Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, Тензорные произведения и мультипликаторы модулей L_p на локально компактных пространствах с мерой, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 450–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 02:10:59

Тензорные произведения и мультипликаторы модулей L_p на локально компактных пространствах с мерой

А. Я. Хелемский

Описаны проективные модульные тензорные произведения и пространства мультипликаторов (т.е. ограниченных модульных морфизмов) пространств $L_p(\mu)$ и $L_q(\nu)$, рассмотренных как модули над алгебрами $C_0(\Omega)$ и $B(\Omega)$ на локально компактном пространстве Ω . Здесь $B(\Omega)$ состоит из ограниченных борелевских функций на Ω , μ и ν – регулярные борелевские меры на Ω , а $1 \leq p, q \leq \infty$ в случае базовой алгебры $B(\Omega)$, и $1 \leq p, q < \infty$ в случае базовой алгебры $C_0(\Omega)$. (Говоря нестрого, как тензорное произведение, так и пространство мультипликаторов оказывается еще одним модулем, состоящим из интегрируемых функций, со своим индексом k L и своей мерой). В качестве вспомогательно-го средства мы показываем, что в случае $p, q < \infty$ (и, вообще говоря, только в этом случае) замена базовой алгебры $C_0(\Omega)$ на $B(\Omega)$ оставляет тензорные произведения и мультипликаторы без изменения.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10140

Введение. Эта статья вызвана к жизни попытками ответить на следующий расплывчато сформулированный вопрос. Рассмотрим нормированный модуль над алгеброй $C_0(\Omega)$ на локально компактном пространстве Ω . Какие его алгебраические и аналитические свойства делают его “гомологически лучшим” модулем: проективным, инъективным, плоским? Мы имеем в виду “метрическую” версию каждого из этих трех свойств; см., например, [1] и указанную там литературу.

Пока что нам понятно, как устроены “гомологически лучшие” модули только в случае дискретного Ω [2], [3]. Для недискретных пространств Ω мы сразу сталкиваемся с трудностями. А именно, чтобы перейти к указанным гомологическим свойствам, мы должны сначала понять, как устроены основные ингредиенты соответствующих определений: тензорные произведения и мультипликаторы (= модульные морфизмы) нормированных $C_0(\Omega)$ -модулей. Сейчас, к сожалению, мы знаем строение тензорных произведений и мультипликаторов лишь для некоторых специальных классов модулей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00577а).

По сравнению с поставленным общим вопросом, цель настоящей статьи гораздо скромнее. Мы ограничиваемся рассмотрением традиционного класса модулей $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, где μ – регулярная неотрицательная мера на Ω . Для пары модулей этого класса, скажем, $L_p(\mu)$ и $L_q(\nu)$, мы описываем их тензорное произведение и пространство их мультипликаторов. (Оба снова принадлежат тому же классу модулей).

Несколько точнее, для любых (включая ∞) p, q мы получаем описание тензорных произведений и мультипликаторов модулей над большей алгеброй $B(\Omega)$ всех ограниченных борелевских функций на Ω : с этой алгеброй гораздо легче работать, чем с $C_0(\Omega)$. Но оказывается, что в случае конечных p и q (и, как мы увидим из контрпримеров, только в этом случае) замена базовой алгебры $C_0(\Omega)$ на $B(\Omega)$ не меняет ни тензорное произведение, ни мультипликаторов.

Тензорные произведения общих банаховых модулей были введены Риффелом [4] много лет назад. Помимо этого там же была впервые указана тесная связь между тензорными произведениями и мультипликаторами. Речь идет о функционально-аналитической версии известного в алгебре закона сопряженной ассоциативности (он же экспоненциальный закон) (см. там же 2.12 и 2.13).

В последующей статье [5] Риффел получил описание тензорных произведений модулей класса L_p над сверточной алгеброй $L_1(G)$, где G – локально компактная группа. Кроме того, он применил закон сопряженной ассоциативности к изучению мультипликаторов этих модулей. Мы также будем существенно использовать подобный подход.

1. О связи $C_0(\Omega)$ - и $B(\Omega)$ -модулей. В пределах всей статьи Ω – локально компактное пространство, $C_0(\Omega)$ – банахова алгебра непрерывных исчезающих на бесконечности функций на Ω , а $B(\Omega)$ – объемлющая банахова алгебра ограниченных борелевских функций на Ω , также снабженная $\sup$ -нормой. Помимо нормы обе алгебры наделены структурой полинормированного пространства (см., например, [6; гл. 4]) с преднормами

$$\|u\|_\mu := \left| \int_\Omega u(t) d\mu(t) \right|,$$

где μ пробегает пространство $M(G)$ комплексных регулярных борелевских мер на Ω . Соответствующая топология будет называться *мерной* и обозначаться $\hat{m}$. Ясно, что умножение в $B(\Omega)$ раздельно $\hat{m}$ -непрерывно, и подалгебра $C_0(\Omega)$ $\hat{m}$ -плотна в $B(\Omega)$ (ср., например, [6; гл. 6.6]).

Для заданного нормированного пространства мы обозначим его слабую топологию через w , а $*$ -слабую топологию его второго сопряженного – через w^* . Каноническая двойственность между пространством и его сопряженным будет обозначаться скобками: $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Постоянная 1 на Ω будет обозначаться через **1**.

Пусть X – банахово пространство, а $\mathcal{R}: C_0(\Omega) \times X \rightarrow X$ – билинейный оператор. Для каждого $x \in X$ мы обозначим через $\mathcal{R}_x: C_0(\Omega) \rightarrow X$ оператор $a \mapsto \mathcal{R}(a, x)$. По теореме Рисса для каждого $y \in X^*$ выполнено

$$\langle \mathcal{R}_x(a), y \rangle = \int_\Omega a(t) d\mu_{x,y}(t) \quad \text{для некоторой} \quad \mu_{x,y} \in M(G).$$

Из этого следует, что $\mathcal{R}(\hat{m} - w)$ -непрерывен по первому аргументу, т.е. для каждого $x \in X$ $(\hat{m} - w)$ -непрерывен оператор $\mathcal{R}_x$. Отсюда легко видеть (и это, по-видимому, хорошо известно), что существует единственное продолжение нашего $\mathcal{R}$ до билинейного оператора $\tilde{\mathcal{R}}: B(\Omega) \times X \rightarrow X^{**}$, $(\hat{m} - w^*)$ -непрерывного по первому аргументу. В самом деле, для каждого $x \in X$ и $y \in X^*$ мы берем указанную выше $\mu_{x,y}$ и рассматриваем оператор $\tilde{\mathcal{R}}_x: B(\Omega) \rightarrow X^{**}$, сопоставляющий функции u функционал $y \mapsto \int_{\Omega} u(t) d\mu_{x,y}(t)$ на X^* . Ясно, что $\tilde{\mathcal{R}}_x$ — это $(\hat{m} - w^*)$ -непрерывное продолжение исходного $\mathcal{R}_x$. Поэтому билинейный оператор $\tilde{\mathcal{R}}: (u, x) \mapsto \tilde{\mathcal{R}}_x(u)$ — то, что мы ищем. Единственность такого продолжения обеспечена $\hat{m}$ -плотностью $C_0(\Omega)$ в $B(\Omega)$. При этом, очевидно, выполнено $\|\tilde{\mathcal{R}}_x\| = \|\mathcal{R}_x\|$ для всех $x \in X$ и, как следствие, $\|\tilde{\mathcal{R}}\| = \|\mathcal{R}\|$.

Если $\mathcal{R}$ — внешнее умножение, то мы часто будем писать $a \cdot x$ вместо $\mathcal{R}(a, x)$ и $a \bullet x$ вместо $\tilde{\mathcal{R}}(a, x)$. Назовем банахов $C_0(\Omega)$ -модуль X *консервативным*, если для каждого $u \in B(\Omega)$ и $x \in X$ элемент $u \bullet x$ лежит в подпространстве пространства X^{**} , канонически отождествляемом с X . В этом случае мы будем рассматривать $\tilde{\mathcal{R}}$ и $\tilde{\mathcal{R}}_x$; $x \in X$ с областью значений X ; заметим, что теперь $\tilde{\mathcal{R}}_x(\hat{m} - w)$ -непрерывен. Разумеется, рефлексивный, как банахово пространство, модуль консервативен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если $C_0(\Omega)$ -модуль X консервативен, то он также является $B(\Omega)$ -модулем с внешним умножением “ $\bullet$ ”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны показать, что $u \bullet (v \bullet x) = (uv) \bullet x$ для всех $u, v \in B(X)$, $x \in X$. Сначала зафиксируем u, x и рассмотрим оператор

$$\tilde{\mathcal{R}}_x^u: B(\Omega) \rightarrow X, \quad v \mapsto u \bullet (v \bullet x).$$

Для каждого $a \in C_0(\Omega)$ и $y \in X^*$ выполнено

$$|\langle \tilde{\mathcal{R}}_x^a(v), y \rangle| = |\langle v \bullet x, a \cdot y \rangle| = \|v\|_{\mu},$$

где “ $\cdot$ ” означает внешнее умножение в сопряженном $C_0(\Omega)$ -модуле X^* (см., например, [7]), а $\mu := \mu_{x,a \cdot y}$. Отсюда $\tilde{\mathcal{R}}_x^a(\hat{m} - w)$ -непрерывен. Но оператор

$$\tilde{\mathcal{R}}_x^a: B(X) \rightarrow X, \quad v \mapsto (av) \bullet x,$$

также $(\hat{m} - w)$ -непрерывен, будучи композицией $\tilde{\mathcal{R}}_x$ и $\hat{m}$ -непрерывного оператора. Поскольку $\mathcal{R}$ — внешнее умножение, оба оператора совпадают на $\hat{m}$ -плотном подпространстве $C_0(\Omega)$ в $B(\Omega)$. Значит, они совпадают на всей $B(\Omega)$.

