Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Левенштам, Асимптотическое интегрирование линейной параболической задачи с высокочастотными коэффициентами в критическом случае, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 522–538

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:45:10

Асимптотическое интегрирование линейной параболической задачи с высокочастотными коэффициентами в критическом случае

В. Б. Левенштам

Для линейного параболического уравнения второго порядка с высокочастотными коэффициентами построена и обоснована полная асимптотика периодического по времени решения. Предельная усредненная стационарная задача предполагается вырожденной.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10142

1. Введение. В теории метода усреднения Крылова–Боголюбова (см., например, [1]) один из ключевых результатов состоит в построении и обосновании полной асимптотики периодического по времени решения нелинейного дифференциального уравнения с высокочастотными членами в окрестности невырожденного стационарного решения усредненной задачи. Данный результат получен как для нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1]), так и для параболических и ряда иных эволюционных задач в частных производных (см. [2]–[6]).

В работах [7], [8] построена и обоснована полная асимптотика периодического решения нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с высокочастотными коэффициентами, для которой матрица A стационарной усредненной задачи имеет простое нулевое собственное значение. При этом существенно используется методика, развитая в работе [9], где рассматриваются стационарные возмущенные задачи, у которых предельные задачи вырождены. В частности, в [7] по данным возмущенной системы построена некоторая матрица B и предполагается, что собственный вектор a_0 , отвечающий нулевому собственному значению A , не имеет обобщенных присоединенных (в смысле [9]) относительно пары матриц A, B векторов; в [8] в предположении, что указанное условие [7] нарушено, построена дополнительно матрица C и предполагается, что a_0 не имеет обобщенных присоединенных векторов относительно тройки матриц A, B, C .

В работе [10] результаты [7], [8], относящиеся к построению формальных асимптотик (часто говорят: “формальных решений” – см., например, [11; с. 190]), перенесены на случай линейных параболических задач второго порядка. При этом в [10]

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00402-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (заявки 2012-1.1-12-000-1003-1775, 2012-1.2.1-12-000-1001-4594).

дифференциальные выражения с высокочастотными коэффициентами могут быть нулевого или первого порядка.

В данной работе основные результаты [7] об асимптотиках перенесены на случай линейных параболических задач второго порядка с полным обоснованием. Для простоты мы рассматриваем высокочастотные дифференциальные выражения только нулевого порядка. В работе существенно используется методика упоминавшейся работы [9], метод пограничного слоя [12], элементы теории параболических задач [13]–[15] и теории полугрупп линейных операторов [16]–[18]. Результаты данной работы легко переносятся на случай параболических задач произвольного порядка $2k$, $k \in \mathbb{N}$.

2. Постановка задачи. В цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о классических $(2\pi/\omega)$ -периодических по времени t решениях линейного параболического уравнения второго порядка с большим параметром ω и с граничными условиями Дирихле

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \left(L_0 + \frac{1}{\omega} L_1 \right) u(x, t) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} (g_k u(x, t) + d_k(x)) e^{ik\omega t} + d_0(x), \quad (1)$$

$$u(x, t)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Здесь Ω – ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}$, L_0 и L_1 – дифференциальные выражения второго порядка, $g_k(x)$, $d_0(x)$ и $d_k(x)$ – бесконечно дифференцируемые на $\bar{\Omega}$ функции, $1 \leq |k| \leq m$, причем g_k и g_{-k} , а также d_k и d_{-k} комплексно сопряжены. Дифференциальные выражения L_0 и L_1 имеют вид

$$\begin{aligned} L_0 u(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^0(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c^0(x) u(x), \\ L_1 u(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^1(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^1(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c^1(x) u(x), \end{aligned}$$

где $a_{ij}^k(x)$, $b_i^k(x)$, $c^k(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ – вещественные функции, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 0, 1$. Выражение L_0 при этом, эллиптическое, т.е. для любого $x \in \bar{\Omega}$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 \xi_i \xi_j > 0. \quad (3)$$

