 2. Рассмотрим последовательность множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\Omega_{\mathcal{E}}^n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : N^{n-1} \prod_{i=1}^n \max \left\{ \frac{1}{N}, |x_i| \right\} \leq 1 \right\}.$$

(Здесь мы считаем, что $N \in \mathbb{N}$ и $N \geq 2$.) Таким образом, $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$ – это последовательность так называемых n -мерных гиперболических крестов. Нетрудно видеть, что и в этом случае выполнены условия 1–3.

Основной целью настоящей работы является получение нижних оценок величины $d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$ для достаточно широкого класса последовательностей множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$. Тем самым результаты статьи обобщают результаты работы [1]. Заметим, что в работе [9] были также получены некоторые обобщения результатов работы [1]. При этом если в [9] доказательства соответствующих теорем существенно опирались на некоторую эффективную вспомогательную конструкцию, то в настоящей работе доказательства результатов будут носить чисто вероятностный характер, что позволит независимым образом построить обобщения, принципиально отличные от ранее предложенных. Так существенную роль при оценке величины $d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$ будут играть подсчеты средних значений, возникающих в задаче о покрытии (см. [10]–[13]) и в геометрии чисел (см. теорему Минковского–Главки в [14], [15], а также [16]).

2. Формулировки результатов. Из результатов, полученных в работах [1] и [2], вытекает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Существуют абсолютные постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$ такие, что имеют место оценки:*

$$\begin{aligned} \max\{d_n^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n), d_n^*(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n)\} &\leq \frac{c_1 n (\log \log n)^2}{\log n}, \\ \min\{d_n^*(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n), d_n^*(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n)\} &\geq \frac{c_2 n (\log \log n)^2}{\log n}, \quad \min\{d_n(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n), d_n(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n)\} \geq n - \frac{c_3 n}{\log n}. \end{aligned}$$

В недавно выполненной работе автора [9] при некоторых достаточно сложных ограничениях, наложенных на последовательность множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$, были получены верхние и нижние оценки величины $d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$. При этом каждой последовательности множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$ ставились в соответствие два набора параметров: с одной стороны, определялся набор параметров $k, n = n(k)$ (размерность) и f , причем величина f строилась алгоритмически в соответствии с некоторыми комбинаторными условиями, а с другой стороны, рассматривались параметры n' (размерность), k' и s' (подробности см. в [9]). С использованием этих параметров и некоторых ограничений, наложенных на них, была доказана

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место неравенства:*

$$d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n) \gg \frac{n}{k} \log(f+1), \quad d_{n'}^*(\Omega_{\mathcal{E}}^{n'}) \ll \frac{n'}{k'} \log \frac{s'k'}{n'}.$$

(Здесь последнее неравенство выполнено только для выпуклых O -симметричных множеств.)

В частности, в [9] было показано, что результаты теоремы 1 могут быть получены в качестве следствия из теоремы 2 при $\Omega_{\mathcal{E}}^n = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ и при $\Omega_{\mathcal{E}}^n = \mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n$ соответственно.

Отметим также, что значение величины $d_4(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n)$ было найдено в [4], величина $d_5(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n)$ была подсчитана в [6], а результаты, касающиеся определения величины $d_n(\mathcal{B}_{\mathcal{E}}^n)$ при $n \leq 8$, следуют из [7] и [8].

Перейдем теперь непосредственно к формулировке основного результата настоящей работы. Для этого нам потребуется ввести некоторые вспомогательные параметры. Зафиксируем произвольную последовательность множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям 1–3. Предположим, что этой последовательности множеств можно сопоставить некоторую последовательность $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$ положительных действительных чисел, обладающую следующими свойствами.

Свойство 1. Функция $v(n)$ строго монотонно возрастает, причем $v(n) \geq n$ при $n \geq n_0$.