Таким образом,

$$a \bullet (v \bullet x) = (av) \bullet x \quad \text{для всех } a \in C_0(\Omega), \quad v \in B(\Omega), \quad x \in X.$$

Теперь рассмотрим два оператора из $B(\Omega)$ в X , действующих как $u \mapsto u \bullet (v \bullet x)$ и как $u \mapsto (uv) \bullet x$. Снова оба, как легко видеть, $(\hat{m} - w)$ -непрерывны и совпадают на $C_0(\Omega)$. Дальше ясно.

В дальнейшем, имея в виду описанную конструкцию, мы будем говорить, что консервативный $C_0(\Omega)$ -модуль *порождает* $B(\Omega)$ -модуль (с тем же подлежащим пространством.)

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Известно, что для всякого левого банахова модуля X над произвольной банаховой алгеброй A существует способ сделать пространство X^{**} левым банаховым модулем над алгеброй A^{**} , наделенной так называемым умножением Аренса (см., например, [8]). Поскольку для $A := C_0(\Omega)$ алгебра $B(\Omega)$ естественно вкладывается в A^{**} , обсуждавшееся выше построение порожденного $B(\Omega)$ -модуля могло бы быть выведено из только что упомянутой конструкции. Однако в случае функциональных алгебр в нашем распоряжении имеются меры, и это позволяет выбрать более легкий и наглядный путь изложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть X, Y – консервативные $C_0(\Omega)$ -модули, Z – банахово пространство, $\mathcal{R}: X \times Y \rightarrow Z$ – ограниченный билинейный оператор, сбалансированный относительно структуры $C_0(\Omega)$ -модуля. Тогда $\mathcal{R}$ сбалансирован и относительно структуры порожденного $B(\Omega)$ -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $x \in X, y \in Y$. Надо показать, что из

$$\mathcal{R}(a \cdot x, y) = \mathcal{R}(x, a \cdot y) \quad \text{для всех } a \in C_0(\Omega)$$

следует

$$\mathcal{R}(u \bullet x, y) = \mathcal{R}(x, u \bullet y) \quad \text{для всех } u \in B(\Omega).$$

Пусть g – ограниченный функционал на $\mathbb{C}$. Рассмотрим функционалы f и f' на $B(\Omega)$, переводящие u в $g[\mathcal{R}(u \bullet x, y)]$ и в $g[\mathcal{R}(x, u \bullet y)]$. Оба, как легко видеть, $\hat{m}$ -непрерывны. Но согласно условию $f = f'$ на $\hat{m}$ -плотном подпространстве $C_0(\Omega)$ в $B(\Omega)$. Отсюда $g[\mathcal{R}(x \cdot u, y)] = g[\mathcal{R}(x, u \cdot y)]$ для всех возможных g, u, x, y . Далее работает теорема Хана–Банаха.

На протяжении всей статьи для банаховых $C_0(\Omega)$ -модулей X и Y мы будем использовать символы $X \otimes_C Y$ и $X \hat{\otimes}_C Y$ для неполного и полного проективного тензорного произведения X и Y над $C_0(\Omega)$. Сходным образом, для $B(\Omega)$ -модулей мы будем использовать символы $X \otimes_B Y$ и $X \hat{\otimes}_B Y$.

Если X и Y – банаховы $B(\Omega)$ -модули, то они, разумеется, являются $C_0(\Omega)$ -модулями, и каждый $B(\Omega)$ -сбалансированный билинейный оператор из $X \times Y$ в банахово пространство $C_0(\Omega)$ -сбалансирован. Поэтому, благодаря свойству универсальности модульного тензорного произведения, возникают сжимающие операторы

$$T_{C,B}: X \otimes_C Y \rightarrow X \otimes_B Y \quad \text{и} \quad \hat{T}_{C,B}: X \hat{\otimes}_C Y \rightarrow X \hat{\otimes}_B Y,$$

оба однозначно определенные правилом

$$x \otimes_C y \mapsto x \otimes_B y.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Если X и Y – консервативные $C_0(\Omega)$ -модули, то операторы $T_{C,B}$ и $\hat{T}_{C,B}$ суть изометрические изоморфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение 1.3 вкупе с вышеупомянутым свойством универсальности доставляет сжимающие операторы

$$T_{B,C}: X \otimes_B Y \rightarrow X \otimes_C Y \quad \text{и} \quad \hat{T}_{B,C}: X \hat{\otimes}_B Y \rightarrow X \hat{\otimes}_C Y,$$

однозначно определенные правилом

$$x \otimes_B y \mapsto x \otimes_C y.$$

Очевидно, первый из них – обратный к $T_{C,B}$, а второй – к $\widehat{T}_{C,B}$. Дальше ясно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Каждый ограниченный морфизм между консервативными банаховыми $C_0(\Omega)$ -модулями является и морфизмом между соответствующими порожденными $B(\Omega)$ -модулями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ – заданный морфизм, $x \in X$. Тогда для каждого $u \in B(\Omega)$ оператор

$$\widetilde{\mathcal{M}}': B(\Omega) \rightarrow Y, \quad u \mapsto u \bullet \varphi(x),$$

очевидно, $(\widehat{m} - w)$ -непрерывен. Оператор

$$\widetilde{\mathcal{M}}'': B(\Omega) \rightarrow Y, \quad u \mapsto \varphi(u \bullet x),$$

также $(\widehat{m} - w)$ -непрерывен, будучи композицией $(w - w)$ -непрерывного и $(\widehat{m} - w)$ -непрерывного операторов. Но в силу условия на φ операторы $\widetilde{\mathcal{M}}'$ и $\widetilde{\mathcal{M}}''$ совпадают на $C_0(\Omega)$; следовательно, они совпадают на всем $B(\Omega)$.

2. Предварительные сведения о модулях $L_p(\mu)$. Для каждого p , $0 < p \leq \infty$, и регулярной неотрицательной борелевской меры μ на Ω (см., например, [9]) мы обозначим через $L_p(\mu)$ квазинормированное пространство (классов эквивалентности) функций x на Ω таких, что

$$\int_{\Omega} |x^p(t)| d\mu(t) < \infty.$$

Квазинорму (т.е. обычную норму при $p \geq 1$) функции $x \in L_p(\mu)$ (при $p < \infty$ это число $(\int_{\Omega} |x^p(t)| d\mu\{t\})^{1/p}$) мы обозначим через $\|x\|_{p,\mu}$.

Пусть задано еще одно пространство того же класса, скажем, $L_q(\nu)$. Напомним о каноническом представлении

$$d\nu = f d\mu + d\mu_0, \tag{2.1}$$

где $f \geq 0$ – локально μ -интегрируемая функция на Ω , а $\mu_0 \perp \mu$ (ср. [9; теорема 3.2.3]). Зафиксируем $\Omega_1 \subseteq \Omega$ такое, что $\mu_0(\Omega_1) = \mu(\Omega \setminus \Omega_1) = 0$, и положим

$$\Omega_0 := \{t \in \Omega_1 : f(t) > 0\}.$$

Обозначим через ν_0 меру, заданную равенством $d\nu = f d\mu$. Далее, для каждого p и меры μ на Ω обозначим через $L_p^f(\mu)$ подпространство в $L_p(\mu)$, состоящее из (классов эквивалентности) функций, равных 0 на Ω_0 . Разумеется, мы вправе отождествить пространства $L_q^f(\nu)$ и $L_q(\nu_0)$.

Наконец, пусть $r > 0$ – число (или ∞), заданное эквивалентными равенствами

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \text{или} \quad \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1. \tag{2.2}$$

Зададим борелевскую регулярную меру λ на Ω равенством

$$d\lambda := f^{p/(p+q)} d\mu. \quad (2.3)$$

В случае $p = \infty$ мы полагаем $p/(p+q) = 1$.