Будем предполагать, что задача

$$\begin{cases} L_0 v(x) = 0, \\ v(x)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное классическое решение $a_0(x)$, нормированное в пространстве $L_2(\Omega)$ ($\|a_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$). Как известно [13], [14; п. 6.2.3], в этом случае формально сопряженная задача

$$\begin{cases} L_0^* u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

также имеет единственное классическое нормированное в $L_2(\Omega)$ решение $z_0(x)$. Введем в рассмотрение дифференциальное выражение второго порядка

$$Mu(x) \equiv L_1u(x) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} \frac{g_{-k}g_k u(x)}{ik} \equiv L_1u(x) + M_0u(x). \quad (4)$$

Отметим, что в отличие от случаев, когда g_k – матрицы [7], [8] и когда g_k – дифференциальные выражения первого порядка [10], здесь $M_0 \equiv 0$, так что $M = L_1$. Предположим, что задача

$$\begin{cases} L_0v(x) = -Ma_0(x), \\ v(x)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

не имеет классических решений. Последнее, согласно альтернативе Фредгольма [13], [14; п. 6.3.2] равносильно неравенству

$$(Ma_0(x), z_0(x)) \neq 0. \quad (5)$$

В работе будут доказаны существование и единственность $(2\pi/\omega)$ -периодического по времени t решения задачи (1), (2), а также разработан и обоснован эффективный алгоритм построения его полной асимптотики.

3. Основной результат. В некоторой погранполоске области Ω перейдем к криволинейной системе координат. Точнее говоря, в области Ω выберем пограничную подобласть Ω_η толщины η и определим отображение $\partial\Omega \times [0, \eta] \rightarrow \bar{\Omega}_\eta$, действующее по закону $(\psi, r) \rightarrow \psi + n_\psi r$, где ψ – точка на $\partial\Omega$, имеющая местную координату ψ , а n_ψ – вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке ψ . При этом число η выберем столь малым, чтобы указанные нормали в Ω_η не пересекались. В погранполосе Ω_η сделаем замену переменных

$$x = x(\psi, r) = x\left(\psi, \frac{\rho}{\sqrt{\omega}}\right), \quad \rho = r\sqrt{\omega}.$$

Асимптотическое разложение $(2\pi/\omega)$ -периодического по времени t решения задачи (1), (2) будем строить в виде

$$u(x, t) = \omega c_{-2}a_0(x) + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-k/2}(u_k(x) + w_k(\psi, \rho) + c_k a_0(x) + y_k(x, \tau) + z_k(\psi, \rho, \tau)),$$

$$\rho = r\sqrt{\omega}, \quad \tau = \omega t. \quad (6)$$

Здесь $c_k \in \mathbb{R}$, $u_k: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ и $y_k: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – регулярные, а $w_k(\psi, \rho)$ и $z_k(\psi, \rho, \tau)$ – погранслоиные функции (терминология работы [12]), т.е.

$$w_k(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0, \quad z_k(\psi, \rho, \tau)|_{\rho=\infty} = 0.$$

При этом функции $y_k(x, \tau)$, $z_k(\psi, \rho, \tau)$ 2π -периодичны по τ с нулевым средним, т.е.

$$\langle y_k(x, \cdot) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_k(x, \tau) d\tau = 0, \quad \langle z_k(\psi, \rho, \cdot) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_k(\psi, \rho, \tau) d\tau = 0.$$

Напомним, что, как принято в методе пограничного слоя [12], погранслоиные функции w_k и z_k первоначально нужно определить лишь в погранполоске Ω_η , т.е.

при $0 < \rho < \eta\sqrt{\omega}^1$. После этого они продолжаются нулем внутрь $\bar{\Omega}$ и умножаются на срезающую бесконечно дифференцируемую функцию

$$\chi(\psi, \rho) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq r \leq \eta/2, \\ 0, & \text{при } r \geq \eta. \end{cases}$$

Прежде чем сформулировать основной результат, определим четыре типа линейных задач:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} L_0 u(x) = P(x), \\ (P(x), z_0(x)) = 0, \\ (u(x), z_0(x)) = 0, \\ u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} & 2) \quad & \begin{cases} \frac{\partial y(x, \tau)}{\partial \tau} = f(x)e^{ik\tau}, \\ \langle y(x, \tau) \rangle = 0, \end{cases} \\ 3) \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 w(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} = B(\psi, \rho), \\ w(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0, \end{cases} & 4) \quad & \begin{cases} l_0(\psi) \frac{\partial^2 z(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} - ikz(\psi, \rho) = C(\psi, \rho), \\ z(\psi, \rho)|_{\rho=0} = 0, \\ z(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь

$$l_0(\psi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0(x) \frac{\partial x_i}{\partial r} \frac{\partial x_j}{\partial r} \Big|_{r=0} > 0,$$