Свойство 2. Найдется абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для всякого достаточно большого натурального числа k , для величины $n = \lfloor e^{v(k)/c} \rfloor$ и для натурального s такого, что $v(n)/(c \log n) \ll s \leq v(n)/(c \log n)$, выполнено неравенство

$$(\text{card}(\Omega_{\mathcal{E}}^t \cap \Lambda_{m_1, \dots, m_t})) \left(\frac{n+s}{n-1} \right)^t e^{v(t)/c} < \frac{1}{n^3} (\det \Lambda_{m_1, \dots, m_t})^{-1}.$$

(Здесь $k \leq t \leq n$, а $\Lambda_{m_1, \dots, m_t}$ — это произвольная решетка вида

$$\Lambda_{m_1, \dots, m_t} = \left\langle \left(\frac{1}{m_1}, 0, \dots, 0 \right), \dots, \left(0, \dots, 0, \frac{1}{m_t} \right) \right\rangle_{\mathbb{Z}},$$

где, в свою очередь, $m_i \in \mathbb{N}$ и $m_i \geq n$ для всех $i = 1, \dots, t$.)

СВОЙСТВО 3. Пусть c, k, n и s такие же, как в свойстве 2. Тогда

$$\frac{1}{C_{C_n^s}^s} \sum_{t=k+1}^n C_n^t \sum_{i=0}^{r_t} C_{C_t^k}^{[v(t)/(c \log n)]+1+i} C_{C_n^k - C_t^k}^{s-[v(t)/(c \log n)]-1-i} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Здесь $r_t = s - [v(t)/(c \log n)] - 1$.

СВОЙСТВО 4. Те же параметры c, k, n и s удовлетворяют следующим асимптотическим соотношениям:

$$n \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad \log \frac{sk}{n} \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad \log \frac{sk}{n} = o(k).$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. Для произвольной последовательности множеств $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям 1–3, и произвольной последовательности положительных чисел $\{v(n)\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей свойствам 1–4, имеет место асимптотическая оценка

$$d_{n(k)}^*(\Omega_{\mathcal{E}}^{n(k)}) \gg \frac{n(k)}{k} \log \frac{s(k)k}{n(k)}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Заметим, что в случае, когда всякое множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n$ из рассматриваемой последовательности измеримо по Жордану и $V(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$ – его объем, в качестве фигурирующей в условиях теоремы 3 функции $v(n)$ часто бывает удобно брать величину $v(n) = -\log V(\Omega_{\mathcal{E}}^n)$. Отметим, кроме того, еще раз, что в то время, как доказательство теоремы 2 носит в существенной степени конструктивный характер, доказательство теоремы 3 полностью вероятностное. Заметим также, что нетрудно привести пример, когда работает теорема 2, а теорема 3 неприменима. А именно, применяя теорему 2 к последовательности гиперболических крестов $\{\Omega_{\mathcal{E}}^n\}_{n=1}^{\infty}$ с достаточно большим N (см. пример 2), можно получить оценку $d_n^*(\Omega_{\mathcal{E}}^n) \gg n/\log n$. При этом нетрудно видеть, что к такой последовательности теорема 3 неприменима. С другой стороны, задача проверки условий теоремы 3 значительно менее трудоемкая, чем задача проверки условий теоремы 2. Тем самым, основным преимуществом теоремы 2 является ее конструктивность, в то время как в теореме 3 условия являются более компактными, а доказательство менее сложным.

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется некоторая комбинаторная лемма.

3. Комбинаторная лемма. Пусть $\mathfrak{R}_n = \{1, \dots, n\}$ – множество, состоящее из n элементов. Обозначим через $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ произвольную совокупность подмножеств $M_j, j = 1, \dots, s$, множества $\mathfrak{R}_n$. Подмножество $S \subset \mathfrak{R}_n$ называется *системой общих представителей* (с.о.п.) для совокупности множеств $\mathcal{M}$, если $S \cap M_j \neq \emptyset$ для всех $j = 1, \dots, s$. Положим $\tau = \tau(\mathcal{M}) = \min_S \text{card } S = \text{card } \Sigma$. (Здесь минимум берется по всем возможным с.о.п. S для совокупности множеств $\mathcal{M}$.) Множество Σ , определяющееся по заданной совокупности $\mathcal{M}$, вообще говоря, неоднозначно, естественно называть *наименьшей с.о.п.* для $\mathcal{M}$. *Максимальным τ* мы назовем величину $Z(n, k, s) = \max_{\mathcal{M}} \tau(\mathcal{M})$, где максимум берется по всем совокупностям множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ таким, что $\text{card } M_j \geq k, j = 1, \dots, s$. Различные

оценки и асимптотические формулы для величины $Z(n, k, s)$ получены, в частности, в работах [11] и [12] (см. также имеющиеся в этих работах ссылки).