Нам предстоит существенно использовать следующее наблюдение. По-видимому, оно известно; во всяком случае, в трактатах [10; предложение I.3.4] и [11; VI.11.A.1] разобран случай $\mu = \nu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (i) Если $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_q(\nu)$, $p, q > 0$, то (с точностью до эквивалентности) поточечное произведение xy принадлежит $L_r(\lambda)$ и

$$\|xy\|_{r,\lambda} \leq \|x\|_{p,\mu} \|y\|_{q,\nu}. \quad (2.4)$$

(ii) Для каждого $y \in L_q(\nu)$ найдется $x \in L_p(\mu)$; $\|x\|_{p,\mu} = 1$ такое, что (2.4) становится равенством. Как следствие, при $r \geq 1$ оператор $\varphi_y: L_p(\mu) \rightarrow L_r(\lambda): x \mapsto xy$, теперь действующий между банаховыми пространствами, имеет норму $\|y\|_{q,\nu}$.

(iii) Для каждого $z \in L_r(\lambda)$ найдутся $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_q(\nu)$ такие, что $xy = z$, а (2.4) становится равенством.

(iv) Если y — ν -измеримая функция на Ω , почти всюду равная 0 вне Ω_0 , а xy лежит в $L_r(\lambda)$ для каждого $x \in L_p(\mu)$, то необходимо $y \in L_q(\nu)$ (или, что то же самое, $y \in L_q(\nu_0)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если хотя бы одно из p, q бесконечно, все утверждения легко проверяются; поэтому мы предположим, что $p, q < \infty$. Мы сведем эти утверждения к хорошо известному случаю $r = 1$ и $\mu = \nu$.

Рассмотрим для заданной μ -измеримой функции x на Ω функцию $\varkappa(x)$, равную $x^r f^{-r/(p+q)}$ на Ω_0 и нулю вне Ω_0 . Очевидно $x \in L_p(\mu)$ влечет $\varkappa(x) \in L_{p/r}(\lambda)$. Мы получаем сюръективное отображение

$$\varkappa: L_p(\mu) \rightarrow L_{p/r}(\lambda), \quad x \mapsto \varkappa(x);$$

обозначим через $\varkappa_0$ его ограничение на $L_p^f(\mu)$. Ясно, что $\|\varkappa(x)\|_{p/r,\lambda}^{p/r} \leq \|x\|_{p,\mu}^p$, и что $\varkappa_0$ — биекция. Сходным образом появляются отображение

$$\varpi: L_q(\nu) \rightarrow L_{q/r}(\lambda), \quad y \mapsto y^r f^{r/(p+q)},$$

и его ограничение ϖ_0 на $L_q^f(\nu)$; это также биекция. Мы видим, что для всех $x \in L_p^f(\mu)$ и $y \in L_q^f(\nu)$ выполнено

$$\|x\|_{p,\mu}^p = \|\varkappa(x)\|_{p/r,\lambda}^{p/r} \quad \text{и} \quad \|y\|_{q,\nu}^q = \|\varpi(y)\|_{q/r,\lambda}^{q/r}, \quad (2.5)$$

а также почти всюду по λ выполнено

$$(xy)^r = \varkappa(x)\varpi(y). \quad (2.6)$$

С помощью (2.5) и (2.6) утверждения (i)–(iv) легко сводятся к аналогичным утверждениям, получающимся при заменах p на p/r , q на q/r , μ и ν на λ , x на $\varkappa(x)$ и y на $\varpi(y)$. А такие утверждения в силу соотношений (2.2) хорошо известны.

Теперь предположим, что $p \geq 1$ и рассмотрим пространство $L_p(\mu)$. Оно, очевидно, является $C_0(\Omega)$ -модулем с поточечным внешним умножением. В соответствии со сказанным в п. 1 появляется билинейный оператор из $B(\Omega) \times L_p(\mu)$ в $L_p(\mu)^{**}$, $(\hat{m} - w^*)$ -непрерывный по первому аргументу. В то же время, однако, $L_p(\mu)$ обладает и структурой банахова $B(\Omega)$ -модуля, продолжающей указанную структуру $C_0(\Omega)$ -модуля и снова задаваемой поточечным внешним умножением. Обозначим последнее через “ $\cdot$ ”.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $p < \infty$. Тогда $C_0(\Omega)$ -модуль $L_p(\mu)$ консервативен и внешнее умножение “ $\bullet$ ” в порожденном $B(\Omega)$ -модуле совпадает с поточечным.

(Разумеется, при $1 < p < \infty$ наш модуль, будучи рефлексивным, заведомо консервативен. Но утверждение верно и при $p = 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что среди всех операторов из $B(\Omega) \times L_p(\mu)$ в пространстве $L_p(\mu)^{**}$ оператор $(u, x) \mapsto u \bullet x$ однозначно определен тем, что он $(\hat{m} - w^*)$ -непрерывен по первому аргументу. Поэтому достаточно установить, что для каждого $x \in L_p(\mu)$ оператор

$$\tilde{r}_x: B(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega, \mu), \quad u \mapsto u \cdot x,$$

$(\hat{m} - w)$ -непрерывен.

Напомним, что слабая топология в $L_p(\mu)$ задается преднормами вида

$$\|\cdot\|_y := |\langle \cdot, y \rangle|, \quad \text{где } y \in L_p(\mu)^*.$$

Отождествляя y с соответствующей функцией из $L_{p'}(\mu)$, где $1/p' + 1/q = 1$, мы видим, что $\|u \cdot x\|_y = \|u\|_\alpha$, где $\alpha \in M(G)$ определена равенством $d\alpha := x(t)y(t) d\mu(t)$. Дальше ясно.

Однако подобное утверждение неверно при $p = \infty$. Начнем с подготовительного наблюдения. Для функции $u \in B(\Omega)$ мы обозначим через u_μ ее класс эквивалентности в $L_\infty(\mu)$. Обозначим также через $[C_0(\Omega)]$ замкнутое подпространство в $L_\infty(\mu)$, состоящее из классов эквивалентности функций из $C_0(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $[C_0(\Omega)]$ меньше, чем $L_\infty(\mu)$. (Например, Ω метризуемо, и мера μ не сосредоточена в конечном числе точек.) Тогда оператор

$$B(\Omega) \rightarrow L_\infty(\mu), \quad u \mapsto u \cdot \mathbf{1}_\mu,$$

не является $(\hat{m} - w)$ -непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда для каждого $f \in L_\infty(\mu)^*$ функционал

$$g: B(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \mapsto f(u \cdot \mathbf{1}_\mu) = f(u_\mu),$$

$\hat{m}$ -непрерывен. Далее, мерная топология в $B(\Omega)$ – это частный случай Λ -слабой топологии (см. [6; определение 4.2.1]). Поэтому (см. [6; предложение 4.2.8]) найдется мера α такая, что g переводит u в $\int_\Omega u(t) d\alpha(t)$.

Из условия следует, что существует ненулевой функционал f на $L_\infty(\mu)$, равный нулю на $[C_0(\Omega)]$. Тогда (см. выше) для соответствующих g , α и всех $a \in C_0(\Omega)$ выполнено

$$\int_{\Omega} a(t) d\alpha(t) = f(a_\mu) = 0.$$

Отсюда $\alpha = 0$, а значит, $g = 0$. Поскольку, как известно, множество $\{u_\mu : u \in B(\Omega)\}$ совпадает со всем $L_\infty(\mu)$, получаем, что $f = 0$. Мы пришли к противоречию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *В условиях предыдущего предложения $C_0(\Omega)$ -модуль $L_\infty(\mu)$ не консервативен. Как следствие, внешнее умножение “ $\cdot$ ”, рассматриваемое со значениями в $L_\infty(\Omega)^{**} \supset L_\infty(\Omega)$, не совпадает с “ $\bullet$ ”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда, полагая $x := \mathbf{1}_\mu$, получаем оператор

$$\psi_1 : B(\Omega) \rightarrow L_\infty(\mu), \quad u \mapsto u \bullet \mathbf{1}_\mu,$$

который $(\hat{m} - w)$ -непрерывен и поэтому $(\hat{m} - \tilde{w}^*)$ -непрерывен, где $\tilde{w}^* - w^*$ -топология в $L_\infty(\mu)$. Эта топология задается преднормами

$$\|x\|_y := \left| \int_{\Omega} x(t)y(t) d\mu(t) \right|, \quad y \in L_1(\Omega, \mu).$$

Отсюда $\|u_\mu\|_y = \|u\|_\alpha$, где $d\alpha := y d\mu$. Следовательно, оператор

$$\psi_2 : B(\Omega) \rightarrow L_\infty(\mu), \quad u \mapsto u \cdot \mathbf{1}_\mu = u_\mu,$$

также $(\hat{m} - w)$ -непрерывен. Но ψ_1 и ψ_2 совпадают на $\hat{m}$ -плотном подмножестве $C_0(\Omega)$ в $B(\Omega)$. Значит, они равны, а это противоречит предложению 2.4.