$\psi \in \partial\Omega$ – параметр, $P(x)$, $f(x)$ – известные бесконечно гладкие на $\bar{\Omega}$ функции, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $B(\psi, \rho)$ и $C(\psi, \rho)$ – известные квазимногочлены по ρ , коэффициенты которых зависят от ψ . Указанные коэффициенты бесконечно гладкие по $\psi \in \partial\Omega$, а функции $B(\psi, \rho)$ и $C(\psi, \rho)$ погранслойные, т.е. $B(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0$ и $C(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0$. Задачи этих четырех типов, очевидно, однозначно разрешимы.

Ниже символом $C^{l,l/2}(\bar{Q}) = C^{l,l/2}$, где $l > 0$, будем обозначать гёльдерово пространство заданных в цилиндре $\bar{Q}$ вещественных функций с нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{l,l/2}} &= \sum_{2\mu+|\nu|=[l]} \sup_{\bar{Q}} \left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} u(x, t) \right| \\ &+ \sum_{2\mu+|\nu|=[l]} \sup_{\substack{(x',t), (x'',t) \in \bar{Q} \\ x' \neq x''}} \left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} [u(x'', t) - u(x', t)] \right| |x'' - x'|^{[l]-l} \\ &+ \sum_{0 < l - 2\mu + |\nu| < 2} \sup_{(x',t), (x'',t) \in \bar{Q}} \left| \frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_n^{\nu_n}} [u(x, t'') - u(x, t')] \right| |t'' - t'|^{(2\mu+\nu-l)/2}, \end{aligned}$$

(см. [15]). Введем еще обозначение частичной суммы ряда (6):

$$\begin{aligned} u_\omega^k &= \omega c_{-2} a_0(x) \\ &+ \sum_{s=-1}^k \omega^{-s/2} (u_s(x) + w_s(\psi, \rho) + c_s a_0(x) + y_s(x, \tau) + z_s(\psi, \rho, \tau)), \quad k \geq -1. \end{aligned}$$

¹ Ради удобства, задачи, описывающие погранслойные функции, доопределяют и исследуют на всем луче $\rho > 0$ (см. задачи 3), 4) ниже), хотя отмеченная выше связь ρ с r сохраняется лишь на участке $\rho \in [0, \eta\sqrt{\omega}]$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует число $\omega_0 > 0$, при котором справедливы следующие утверждения:*

- 1) задача (1), (2) при $\omega > \omega_0$ имеет единственное $(2\pi/\omega)$ -периодическое по времени t классическое вещественное бесконечно дифференцируемое решение $u_\omega(x, t)$;
- 2) построение любой частичной суммы u_ω^k ряда (6) сводится к решению конечного числа задач 1)–4);
- 3) ряд (6) является полным асимптотическим разложением решения $u_\omega(x, t)$, $\omega \gg 1$; более того, для любого $l \geq 0$ и любого целого $k \geq -1$ при $\omega \geq \omega_0$ справедлива оценка

$$\|u_\omega - u_\omega^k\|_{C^{l, l/2}} \leq c_{k, l} \omega^{-(k+1-l)/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенный в п. 2) теоремы список задач 1)–4) вполне характеризует процесс построения полной асимптотики решения u_ω . Однако, поскольку задачи 2)–4) элементарно и “вручную” решаются посредством конечного числа арифметических действий, то в п. 2) теоремы можно было бы говорить о сведении построения u_ω^k к решению конечного числа задач вида 1).

Доказательству теоремы посвящена остальная часть работы.

4. Вспомогательный материал. В этом пункте содержатся некоторые известные вспомогательные результаты, на которые мы опираемся в данной работе.

Рассмотрим задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad (7)$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (8)$$

Здесь Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$, коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию эллиптичности (3), а коэффициенты $b_i(x)$ и $c(x)$ ограничены.