Пусть $c > 0$ – некоторая произвольная постоянная, а $v(n)$ – некоторая строго монотонно возрастающая функция такая, что $v(n) \geq n$ при $n \geq n_0$. Тогда совокупность множеств $\mathcal{M} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ называется *равномерно расположенной* (р.р.) в $\mathfrak{R}_n$ с функцией $v(n)$ и константой c , если для любого t такого, что $1 \leq t \leq n$, и для всякого множества $R \subset \mathfrak{R}_n$, $\text{card } R = t$, выполнено неравенство

$$\text{card}\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \frac{v(t)}{c \log n}.$$

Пусть параметры c, k, n, s и $v(n)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3. Тогда имеет место следующая

ЛЕММА. *Существует совокупность множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ такая, что выполняются следующие условия:*

- 1) $\text{card } M_j = k$ для всех $j = 1, \dots, s$;
- 2) $\mathcal{M}$ р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с функцией $v(n)$ и константой c ;
- 3) $\tau(\mathcal{M}) \gg \frac{n}{k} \log \frac{sk}{n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предлагаемое доказательство мы проведем с помощью процедуры усреднения. Иными словами, все дальнейшие рассуждения будут основаны на том хорошо известном факте, что если на некотором множестве $\mathcal{F}(m)$ задан неотрицательный целочисленный параметр $\delta(f)$ и

$$S(m) = \frac{1}{\text{card } \mathcal{F}(m)} \sum_{f \in \mathcal{F}(m)} \delta(f) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

то $\delta(f) = 0$ для почти всех элементов $f \in \mathcal{F}(m)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех возможных совокупностей множеств $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_s\} \subset 2^{\mathfrak{R}_n}$ таких, что $\text{card } M_j = k$ для всех $j = 1, \dots, s$. Ясно, что $\text{card } \mathfrak{M} = C_{C_n^k}^s$. Покажем сначала, что почти все элементы класса $\mathfrak{M}$ р.р. в $\mathfrak{R}_n$ с функцией $v(n)$ и константой c . С этой целью каждому натуральному числу t , $k+1 \leq t \leq n$, и каждому множеству $R \subset \mathfrak{R}_n$, $\text{card } R = t$, сопоставим параметр $\delta_{t,R}(\mathcal{M})$, определенный на классе $\mathfrak{M}$ следующим образом:

$$\delta_{t,R}(\mathcal{M}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{card}\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} \leq \frac{v(t)}{c \log n}, \\ 1, & \text{если } \text{card}\{M \in \mathcal{M} : M \subset R\} > \frac{v(t)}{c \log n}. \end{cases}$$

Положим

$$\delta(\mathcal{M}) = \sum_{t=k+1}^n \sum_{R \subset \mathfrak{R}_n : \text{card } R=t} \delta_{t,R}(\mathcal{M}).$$

Тогда нетрудно видеть, что равномерная расположенность некоторой совокупности множеств $\mathcal{M}$ равносильна тому, что $\delta(\mathcal{M}) = 0$. С другой стороны, легко проверить, что свойство 3 влечет следующее асимптотическое выражение:

$$\frac{1}{C_{C_n^k}^s} \sum_{\mathcal{M} \in \mathfrak{M}} \delta(\mathcal{M}) \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда же немедленно следует, что почти все совокупности множеств $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ п.р. в $\mathfrak{R}_n$ с функцией $v(n)$ и константой s . Иначе говоря, мы доказали, что почти для всех совокупностей из рассматриваемого класса выполнено условие 2) леммы. Тем самым для завершения доказательства нам достаточно проверить, что условие 3) леммы также выполнено для почти всех совокупностей из класса $\mathfrak{M}$. В самом деле, применяя теорему 13 из работы [11] с учетом свойств 1 и 4, мы получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Заметим, что в [9] была также доказана аналогичная лемма, но там построение совокупности множеств $\mathcal{M}$, обладающей похожими свойствами, носило эффективный характер, тогда как здесь мы имеем дело исключительно с подсчетом средних значений.