3. Тензорное умножение в классе L_p . В этом пункте $1 \leq p, q \leq \infty$, модули $L_p(\mu)$, $L_q(\nu)$ – те же, что и в п. 2, $r \leq \infty$ – то же, что и в (2.2), а мера λ – та же, что и в (2.3).

Всюду в статье через $\mathcal{A}$ обозначено множество тех точек t в Ω , где $\lambda\{t\} > 0$. Положим для $t \in \mathcal{A}$, $w(t) := \lambda\{t\}^{1/r}$. Рассмотрим множество функций z на $\mathcal{A}$ таких, что

$$\|z\|_{1(w)} := \sum \{|z(t)|w(t); t \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

Ясно, что это множество является банаховым $C_0(\Omega)$ - и $B(\Omega)$ -модулем относительно поточечных операций и нормы $\|\cdot\|_{1(w)}$. Обозначим его через $\ell_1(\mathcal{A}, w)$. Рассмотрим также нормированный под- $C_0(\Omega)$ - и под- $B(\Omega)$ -модуль этого модуля, состоящий из функций z таких, что

$$\sum \{|z(t)|^r \lambda\{t\}; t \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

Его мы обозначим через $\ell_r(\mathcal{A}, w)$. Разумеется, это собственный подмодуль, если и только если $r < 1$.

Напомним обозначение u_μ из п. 2. Если x – класс эквивалентности существенно ограниченной относительно μ функции на Ω , мы обозначим через $x^\diamond$ любую $u \in B(\Omega)$ такую, что $(x^\diamond)_\mu = x$. Норма в $L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu)$ будет обозначаться через $\|\cdot\|_\otimes$.

ТЕОРЕМА 3.1. (i) Если $r \geq 1$, то

$$L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu) = L_p(\mu) \widehat{\otimes}_B L_q(\nu) = L_r(\lambda).$$

Более точно, существуют изометрические $B(\Omega)$ -модульные изоморфизмы

$$I: L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu) \rightarrow L_r(\lambda) \quad \text{и} \quad \widehat{I}: L_p(\mu) \widehat{\otimes}_B L_q(\nu) \rightarrow L_r(\lambda),$$

оба корректно определенные правилом $x \otimes_B y \mapsto xy$.

(ii) Если $r < 1$, то

$$L_p(\Omega, \mu) \otimes_B L_q(\Omega, \nu) = \ell_r(\mathcal{A}, w), \quad (\text{но}) \quad L_p(\Omega, \mu) \widehat{\otimes}_B L_q(\Omega, \nu) = \ell_1(\mathcal{A}, w).$$

Более точно, существуют изометрические $B(\Omega)$ -модульные изоморфизмы

$$I: L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu) \rightarrow \ell_r(\mathcal{A}, w) \quad \text{и} \quad \widehat{I}: L_p(\mu) \widehat{\otimes}_B L_q(\nu) \rightarrow \ell_1(\mathcal{A}, w),$$

оба корректно определенные тем, что переводят $x \otimes_B y$ в ограничение на $\mathcal{A}$ функции xy .

(iii) Кроме того, если $p, q < \infty$, то оба утверждения остаются верными при замене символов $\otimes_B$ и $\widehat{\otimes}_B$ на $\otimes_C$ и $\widehat{\otimes}_C$ соответственно.

Перед доказательством выделим два наглядных частных случая.

ПРИМЕР 1. Для c_0 - и ℓ_∞ -модулей ℓ_p и ℓ_q выполнено

$$\begin{aligned} \ell_p \widehat{\otimes}_C \ell_q &= \ell_p \widehat{\otimes}_B \ell_q = \ell_r, & \text{если } r \geq 1, \\ \ell_p \widehat{\otimes}_C \ell_q &= \ell_p \widehat{\otimes}_B \ell_q = \ell_1, & \text{если } r < 1. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ со стандартной мерой Лебега и $C[0, 1]$ -модуль – он же и $B[0, 1]$ -модуль – $L_1[a, b]$. Тогда

$$L_1[0, 1] \otimes_C L_1[0, 1] = L_1[0, 1] \otimes_B L_1[0, 1] = 0.$$

Начало доказательства: две леммы. Ясно, что часть теоремы, касающаяся полных тензорных произведений, сразу следует из части, касающейся неполных. Поэтому мы ограничимся случаем тензорных произведений “ $\otimes_B$ ” и “ $\otimes_C$ ”.

ЛЕММА 1. Пусть для $U \in L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu)$, представленного как

$$U = \sum_{k=1}^m x_k \otimes_B y_k, \quad x_k \in L_p(\mu), \quad y_k \in L_q(\nu),$$

выполнено

$$\sum_{k=1}^m x_k y_k = 0 \quad \text{в } L_r(\lambda)$$

(ср. предложение 2.1). Тогда $U = 0$. В частности, если для $x \in L_p(\mu)$ и $y \in L_q(\nu)$ выполнено $xy = 0$ в $L_r(\lambda)$, то

$$x \otimes_B y = 0 \quad \text{в } L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы вправе считать, что $x_k = 0$ на $\Omega \setminus \Omega_1$, а $y_k = 0$ на $\Omega_1 \setminus \Omega_0$, и таким образом $\sum_{k=1}^m x_k y_k = 0$ почти всюду на Ω относительно λ . Благодаря выбору Ω_1 и Ω_0 мы видим, что меры μ , ν и λ , будучи рассмотрены на Ω_0 , взаимно абсолютно непрерывны. Поэтому мы можем считать, что $\sum_{k=1}^m x_k y_k$ равна нулю как в $L_p(\mu)$, так и в $L_q(\nu)$.

Пусть вначале хотя бы одно из чисел p, q конечно. Поскольку алгебра $B(\Omega)$, а с ней и операция “ $\otimes_B$ ” коммутативны, мы вправе считать, что $p < \infty$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Найдется компакт $\Delta \subseteq \Omega$ такой, что для его характеристической функции χ , все функции $x_k \chi_\mu$ существенно ограничены на Δ относительно μ , и $\|x_k - x_k \chi_\mu\|_{p,\mu} < \varepsilon$ для всех k . Поэтому выполнено

$$\begin{aligned} \|U\|_\otimes &\leq \sum_{k=1}^n \|x_k - x_k \chi_\mu\|_{p,\mu} \|y_k\|_{q,\nu} + \left\| \sum_{k=1}^n x_k \chi_\mu \otimes_B y_k \right\|_\otimes \\ &< \varepsilon \sum_{k=1}^n \|y_k\|_{q,\nu} + \left\| \sum_{k=1}^n \chi \cdot x_k \otimes_B y_k \right\|_\otimes. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{k=1}^n \chi \cdot x_k \otimes_B y_k = \sum_{k=1}^n (x_k)^\diamond \cdot \chi_\mu \otimes_B y_k = \chi_\mu \otimes_B \sum_{k=1}^n x_k y_k = 0,$$

а ε произвольно.

Остается случай $p = q = \infty$. Тогда $\mathbf{1}_\mu \in L_\infty(\mu)$, и выполнено

$$U = \sum_{k=1}^n x_k^\diamond \cdot \mathbf{1}_\mu \otimes_B y_k = \mathbf{1}_\mu \otimes_B \sum_{k=1}^n x_k y_k = 0.$$

В следующей лемме χ_0, χ_1 и χ_2 суть характеристические функции соответственно подмножеств $\Omega_0, \Omega \setminus \Omega_1$ и $\Omega_1 \setminus \Omega_0$.

ЛЕММА 2. Если для заданных $x \in L_p(\mu)$ и $y \in L_q(\nu)$ x_0 и y_0 суть классы эквивалентности функций $x\chi_0$ и $y\chi_0$, то $x_0 \otimes_B y_0 = x \otimes_B y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим (подразумевая классы эквивалентности) $x_1 := x\chi_1$, $y_1 := x\chi_1$, $x_2 := x\chi_2$ и $y_2 := y\chi_2$. По лемме 1

$$x \otimes_B y = x_0 \otimes_B y_0 + x_1 \otimes_B y_1 + x_2 \otimes_B y_2.$$

Очевидно, $x_1 = 0$ в $L_p(\mu)$ и $y_2 = 0$ в $L_q(\nu)$. Дальше ясно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (i). На основании предложения 2.1 (i) корректно определено отображение $\mathcal{J}: L_p(\mu) \times L_q(\nu) \rightarrow L_r(\lambda): (x, y) \mapsto xy$. Очевидно, это билинейный $B(\Omega)$ -сбалансированный оператор, сжимающий в силу (2.4). Поэтому, благодаря свойству универсальности, возникает сжимающий оператор $I: L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu) \rightarrow L_r(\lambda)$, действующий так, как указано в формулировке.