В дальнейшем систематически будем использовать следующие хорошо известные пространства вещественных функций:

$$C^l := C^l(\bar{\Omega}), \quad H_0 \equiv L_2(\Omega), \quad H^i \equiv W_2^i(\Omega), \quad H_0^i \equiv W_{2,0}^i(\Omega), \quad i = 1, 2.$$

Напомним лишь определение пространств C^l и H_0^i , $i = 1, 2$.

Символом C^l , $l \geq 0$, обозначается пространство Гёльдера непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций, имеющих в Ω непрерывные производные до порядка $[l]$ ($[l]$ – целая часть l) включительно, которые продолжимы по непрерывности на $\bar{\Omega}$, причем продолженные производные порядка $[l]$ удовлетворяют равномерному условию Гёльдера с показателем $l - [l]$. Это пространство снабжено обычной нормой.

Символом H_0^1 обозначается замыкание по норме H^1 множества гладких финитных в Ω функций. Как известно (см., например, [14; п 5.5]), H_0^1 совпадает с множеством функций пространства H^1 , обращающихся на $\partial\Omega$ в нуль (т.е. их следы в $L_2(\partial\Omega)$ нулевые).

Символом H_0^2 обозначается множество функций $u \in H^2$, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Для всех функций $u \in H_0^2$ справедливо неравенство коэрцитивности (см. [13], [14; п. 6.3.2]):

$$\|u\|_{H^2} \leq c(\|Lu\|_{H^0} + \|u\|_{H^0}), \quad (9)$$

где константа $c > 0$ не зависит от u .

Символом A_0 обозначим действующий в H^0 линейный оператор с областью определения $D(A_0) = H_0^2$, $A_0 u = Lu$, $u \in D(A_0)$. Из неравенства (9), очевидно, следует его замкнутость A . Кроме того, согласно [16] существует такое число $a_0 > 0$, что множество $\operatorname{Re} \lambda \geq a_0$ комплексной плоскости принадлежит резольвентному множеству оператора A_0 и при этом справедлива оценка

$$\|(\lambda I - A_0)^{-1}\| \leq c(1 + |\lambda|), \quad \operatorname{Re} \lambda \geq a_0, \quad (10)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от λ . Из (10) следует (см. [16], [17]), что оператор A_0 инфинитезimalен, т.е. порождает аналитическую полугруппу линейных операторов e^{tA_0} , $t \geq 0$, так что справедливы равенства (см. [17]):

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tA_0} u = A_0 e^{tA_0} u, \quad u \in H^0, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$A_0 e^{tA_0} u = e^{tA_0} A_0 u, \quad u \in D(A_0), \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Нам понадобятся еще следующие неравенства. При любом фиксированном $T > 0$ справедливы оценки (см. [2], [17], [18])

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} e^{tA_0} u \right\|_{H^0} \leq ct^{-1/2} \|u\|_{H^0}, \quad \left\| e^{tA_0} \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\|_{H^0} \leq ct^{-1/2} \|u\|_{H^0}, \quad \text{где } t \in [0, T], \quad (13)$$

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} (e^{t_2 A_0} - e^{t_1 A_0}) u \right\|_{H^0} \leq ct_1^{-\mu-k/2} (t_2 - t_1)^\mu \|u\|_{H^0}, \quad (14)$$

$$i, j = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad 0 < t_1 < t_2 \leq T.$$

Из инфинитезимальности оператора A_0 следует, что его резольвентное множество $\rho(A_0)$ непусто. Поскольку вложение $W_2^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно, то при всех $\lambda \in \rho(A_0)$ резольвента $(\lambda I - A_0)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором. Решением задачи (7), (8) при $f \in L_2(\Omega)$ будем называть решение уравнения $A_0 u = f$. Из [14; п. 6.3.2] следует, что каждое решение этого уравнения является слабым решением задачи (1), (2), и наоборот.

Из [14; п. 6.3.2] вытекает также следующий результат. Если коэффициенты и свободный член уравнения (7) принадлежат пространству $C^\infty(\bar{\Omega})$ и граница $\partial\Omega \in C^\infty$, то слабое решение $u(x)$ задачи (7), (8) принадлежит пространству $C^\infty(\bar{\Omega})$.

5. Существование и единственность $(2\pi/\omega)$ -периодического по времени решения. В этом пункте докажем утверждение 1 теоремы.