4. Доказательство теоремы 3. Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Мы утверждаем, что найдется вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{Q}^n$ такой, что множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n$ допустимо в решетке $\Lambda_{\mathbf{a}} = \langle \mathbb{Z}^n, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{Z}}$ и

$$d(\Omega_{\mathcal{E}}^n; \Lambda_{\mathbf{a}}) \gg \frac{n}{k} \log \frac{sk}{n}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ – совокупность множеств, построенная в лемме. С помощью стандартной процедуры (см. [1] и [9]) поставим этой совокупности в соответствие семейство n -мерных рациональных векторов $\mathbf{V}$. В работе [1] было доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для всякого вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ выполнено равенство

$$d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) = \tau(\mathcal{M}).$$

Из предложения следует оценка

$$d(\mathcal{E}; \Lambda_{\mathbf{a}}) \gg \frac{n}{k} \log \frac{sk}{n}$$

для всех $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$, так что для завершения доказательства теоремы 3 достаточно выделить из семейства векторов $\mathbf{V}$ хотя бы один рациональный вектор $\mathbf{a}$, добавление которого к решетке целых чисел задает новую решетку $\Lambda_{\mathbf{a}}$, в которой допустимо множество $\Omega_{\mathcal{E}}^n$. Выделение такого вектора также может быть осуществлено с помощью процедуры усреднения с учетом условий 1–3 и свойства 2. Такая процедура подробно описана в [1] для $\Omega_{\mathcal{E}}^n = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^n$ и в [9] для общего случая, поэтому в настоящей работе мы ее не проводим. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Райгородский А. М. Дефект допустимых шаров и октаэдров в решетке и системы общих представителей // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 6. С. 117–141.
- [2] Мошевитин Н. Г. Дефект допустимого октаэдра в решетке // Матем. заметки. 1995. Т. 58. С. 558–568.
- [3] Cusick T. W., Wolfskill J. Lattice octahedra and sums of powers of linear forms // J. London Math. Soc. (2). 1988. V. 38. P. 207–215.
- [4] Mordell L. J. Lattice octahedra // Canad. J. Math. 1960. V. 12. P. 297–302.
- [5] Bantegnie R. Le problème des octaèdres en dimension 5 // Acta Arith. 1968. V. 14. P. 185–202.
- [6] Wessels U. Die Sätze von White und Mordell über kritische Gitter von Polytopen in den Dimensionen 4 und 5. Diplomarbeit: Mathematisches Institut der Ruhr-Universität Bochum, 1989.
- [7] Рышков С. С. К проблеме отыскания совершенных квадратичных форм от многих переменных // Тр. МИАН. 1976. Т. 142. С. 215–239.
- [8] Захарова Н. В. Центрировки 8-мерных решеток, сохраняющие репер последовательных минимумов // Тр. МИАН. 1980. Т. 152. С. 97–123.
- [9] Raigorodskii A. M. The defects of admissible sets in a lattice, and systems of common representatives // Grazer Mathematische Berichte. 1999. № 338. P. 31–62.
- [10] Эрдеш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.
- [11] Кузюрин Н. Н. Асимптотическое исследование задачи о покрытии // Проблемы кибернетики. 1980. № 37. С. 19–56.
- [12] Райгородский А. М. Системы общих представителей // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. № 3. С. 851–860.
- [13] Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$ -матрицы. М.: Физматлит, 1985.
- [14] Gruber P. M., Lekkerkerker C. G. Geometry of Numbers. Amsterdam: North-Holland, 1987.
- [15] Cassels J. W. S. An Introduction to the Geometry of Numbers. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer-Verlag, 1959.
- [16] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматлит: М., 1963.