Сначала покажем, что I инъективен. В самом деле, если для U выполнено $I(U) = 0$, то для любого представления U в виде суммы элементарных тензоров выполнено условие леммы 1. Поэтому $U = 0$.

Осталось показать, что I – коизометрический оператор. Для этого достаточно, задав $z \in L_r(\lambda)$, предъявить $U \in L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu)$ с $I(U) = z$ и $\|U\|_\otimes = \|z\|_{r,\lambda}$. Возьмем

функции $x \in L_p(\mu)$ и $y \in L_q(\nu)$, доставляемые предложением 2.1 (iii), и элементарный тензор $U := x \otimes_B y$; тогда, очевидно, $I(u) = z$. Поэтому, учтя, что $\|I\| \leq 1$, мы получаем, что

$$\|z\|_{r,\lambda} \leq \|u\|_{\otimes} \leq \|x\|_{p,\mu} \|y\|_{q,\nu} = \|z\|_{r,\lambda}.$$

Доказательство п. (i) закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (ii). Заметим, что теперь обязательно $p, q < \infty$. Снова нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $\Delta \subseteq \Omega$ – борелевское множество такое, что $\mu(\Delta), \nu(\Delta) < \infty$, и χ – его характеристические функции. Тогда

$$\chi \otimes_B \chi = \chi' \otimes_B \chi',$$

где χ' – характеристическая функция множества $\Delta \cap \mathcal{A}$.

Согласно лемме 1

$$\chi \otimes_B \chi = \chi' \otimes_B \chi' + \chi_0 \otimes_B \chi_0,$$

где χ_0 – характеристическая функция множества $\Delta' := \Delta \setminus \Delta \cap \mathcal{A}$. Поэтому нам надо показать, что последнее слагаемое равно нулю.

Благодаря лемме 2 мы можем считать, что $\Delta' \subseteq \Omega_0$; следовательно, для каждого $t \in \Omega_0$ либо $\mu\{t\}, \nu\{t\} > 0$, либо $\mu\{t\} = \nu\{t\} = 0$. Поскольку $\Delta' \cap \mathcal{A} = \emptyset$, первый случай невозможен.

Отсюда вытекает (см., например, [9; теорема 1.2.9] вкупе с [10; гл. V, § 5, упр. 96]), что для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение множества Δ' , состоящее из борелевских множеств Δ_l , $l = 1, \dots, N$, таких, что для каждого l выполнено $\mu(\Delta_l), \nu(\Delta_l) < \varepsilon$. Пользуясь леммой 1, мы легко получаем, что

$$\chi_0 \otimes_B \chi_0 = \sum_{l=1}^N \chi_l \otimes_B \chi_l,$$

где χ_l – характеристическая функция множества Δ_l . Отсюда

$$\|\chi_0 \otimes_B \chi_0\|_{\otimes} \leq \sum_{l=1}^N \|\chi_l\|_{p,\mu} \|\chi_l\|_{q,\nu} = \sum \mu(\Delta_l)^{r/p} \nu(\Delta_l)^{r/q} \mu(\Delta_l)^{1/p-r/p} \nu(\Delta_l)^{1/q-r/q}.$$

Неравенство Гёльдера, имеющее силу благодаря (2.2), дает

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \mu(\Delta_l)^{r/p} \nu(\Delta_l)^{r/q} &\leq \left(\sum_{l=1}^N (\mu(\Delta_l))^{(r/p) \cdot (p/r)} \right)^{r/p} \left(\sum_{l=1}^N (\nu(\Delta_l))^{(r/q) \cdot (q/r)} \right)^{r/q} \\ &= \mu(\Delta')^{r/p} \nu(\Delta')^{r/q}. \end{aligned}$$

В то же время, разумеется, $\mu(\Delta_l)^{1/p-r/p} \nu(\Delta_l)^{1/q-r/q} \leq \varepsilon^{1/r-1}$. Отсюда следует оценка

$$\|\chi_0 \otimes_B \chi_0\|_{\otimes} \leq \mu(\Delta)^{r/p} \nu(\Delta)^{r/q} \varepsilon^{1/r-1}.$$

Остается воспользоваться тем, что $1/r - 1 > 0$, а ε произвольно.

ЛЕММА 4. *Линейная оболочка элементов вида $\chi \otimes_B \chi$, где χ пробегает семейство характеристических функций одноточечных подмножеств в $\mathcal{A}$, плотна в $L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu)$.*

Возьмем $U \in L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu)$ и его представление

$$U = \sum_{k=1}^m x_k \otimes_B y_k, \quad x_k \in L_p(\mu), \quad y_k \in L_q(\nu), \quad k = 1, \dots, m.$$

Каждый x_k и y_k аппроксимируется в соответствующих пространствах ступенчатыми функциями, постоянными на борелевских множествах конечной меры μ или, смотря по смыслу, ν . Отсюда, используя лемму 1, мы получаем, что U аппроксимируется элементами вида

$$\sum_{l=1}^m c_l \chi_l \otimes_B \chi_l, \quad c_l \in \mathbb{C},$$

где χ_l , $l = 1, \dots, m$, – характеристические функции дизъюнктных борелевских множеств, скажем, Δ_l , таких, что $\mu(\Delta_l), \nu(\Delta_l) < \infty$. При этом благодаря лемме 3 мы можем считать, что $\Delta_l \subseteq \mathcal{A}$.

Обе меры μ и ν являются конечными и атомическими на каждом Δ_l . Поэтому каждое Δ_l не более чем счетно, и χ_l аппроксимируется суммами характеристических функций одноточечных подмножеств. Остается опять использовать билинейность операции “ $\otimes_B$ ” и лемму 1.

Мы продолжаем доказательство п. (ii). В силу предложения 2.1 (i) мы можем говорить об отображении $\mathcal{J}: L_p(\mu) \times L_q(\nu) \rightarrow \ell_r(\mathcal{A}, w)$, переводящем пару (x, y) в ограничение функции xy на $\mathcal{A}$. Очевидно, $\mathcal{J}$ – билинейный оператор. При этом, поскольку $r < 1$, выполнено

$$\sum \{|x(t)y(t)|(\lambda(t))^{1/r} : t \in \mathcal{A}\} \leq \left(\sum \{|x(t)y(t)|^r \lambda(t) : t \in \mathcal{A}\} \right)^{1/r}.$$

Эта оценка в объединении с (2.4) показывает, что $\mathcal{J}$ сжимающий. Тем самым, возникает сжимающий оператор

$$I: L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu) \rightarrow \ell_r(\mathcal{A}, w),$$

действующий так, как указано в формулировке.

Покажем, что I сюръективен. Возьмем функцию $z \in \ell_r(\mathcal{A}, w)$ и продолжим ее нулями до функции $\tilde{z}$ на Ω . Ясно, что $\tilde{z} \in L_r(\lambda)$, а значит, согласно предложению 2.1 (iii) имеет вид xy , $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_q(\nu)$. Мы видим, что функция $I(x \otimes_B y) = \mathcal{J}(x, y)$, будучи ограничением $\tilde{z}$ на $\mathcal{A}$, – это наша z .

Осталось показать, что I изометрический. Для этого, поскольку он сжимающий, достаточно показать, что он не уменьшает нормы элементов плотного подмножества в $L_p(\mu) \otimes_B L_q(\nu)$, указанного в лемме 4.

Возьмем такой элемент; пусть это

$$U = \sum_{l=1}^n c_l \chi_l \otimes_B \chi_l, \quad c_l \in \mathbb{C},$$

χ_l – характеристическая функция одноточечного множества $\{t_l\} \subseteq \mathcal{A}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда выполнено

$$\|U\|_{\otimes} \leq \sum_{l=1}^n |c_l| \|\chi_l\|_{p,\mu} \|\chi_l\|_{q,\nu} = \sum_{l=1}^n |c_l| \mu\{t_l\}^{1/p} \nu(t_l)^{1/q}. \quad (3.1)$$

В то же время, очевидно,

$$I(U) = \sum_{l=1}^n c_l \chi_l \in \ell_r(\mathcal{A}, w).$$

Поэтому $I(U)$ – это функция, равная c_l в t_l и равная нулю в остальных точках. Отсюда

$$\|I(U)\|_{1(w)} = \sum_{l=1}^n |c_l| \lambda(\{t_l\})^{1/r}. \quad (3.2)$$

Далее, согласно (2.1) и (2.3) для каждого $t \in \mathcal{A}$ выполнено $\nu(\{t\}) = f(t)\mu(\{t\})$, и поэтому

$$\lambda(\{t\}) = f(t)^{p/(p+q)} \mu(\{t\}) = f(t)^{-q/(p+q)} \nu(\{t\}).$$

Следовательно, с учетом (2.2) выполнено

$$\begin{aligned} \lambda(\{t\})^{1/r} &= \lambda(\{t\})^{1/p} \lambda(\{t\})^{1/q} \\ &= [f(t)^{p/(p+q)} \mu(\{t\})]^{1/p} [f(t)^{-q/(p+q)} \nu(\{t\})]^{1/q} = \mu(\{t\})^{1/p} \nu(\{t\})^{1/q}. \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая (3.1) и (3.2), мы видим, что $\|I(U)\|_{1(w)} \geq \|U\|_{\otimes}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (iii). Объединяем пп. (i), (ii) с предложениями 1.4 и 2.2.