Задачу (1), (2) перепишем в операторной форме:

$$\frac{du}{dt} = \left(A + \frac{1}{\omega} B \right) u + \sum_{0 < |k| \leq m} (M_k u + d_k) e^{ik\omega t} + d_0. \quad (15)$$

Здесь A , B и M_k – линейные операторы в H^0 с областями определения

$$D(A) = D(B) = H_0^2, \quad D(M_k) = H^0$$

такие, что

$$Au = L_0 u, \quad Bu = L_1 u, \quad M_k u = g_k(x)u.$$

Прежде чем рассматривать $(2\pi/\omega)$ -периодические решения уравнения (17), исследуем спектр оператора $A_\omega = A + (1/\omega)B$, $\omega \gg 1$. Из [19; гл. XII, с. 26, лемма] и неравенства коэрцитивности (9) следует, что множество операторов $A(\mu) = A + \mu B$, рассматриваемых при комплексных μ вблизи $\mu = 0$, является по терминологии [19; XII.1] аналитическим семейством типа (A) . Отсюда согласно теории Като–Реллиха [19; XII.1] в комплексной плоскости найдется окружность Γ_0 с центром в нуле, достаточно малого радиуса, такая, что при $\omega \gg 1$ внутри Γ_0 существует единственная точка λ_ω спектра $\sigma(A_\omega)$ оператора A_ω , которая является невырожденным собственным значением, аналитичным по $\mu = \omega^{-1}$. Этому собственному значению соответствует аналитический в метрике H_0^2 по μ собственный вектор a_ω . Таким образом,

$$\begin{aligned} \lambda_\omega &= \omega^{-1}\lambda_1 + \omega^{-2}\lambda_2 + \dots, & a_\omega &= a_0 + \omega^{-1}a_1 + \dots, \\ \left(A + \frac{1}{\omega}B\right)(a_0 + \omega^{-1}a_1 + \dots) &= (\omega^{-1}\lambda_1 + \omega^{-2}\lambda_2 + \dots)(a_0 + \omega^{-1}a_1 + \dots). \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда, в частности, следует равенство

$$Aa_1 = -Ba_0 + \lambda_1 a_0.$$

Умножая его скалярно на z_0 (см. п. 3), учитывая (5) и соотношение

$$(a_0, z_0) \neq 0, \quad (17)$$

находим

$$\lambda_1 = \frac{(Ba_0, z_0)}{(a_0, z_0)} \neq 0. \quad (18)$$

Напомним, что соотношение (17) следует из невырожденности собственного значения $\lambda = 0$ оператора A , поскольку в этом случае уравнение $Au = a_0$ неразрешимо. Пусть число $T_0 > 0$ удовлетворяет условию $e^{\lambda T_0} \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A)$, и пусть

$$T_\omega = \left\lceil T_0 \frac{\omega}{2\pi} \right\rceil \frac{2\pi}{\omega}.$$

Введем в рассмотрение спектральные проекторы (см. [19; XII.2]):

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} (\lambda I - A_\omega)^{-1} d\lambda, \quad Q_\omega = I - P_\omega, \quad \omega \gg 1. \quad (19)$$

В силу (16), (18)

$$\|(e^{T_\omega A_\omega} - I)^{-1} P_\omega\| = O(\omega^{-1}), \quad \|(e^{T_\omega A_\omega} - I)^{-1} Q_\omega\| = O(1), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Поскольку для оператора A выполнены все условия, наложенные на оператор A_0 в п. 4, то для A справедливы и все результаты, сформулированные в п. 4 для A_0 .

В частности, соотношения (10)–(14) справедливы и при замене A_0 на A . Более того, все указанные результаты п. 4 остаются справедливыми при замене A_0 на A_ω , $\omega \gg 1$, причем фигурирующие в оценках (10), (13), (14) константы можно считать не зависящими от ω . Нетрудно понять, что последнее утверждение относительно оценок (13), (14) является следствием такого же утверждения относительно (10). В случае (10) указанное утверждение следует из равномерной относительно λ , $\operatorname{Re} \lambda \geq a_0$, ограниченности оператора $B(\lambda I - A)^{-1}$ в H^0 , что вытекает из подчиненности оператора B оператору $(A - a_0 I)$ и представления

$$(\lambda I - A_\omega)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} [I - \omega^{-1} B(\lambda I - A)^{-1}]^{-1}, \quad \omega \gg 1.$$

Вернемся к уравнению (15). Поскольку его коэффициенты $(2\pi/\omega)$ -периодичны по t , то для доказательства существования и единственности $(2\pi/\omega)$ -периодического решения этого уравнения достаточно доказать указанные результаты для задачи о T_ω -периодических решениях уравнения (15).