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

Однако утверждение (iii) может оказаться неверным, если имеет место хотя бы одно из равенств $p = \infty$ или $q = \infty$.

Положим $\mathbb{N}_{\infty} := \{1/n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ и рассмотрим меру μ_* на $\mathbb{N}_{\infty}$ такую, что $\mu_*\{1/n\} := 1/2^{n+1}$ и $\mu_*\{0\} := 1/2$.

КОНТРПРИМЕР 3.2. Для любого q , $1 \leq q \leq \infty$, оператор

$$J: L_{\infty}(\mu_*) \otimes_C L_q(\mu_*) \rightarrow L_{\infty}(\mu_*),$$

действующий как I из теоремы 3.1 (i) (теперь $p := \infty$ и $\mu = \nu := \mu_*$), не является изометрическим изоморфизмом; более того, он не инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $J = IT_{C,B}$, где $T_{C,B}$ – соответствующий специальный случай оператора из п. 1. Поэтому достаточно показать, что $T_{C,B}$ не инъективен.

Очевидно, $L_{\infty}(\mu_*)$ – это пространство всех ограниченных функций на множестве $\mathbb{N}_{\infty}$, а $C_0(\mathbb{N}_{\infty}) = C(\mathbb{N}_{\infty})$ – его собственное замкнутое подпространство. Обозначим через χ_0 и χ_c характеристические функции множеств $\{0\}$ и $\mathbb{N}_{\infty} \setminus \{0\}$. Пусть f – ограниченный функционал на $L_{\infty}(\mu_*)$, равный 0 на $C(\mathbb{N}_{\infty})$ и 1 в χ_c . Возьмем

$$U := \chi_c \otimes_C \chi_0 \in L_{\infty}(\mu_*) \otimes_B L_q(\mu_*)$$

и билинейный функционал

$$g: L_\infty(\mu_*) \times L_q(\nu_*) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto f(x)y(0).$$

Разумеется, g ограничен, и $g(\chi_c, \chi_0) = 1$. Далее, если для $b \in C(\mathbb{N}_\infty)$ выполнено $b(0) = 0$, то $b \cdot x \in C(\mathbb{N}_\infty)$ для всех $x \in L_\infty(\mu_*)$. Отсюда, поскольку каждый $a \in C(\mathbb{N}_\infty)$ имеет вид $b + a(0)\mathbf{1}$ для подобного b , выполнено

$$f((a(0)\mathbf{1}) \cdot x)y(0) = f(x)[a \cdot y](0).$$

Это означает, что g сбалансирован относительно алгебры $C(\mathbb{N}_\infty)$, и поэтому $U \neq 0$. Однако

$$T_{C,B}(U) = \chi_c \otimes_B \chi_0 = \chi_c \cdot \chi_c \otimes_B \chi_0 = \chi_c \otimes_B \chi_c \chi_0 = 0.$$

Дальше ясно.

В то же время, если $q < \infty$, то для некоторых Ω и μ вполне может случиться так, что соответствующий оператор

$$J: L_\infty(\mu) \otimes_C L_q(\mu) \rightarrow L_q(\mu)$$

– изометрический изоморфизм. Это легко показать на примере ℓ_∞ и ℓ_q , т.е. $\Omega := \mathbb{N}$ и считающей меры. То же верно (хотя доказывается сложнее) для $\Omega := [0, 1]$ и стандартной меры Лебега.

Что же касается случая $p = q = \infty$, то здесь ситуация в целом нам не ясна. Даже для стандартной меры Лебега на отрезке мы не знаем, является ли наш J изометрическим изоморфизмом. Однако “плохие” J заведомо встречаются.

КОНТРПРИМЕР 3.3. Оператор

$$J: \ell_\infty \otimes_C \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty: x \otimes_C y \mapsto xy$$

не инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теперь достаточно показать, что

$$T_{C,B}: \ell_\infty \otimes_C \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty \otimes_B \ell_\infty$$

не инъективен. Обозначим через $\mathbf{1}_o$ последовательность $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ и положим $\mathbf{1}_e := \mathbf{1} - \mathbf{1}_o$. Рассмотрим функционалы $f, f': \ell_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что

$$f = f' = 0 \quad \text{на} \quad c_0 \quad \text{и} \quad f(\mathbf{1}_o) = f'(\mathbf{1}_e) = 1.$$

Как легко видеть, билинейный функционал

$$g: \ell_\infty \times \ell_\infty \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto f(x)f'(y),$$

ограничен, c_0 -сбалансирован и $g(\mathbf{1}_o, \mathbf{1}_e) = 1$. Отсюда $\mathbf{1}_o \otimes_C \mathbf{1}_e \neq 0$ в $\ell_\infty \otimes_C \ell_\infty$. Но с другой стороны,

$$\mathbf{1}_o \otimes_B \mathbf{1}_e = \mathbf{1}_o \cdot \mathbf{1}_o \otimes_B \mathbf{1}_e = \mathbf{1}_o \otimes_B \mathbf{1}_o \mathbf{1}_e = 0.$$

4. Мультипликаторы в классе L_p . Пусть X и Y – нормированные левые модули над нормированной алгеброй A . По традиции (ср., например, [5]), ограниченный морфизм A -модулей из X в Y называется *мультипликатором*. Нормированное подпространство пространства всех ограниченных операторов из X в Y , состоящее из мультипликаторов, мы обозначим через $\mathbf{h}_A(X, Y)$.

Мультипликаторы тесно связаны с тензорными произведениями посредством закона сопряженной ассоциативности (ср. начало статьи). Для случая коммутативной A он формулируется следующим образом.

Существует единственный изометрический изоморфизм A -модулей

$$J_{X,Y}: \left(X \bigotimes_A Y \right)^* \rightarrow \mathbf{h}_A(X, Y^*), \quad (4.1)$$

переводящий функционал F на $X \bigotimes_A Y$ в мультипликатор φ , который сопоставляет элементу $x \in X$ функционал G на Y по правилу

$$G(y) = F\left(x \bigotimes_A y\right), \quad y \in Y.$$

Сейчас нас интересуют мультипликаторы в случае $A := B(\Omega), C_0(\Omega)$ и модулей $X := L_p(\mu), Y := L_q(\nu)$, где Ω, p, q, μ, ν , а также встречающиеся далее $f, \Omega_1, \Omega_0, \mathcal{A}, w$ – те же, что и в п. 3. Для указанных алгебр $A := C_0(\Omega)$ мы будем использовать для соответствующих пространств мультипликаторов символы $\mathbf{h}_B(\cdot, \cdot)$ и $\mathbf{h}_C(\cdot, \cdot)$. Нам пригодится

ЛЕММА 5. *Если задан $\varphi \in \mathbf{h}_B(L_p(\mu), L_q(\nu))$, то для каждого $x \in L_p(\mu)$ функция $\varphi(x)$ равна нулю (с точностью до эквивалентности) вне Ω_0 . Как следствие, мы вправе считать, что $\nu = \nu_0$ (и, таким образом, $d\nu = fd\mu$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем характеристическую функцию χ множества Ω_1 , которое мы вправе считать борелевским. Тогда выполнено

$$\varphi(x) = \varphi(\chi \cdot x) = \chi \cdot \varphi(x).$$

Далее, согласно (2.1), мы можем считать, что $x = 0$ вне Ω_1 . Отсюда $\varphi(x) = 0$ вне Ω_1 . С другой стороны, опять согласно (2.1), $\varphi(x) = 0$ на $\Omega_1 \setminus \Omega_0$.

Теперь введем для заданных p, q, f число s , такое, что $1/s = 1/q - 1/p$, или $s := \infty$ при $p = q$. Далее, в случае $p > q$ вводим регулярную меру θ на Ω , определенную равенством $d\theta = f^{p/(p-q)} d\mu$.