Пусть вектор $g_\omega \in H^0$ удовлетворяет условиям

$$A_\omega^* g_\omega = \bar{\lambda}_\omega g_\omega, \quad (a_\omega, g_\omega) = 1,$$

где, как обычно, звездочкой обозначено операторное сопряжение, а чертой – числовое (комплексное) сопряжение. Тогда, очевидно, справедливы равенства

$$P_\omega^* g_\omega = g_\omega, \quad P_\omega u = (u, g_\omega) a_\omega, \quad Q_\omega u = u - (u, g_\omega) a_\omega. \quad (21)$$

В уравнении (15) сделаем замену переменных типа классической замены Крылова–Боголюбова [1]

$$\begin{aligned} u &= v + \sum_{0 \leq |k| \leq m} (ik\omega - A_\omega)^{-1} M_k e^{ik\omega t} v, & v &= v_1 + v_2, \\ v_1 &= P_\omega v = (v, g_\omega) a_\omega = \xi(t) a_\omega, & v_2 &= Q_\omega v. \end{aligned} \quad (22)$$

Получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - A_\omega v + \sum_{0 \leq |k| \leq m} (ik\omega - A_\omega)^{-1} M_k e^{ik\omega t} \frac{d}{dt} (v_1 + v_2) \\ = \sum_{0 < |k|, |l| \leq m} M_k (il\omega - A_\omega)^{-1} M_l v e^{i(k+l)\omega t} + \sum_{0 \leq |k| \leq m} d_k e^{ik\omega t}. \end{aligned} \quad (23)$$

Проектируя его на подпространства $H_1^0 = P_\omega H^0$, $H_2^0 = Q_\omega H^0$ ($H^0 = H_1^0 \oplus H_2^0$), придем к системе

$$\begin{aligned} (1 + \mu_\omega(t)) \frac{d\xi}{dt} - \lambda_\omega \xi \\ = - \sum_{0 \leq |k| \leq m} (ik\omega - \lambda_\omega)^{-1} \left(M_k \frac{dv_2}{dt}, g_\omega \right) e^{ik\omega t} \\ + \sum_{\substack{0 < |k|, |l| \leq m \\ k+l \neq 0}} (M_k (il\omega - A_\omega)^{-1} M_l (\xi a_\omega + v_2), g_\omega) e^{i(k+l)\omega t} \\ + \sum_{0 < |k| \leq m} (M_{-k} [(ik\omega - A_\omega)^{-1} - (ik\omega)^{-1}] M_k (\xi a_\omega + v_2), g_\omega) + \sum_{0 \leq |k| \leq m} (d_k, g_\omega) e^{ik\omega t}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dv_2}{dt} - A_\omega v_2 \\
&= - \sum_{0 < |k| \leq m} e^{ik\omega t} Q_\omega (ik\omega - A_\omega)^{-1} M_k \frac{d}{dt} (\xi a_\omega + v_2) \\
&+ \sum_{0 < |k|, |l| \leq m} Q_\omega M_k (il\omega - A_\omega)^{-1} M_l (\xi a_\omega + v_2) e^{i(k+l)\omega t} + \sum_{0 \leq |k| \leq m} Q_\omega d_k e^{ik\omega t} \\
&\equiv \Gamma_\omega(\xi, v_2) + D_\omega,
\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\mu_\omega = \sum_{0 < |k| \leq m} (ik\omega - \lambda_\omega)^{-1} (M_k a_\omega, g_\omega) e^{ik\omega t} = O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty. \tag{26}$$

Согласно (25)

$$\begin{aligned}
& \left(M_k \frac{dv_2}{dt}, g_\omega \right) = \left(\frac{dv_2}{dt}, \overline{M}_k g_\omega \right) \\
&= (v_2, A_\omega^* \overline{M}_k g_\omega) - \sum_{0 < |l| \leq m} e^{il\omega t} \frac{d}{dt} (\xi a_\omega + v_2, \overline{M}_l (il\omega - A_\omega)^{-1*} Q_\omega^* \overline{M}_k g_\omega) \\
&+ \sum_{0 < |l|, |s| \leq m} (\xi a_\omega + v_2, \overline{M}_s (is\omega - A_\omega)^{-1*} \overline{M}_l Q_\omega^* \overline{M}_k g_\omega) e^{(l+s)\omega t} \\
&+ \sum_{0 \leq |k| \leq m} (M_k Q_\omega d_k, g_\omega).
\end{aligned} \tag{27}$$

Отметим еще простое тождество

$$(ik\omega - A_\omega)^{-1} - (ik\omega)^{-1} = (ik\omega)^{-1} A_\omega (ik\omega - A_\omega)^{-1},$$

согласно которому третье слагаемое в правой части (24) имеет вид

$$\sum_{0 < |k| \leq m} (ik\omega)^{-1} (\xi a_\omega + v_2, \overline{M}_k (ik\omega - A_\omega)^{-1*} A_\omega^* \overline{M}_{-k} g_\omega) \equiv (\xi a_\omega + v_2, \varphi_\omega), \tag{28}$$

где

$$\|\varphi_\omega\|_{H^0} \leq c\omega^{-2}, \quad c = \text{const} > 0. \tag{29}$$

Равенство (24) с учетом (26)–(29) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{d\xi}{dt} - \lambda_\omega \xi \\
&= [(1 + \mu_\omega)^{-1} - 1] \lambda_\omega \xi \\
&+ (1 + \mu_\omega)^{-1} \left\{ \sum_{0 < |k| \leq m} e^{ik\omega t} (v_2, \nu_{k\omega}^{(1)}) + \sum_{0 \leq |s| \leq 2m} e^{is\omega t} \frac{d}{dt} (\xi a_\omega + v_2, \nu_{s\omega}^{(2)}) \right. \\
&\quad + \sum_{0 \leq |s| \leq 3m} e^{is\omega t} (\xi a_\omega + v_2, \theta_{s\omega}^{(1)}) + \sum_{0 < |s| \leq 2m} (\xi a_\omega + v_2, \theta_{s\omega}^{(2)}) e^{is\omega t} \\
&\quad \left. + (\xi a_\omega + v_2, \varphi_\omega) + \sum_{0 \leq |k| \leq m} (d_{k\omega}, g_\omega) e^{ik\omega t} \right\} \\
&\equiv \Gamma_\omega^{(1)}(\xi, v_2) + D_\omega^{(1)},
\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\|\nu_{s\omega}^{(1)}\| \leq c\omega^{-1}, \quad \|\nu_{s\omega}^{(2)}\| \leq c\omega^{-2}, \quad |Q_{s\omega}^{(1)}| \leq c\omega^{-2}, \quad |Q_{s\omega}^{(2)}| \leq c\omega^{-1}. \quad (31)$$

Здесь мы учли также, что A_ω^* является дифференциальным оператором второго порядка с бесконечно гладкими коэффициентами.

От задачи о T_ω -периодических по времени t решениях системы дифференциальных уравнений (30), (25) перейдем к эквивалентной ей (в случае классических решений) системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \xi(t) &= (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \int_0^{T_\omega} e^{\lambda_\omega(T_\omega+t-s)} [\Gamma_\omega^{(1)}(\xi(s), v_2(s)) + D_\omega^{(1)}] ds + \int_0^t e^{\lambda_\omega(t-s)} [\dots] ds \\ &\equiv A^{(1)}w + b_1, \\ v_2(t) &= (I - e^{A_\omega T_\omega})^{-1} \int_0^{T_\omega} Q_\omega e^{A_\omega(T_\omega+t-s)} [\Gamma_\omega(\xi(s), v_2(s)) + D_\omega] ds \\ &\quad + \int_0^t Q_\omega e^{A_\omega(t-s)} [\dots] ds \\ &\equiv A^{(2)}w + b_2, \quad w = (\xi, v_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть $\mu \in [0, 1]$. Символом $C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0) \equiv C_{\mu,0}$ обозначим банахово пространство определенных на отрезке $t \in [0, T_\omega]$ функций $w = (\xi, v_2)$, $\xi(t) \in C$, $v_2(t) \in Q_\omega H^0$, удовлетворяющих условиям

$$w(0) = w(T_\omega), \quad \|w\|_{C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0)} = \|\xi\|_{C_\mu([0, T_\omega], \mathbb{R})} + \|v_2\|_{C_\mu([0, T_\omega], H^0)} < \infty.$$