Если же $p = q$, то обозначаем через $L_{\infty, \mu, \nu}$ пространство μ -измеримых функций z на Ω таких, что $zf^{1/p} \in L_\infty(\mu)$, и полагаем

$$\|z\|_{\infty, \mu, \nu} := \|zf^{1/p}\|_{\infty, p}.$$

Наконец, если $p < q$, то для $t \in \mathcal{A}$ полагаем $\tilde{w}(t) := f^{1/q}(t)\mu(\{t\})^s$ и вводим пространство $\ell_{\infty, \tilde{w}}$ функций z на Ω таких, что $z = 0$ вне $\mathcal{A}$ и $z\tilde{w}$ ограничена. Далее, полагаем

$$\|z\|_{\infty(\tilde{w})} := \sup\{|z\tilde{w}(t)| : t \in \mathcal{A}\}.$$

Очевидно, пространства $L_{\infty, \mu, \nu}$, $\ell_{\infty, \tilde{w}}$ и – при $s \geq 1 - L_s(\theta)$ суть банаховы $B(\Omega)$ -и $C_0(\Omega)$ -модули относительно поточечного внешнего умножения.

ТЕОРЕМА 4.1. (i) Для всевозможных p, q, μ, ν каждый мультипликатор φ из $L_p(\mu)$ в $L_q(\nu)$ действует как поточечное умножение $x \mapsto xz$, где z – борелевская функция, равная 0 вне Ω_0 , а при $p < q$, более того, равная нулю вне $\mathcal{A}$.

(ii) При этом, если $p > q$ (соответственно $p = q, p < q$), то указанная z (с точностью до эквивалентности) необходимо лежит в $L_s(\theta)$ (соответственно в $L_{\infty, \mu, \nu}$, в $\ell_{\infty, \tilde{w}}$). Далее, эта функция однозначно определена мультипликатором φ как элемент соответствующего пространства. Наконец, сопоставление $\varphi \mapsto z$ является изометрическим $B(\Omega)$ -модульным изоморфизмом модуля $\mathbf{h}_B(L_p(\mu), L_q(\nu))$ на $L_s(\theta)$ (соответственно на $L_{\infty, \mu, \nu}$, на $\ell_{\infty, w}$).

(iii) Если, вдобавок, $p < \infty$, то все сказанное остается верным при замене базовой алгебры $B(\Omega)$ на $C_0(\Omega)$.

Перед доказательством этой теоремы мы также выделим два наглядных частных случая.

ПРИМЕР 3. Для модулей ℓ_p, ℓ_q , упомянутых перед доказательством теоремы 3.1, выполнено

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{c_0}(\ell_p, \ell_q) &= \mathbf{h}_{\ell_{\infty}}(\ell_p, \ell_q) = \ell_s, & \text{если } p \geq q, \\ \mathbf{h}_{c_0}(\ell_p, \ell_q) &= \mathbf{h}_{\ell_{\infty}}(\ell_p, \ell_q) = \ell_{\infty}, & \text{если } p < q. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Для модуля $L_1[0, 1]$, упомянутого там же, и аналогично определяемого модуля $L_2[0, 1]$, выполнено

$$\mathbf{h}_{C[0,1]}(L_1[0, 1], L_2[0, 1]) = \mathbf{h}_{B[0,1]}(L_1[0, 1], L_2[0, 1]) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (i). Ясно, что реализуется хотя бы одна из трех возможностей: либо $q > 1$, либо $p = \infty$, либо одновременно $p < \infty$ и $q = 1$.

Случай $q > 1$. Работает теорема Рисса: для каждой $x \in L_p(\mu)$ функция $\varphi(x)$ может быть отождествлена с ограниченным функционалом на $(L_{q'}(\nu))$, $1/q + 1/q' = 1$, действующим по правилу

$$\langle y, \varphi(x) \rangle = \int_{\Omega} \varphi(x) y d\nu, \quad y \in L_{q'}(\nu). \quad (4.2)$$

Далее, закон сопряженной ассоциативности (см. (4.1)) доставляет единственный ограниченный функционал F на $L_p(\mu) \otimes_B L_{q'}(\nu)$ такой, что

$$\langle y, \varphi(x) \rangle = F(x \otimes_B y) \quad \text{для всех } x \in L_p(\mu), \quad y \in L_{q'}(\nu). \quad (4.3)$$

Возьмем s' такое, что $1/s' := 1/p + 1/q'$, т.е. $1/s' + 1/s = 1$. С этого момента мы рассуждаем по-разному для двух возможных “подслучаев”.

Подслучай $p \geq q > 1$. Теперь $s' \geq 1$, и мы можем применить теорему 3.1 (i). Она дает изометрический изоморфизм

$$I: L_p(\mu) \otimes_B L_{q'}(\nu) \rightarrow L_{s'}(\gamma),$$

где $d\gamma = f^{p/(p+q')} d\mu$, и I корректно определен правилом $x \otimes_B y \mapsto xy$. Далее, из $p \geq q > 1$ вытекает $s > 1$, а потому $s' < \infty$. Поэтому, отождествляя $L_p(\mu) \otimes_B L_{q'}(\nu)$ с $L_{s'}(\gamma)$ и снова применяя теорему Рисса, мы получаем, что для каждой $x \in L_p(\mu)$ найдется единственная $v \in L_s(\gamma)$ такая, что

$$F(x \otimes_B y) = \int_{\Omega} xyv d\gamma = \int_{\Omega} xyv f^{p/(p+q')} d\mu. \quad (4.4)$$

Так как $d\nu = f d\mu$ (см. лемму), последний интеграл может быть переписан как $\int_{\Omega} xyz d\nu$, где z – произвольная борелевская функция, равная почти всюду по ν функции $f^{p/(p+q')} f^{-1}v$. Поэтому мы можем считать, что $z = 0$ вне Ω_0 .

Объединяя сказанное с (4.2) и (4.3), мы получаем $\int_{\Omega} \varphi(x)y d\nu = \int_{\Omega} xyz d\nu$ для всех $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_{q'}(\nu)$. Отсюда $\varphi(x) = xz$ почти всюду на Ω относительно ν .

Подслучай $p < q$. Теперь $q > 1$ и $s' < 1$, так что мы можем применить теорему 3.1 (ii) с s' и q' в качестве r и q . Соответственно, делая те же замены в определении пространств $\ell_1(\mathcal{A}, w)$, получаем некоторую функцию w' на $\mathcal{A}$ и пространство $\ell_1(\mathcal{A}, w')$. Возникает изометрический изоморфизм

$$I: L_p(\mu) \otimes_B L_{q'}(\nu) \rightarrow \ell_1(\mathcal{A}, w'),$$

корректно определенный тем, что он переводит $x \otimes_B y$, $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_{q'}(\nu)$, в ограничение функции xy на $\mathcal{A}$. Очевидно, каждый ограниченный функционал на $\ell_1(\mathcal{A}, w')$ действует по правилу $\tilde{z} \mapsto \sum \{\tilde{z}(t)z'(t) : t \in \mathcal{A}\}$ для однозначно определенной функции z' на $\mathcal{A}$ такой, что $z'w'$ ограничена.

Мы видим, что для каждого $x \in L_p(\mu)$ и $F \in (L_p(\mu) \otimes_B L_{q'}(\nu))^*$ найдется единственная z' с указанными свойствами такая, что

$$F(x \otimes_B y) = \sum \{x(t)y(t)z'(t) : t \in \mathcal{A}\}.$$

Объединяя это с (4.2) и (4.3), получаем равенство

$$\int_{\Omega} \varphi(x)y d\nu = \sum \{x(t)y(t)z'(t) : t \in \mathcal{A}\}$$

для всех $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_{q'}(\nu)$. Теперь введем функцию z на Ω такую, что $z(t) = 0$ при $t \notin \mathcal{A}$, и $z(t) = z'(t)\nu(\{t\})^{-1}$ при $t \in \mathcal{A}$. Разумеется,

$$\sum \{x(t)y(t)z'(t) : t \in \mathcal{A}\} = \int_{\Omega} xyz d\nu,$$

и поэтому

$$\int_{\Omega} \varphi(x)y d\nu = \int_{\Omega} xyz d\nu$$

для всех $x \in L_p(\mu)$, $y \in L_{q'}(\nu)$. Отсюда $\varphi(x) = xz$ почти всюду на Ω относительно ν .

Случай $p = \infty$. Поскольку $\mathbf{1}_{\mu} \in L_{\infty}(\mu)$, мы можем положить $z := \varphi(\mathbf{1}_{\mu})$ и считать, что z – борелевская функция, равная согласно лемме нулю вне Ω_0 . Поэтому для каждого $x \in L_{\infty}(\mu)$ выполнено

$$\varphi(x) = \varphi(x^{\diamond} \cdot \mathbf{1}_{\mu}) = x^{\diamond} \cdot \varphi(\mathbf{1}_{\mu}) = xz.$$

Случай $q = 1$, $p < \infty$. Рассмотрим сопряженный морфизм $\varphi^*: L_1(\nu)^* \rightarrow L_p(\mu)^*$, т.е. по теореме Рисса $\varphi^*: L_\infty(\nu) \rightarrow L_{p'}(\mu)$, где $1/p + 1/p' = 1$. Мы оказались в рамках предыдущего случая, только с φ^* , p' , ν и μ в роли соответственно φ , q , μ и ν . Это означает, что есть борелевская функция z' , равная нулю вне Ω_0 и такая, что для каждого $v \in L_\infty(\nu)$ выполнено $\varphi^*(v) = vz'$. Далее, функционал на $L_1(\nu)$, отождествляемый с v , удовлетворяет равенству

$$\langle \varphi(x), v \rangle = \int v \varphi(x) d\nu, \quad x \in L_p(\mu), \quad (4.5)$$

а для функционала на $L_p(\mu)$, отождествляемого с $xvz' \in L_{p'}(\mu)$, выполнено

$$\langle x, \varphi^*(v) \rangle = \langle x, vz \rangle = \int x v z' d\mu, \quad x \in L_p(\mu). \quad (4.6)$$

Но мы помним, что $\langle x, \varphi^*(v) \rangle = \langle \varphi(x), v \rangle$. Объединяя это с (4.5) и (4.6), получаем равенство $\int_\Omega v \varphi(x) d\nu = \int_\Omega x v z' d\mu$. Наконец, поскольку $z' = 0$ вне Ω_0 , последнее равенство превращается в $\int_\Omega v \varphi(x) d\nu = \int_\Omega v x z d\nu$, где $z := f^{-1}z'$ на Ω_0 и $z = 0$ вне Ω_0 . Так как v – произвольная функция из $L_\infty(\nu)$, это влечет то, что $\varphi(x) = xz$ почти всюду по ν . Доказательство п. (i) закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (ii). Снова мы рассуждаем чуть по-разному в различных случаях.

Пусть сначала $p > q$. Теперь $s > 1$. Рассмотрим в предложении 2.1 s и θ в качестве q и ν . Тогда мы получаем q в качестве r и, как показывают простые выкладки, меру ν_0 в качестве λ . Берем функцию z , доставляемую п. (i). Поскольку x пробегает все $L_p(\mu)$, из предложения 2.1 (iv) следует, что $z \in L_s(\theta)$. Возникает корректно определенный оператор $J: L_s(\theta) \rightarrow \mathbf{h}_B(L_p(\mu), L_q(\nu))$, переводящий z в мультипликатор, действующий как $x \mapsto xz$. В силу предложения 2.1 (ii) J – изометрический оператор.

Теперь пусть $p = q$. Рассмотрев в предложении 2.1 ∞ и μ в качестве q и ν , мы получаем p и μ в качестве r и λ . Берем функцию z , доставляемую п. (i). Тогда, рассуждая так же, как в предыдущем абзаце, получаем, что $xzf^{1/p} \in L_p(\mu)$, откуда $zf^{1/p} \in L_\infty(\mu)$ и $z \in L_{\infty, \mu, \nu}$. Снова возникает изометрический оператор, на этот раз $J: L_{\infty, \mu, \nu} \rightarrow \mathbf{h}_B(L_p(\mu), L_q(\nu))$.

Наконец, пусть $p < q$. Теперь $z(t) = 0$ вне $\mathcal{A}$. Поэтому, как легко видеть, включение $xz \in L_q(\nu)$ означает в точности, что функция $x(t)z(t)\nu(\{t\})^{1/q}$, $t \in \mathcal{A}$, лежит в $\ell_q(\mathcal{A})$. Она же, очевидно, совпадает с $[x(t)\mu(\{t\})^{1/p}]\tilde{w}(t)$, где, разумеется, функция $x(t)\mu(\{t\})^{1/p}$, $t \in \mathcal{A}$, лежит в $\ell_p(\mathcal{A})$ и пробегает все это пространство, когда x пробегает $L_p(\mu)$. Отсюда с учетом $p < q$ мы видим, что необходимо выполнено $z(t)\tilde{w} \in \ell_\infty(\mathcal{A})$, т.е. $z \in \ell_{\infty, \tilde{w}}$. Возникает отображение $J: \ell_{\infty, \tilde{w}} \rightarrow \mathbf{h}_B(L_p(\mu), L_q(\nu))$, переводящее z в мультипликатор $x \mapsto xz$.

Теперь заметим, что $J(z)$ легко представим в виде композиции операторов из цепи

$$L_p(\mu) \rightarrow \ell_p(\mathcal{A}) \rightarrow \ell_q(\mathcal{A}) \rightarrow L_q(\nu),$$

в которой первый оператор коизометрический, третий – изометрический, а норма второго в силу $p < q$ равна норме z в $\ell_{\infty, \tilde{w}}$. Отсюда $\|J(z)\|$ совпадает с последней нормой, а это значит, что J – изометрический оператор.

Итак, во всех трех случаях мы получаем изометрический оператор J , который на основании п. (i) сюръективен. К тому же ясно, что J – это $B(\Omega)$ -модульный морфизм. Остается в качестве изоморфизма, обещанного в формулировке, взять обратный к J .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО п. (iii). Если $q < \infty$, то утверждение немедленно следует из пп. (i), (ii) и предложений 1.5 и 2.2. Пусть теперь $q = \infty$. Тогда закон сопряженной ассоциативности вместе с теоремой 3.1 (iii) доставляет следующую цепь изометрических изоморфизмов:

$$\mathbf{h}_C(L_p(\mu), L_\infty(\nu)) = (L_p(\mu) \otimes_C L_1(\nu))^* = (L_p(\mu) \otimes_B L_1(\nu))^* = \mathbf{h}_B(L_p(\mu), L_\infty(\nu)).$$

Доказательство теоремы 4.1 завершено.

Подобно теореме 3.1 в случае $p = \infty$ утверждение (iii) может быть ложно.

КОНТРИМЕР 4.2. Найдутся Ω , μ , q , $1 \leq q < \infty$, и ν такие, что не всякий мультипликатор в $\mathbf{h}_B(L_\infty(\mu), L'_q(\nu))$ действует как умножение по рецепту теоремы 4.1 (i).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем из контрпримера 3.2, что возможна ситуация, когда оператор

$$I: L_\infty(\mu) \otimes_C L_{q'}(\nu) \rightarrow L_{q'}(\nu), \quad x \otimes_C y \mapsto xy,$$

из теоремы 3.1 не инъективен. Тогда его сопряженный

$$I^*: (L_{q'}(\nu))^* \rightarrow (L_\infty(\mu) \otimes_C L_{q'}(\nu))^*,$$

конечно, не сюръективен. Применяя теорему Рисса и закон сопряженной ассоциативности, мы видим, что I^* изометрически эквивалентен оператору $J: L_q(\nu) \rightarrow \mathbf{h}_B(L_\infty(\mu), L_q(\nu))$, $1/q + 1/q' = 1$, где J переводит функцию z в оператор, точнее, $B(\Omega)$ -модульный морфизм, действующий по правилу $x \mapsto xz$; $x \in L_\infty(\mu)$. Отсюда J не сюръективен. Дальше ясно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Контрпример 3.2 позволяет предъявить конкретный мультипликатор в $\mathbf{h}_C(L_\infty(\mu_*), L_q(\mu_*))$, не действующий по рецепту теоремы 4.1 (i). А именно, напомним о фигурирующих там χ_0 , χ_c и f . “Плохим” мультипликатором оказывается морфизм $\varphi: L_\infty(\mu_*) \rightarrow L_q(\mu_*)$, переводящий x в $f(x)\chi_0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Я. Хелемский, “Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей”, *Матем. сб.*, **204**:7 (2013), 127–158.
- [2] A. Ya. Helemskii, “Extreme flatness of normed modules and Arveson–Wittstock type theorems”, *J. Operator Theory*, **64**:1 (2010), 171–188.
- [3] A. Ya. Helemskii, “Extreme version of projectivity for normed modules over sequence algebras”, *Canad. J. Math.*, **65**:3 (2013), 559–574.
- [4] M. A. Rieffel, “Induced Banach representations of Banach algebras and locally compact groups”, *J. Funct. Anal.*, **1** (1967), 443–491.
- [5] M. A. Rieffel, “Multipliers and tensor products of L^p -spaces of locally compact groups”, *Studia Math.*, **33** (1969), 71–82.
- [6] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004.

- [7] А. Я. Хелемский, *Баначовы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989.
- [8] H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **24**, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [9] В. И. Богачев, *Основы теории меры*, Т. 1, РХД, М.–Ижевск, 2006.
- [10] Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры, интегрирование мер*, Элементы математики, Наука, М., 1967.
- [11] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962.

А. Я. Хелемский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: helemskii@rambler.ru

Поступило

08.09.2012

Исправленный вариант

13.10.2013