Здесь C_μ – стандартное обозначение гёльдерова пространства ($\mu \neq 0$) и пространства непрерывных ($C_0 \equiv C$) вектор-функций.

Докажем, что при достаточно больших ω оператор

$$\bar{A}_\omega = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{pmatrix}$$

действует в пространстве $C_{\mu,0}$, $\mu \in (0, 1]$, и его норма подчинена неравенству

$$\|\bar{A}_\omega\| < \frac{1}{2}. \quad (33)$$

Доказательство громоздко и потому в полном объеме мы его не приводим. Отметим, что оно базируется на оценках (13), (14) с заменой A_0 на A_ω и соотношениях (20), (26), (29) и (31). Отметим также, что оценка бесконечномерной компоненты $A^{(2)}$ по существу проще, нежели оценка одномерной компоненты $A^{(1)}$, поскольку в последней присутствует слагаемое с растущим при $\omega \rightarrow \infty$ сомножителем $(1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1}$:

$$|1 - e^{\lambda_\omega T_\omega}| = O(\omega), \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (34)$$

С учетом сказанного оценим подробно лишь одно слагаемое компоненты $A^{(1)}$, продемонстрировав при этом используемую при доказательстве (33) технику. Итак, оценим оператор

$$\begin{aligned} A_1^{(1)}w &= (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \int_0^{T_\omega} e^{\lambda_\omega(T_\omega+t-\tau)} (1 + \mu_\omega(\tau))^{-1} \\ &\quad \times \sum_{0 \leq |s| \leq 2m} e^{is\omega\tau} \frac{d}{d\tau} (\xi(\tau)a_\omega + v_2(\tau), \nu_{s\omega}^2) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \int_0^{T_\omega} e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau)} \\
&\quad \times \sum_{0 \leq |s| \leq 2m} e^{is\omega\tau} \left[(1 + \mu_\omega)^{-1} (\lambda_\omega - is\omega) + \frac{d}{dt} (1 + \mu_\omega)^{-1} \right] \\
&\quad \times (\xi(\tau) a_\omega + v_2(\tau), \nu_{s\omega}^2) d\tau \\
&\quad + e^{\lambda_\omega t} (1 + \mu_\omega(0))^{-1} \sum_{0 \leq |s| \leq 2m} (\xi(0) a_\omega + v_2(0), \nu_{s\omega}^2) \\
&\equiv B_w^{(1)} + B_w^{(2)}. \tag{35}
\end{aligned}$$

В силу второй оценки (31) имеем

$$\|B^{(2)} w\|_{C_{\mu,0}} \leq c\omega^{-2} \|w\|_{C_{\mu,0}}, \quad c = \text{const} > 0. \tag{36}$$

Для оценки оператора $B^{(1)} w$ воспользуемся очевидным представлением

$$\begin{aligned}
B^{(1)} w &= (1 - e^{\lambda_\omega T_\omega})^{-1} \sum_{0 \leq |s| \leq 2m} \sum_{j=1}^{[T_0 \omega / (2\pi)]} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} [e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau)} p_\omega(\tau) (\xi(\tau) a_\omega + v_2(\tau), \nu_{s\omega}^2) \\
&\quad - e^{\lambda_\omega (T_\omega + t - \tau_j)} p_\omega(\tau_j) (\xi(\tau_j) a_\omega + v_2(\tau_j), \nu_{s\omega}^2)] e^{is\omega\tau} d\tau, \tag{37}
\end{aligned}$$

где символом $p_\omega(\tau)$ обозначена функция, заключенная в квадратные скобки в (35), $\tau_j = (2\pi/\omega)j$.

Легко видеть, что

$$p_\omega(\tau), \quad \frac{d}{dt} p_\omega(\tau) = O(\omega), \quad \omega \rightarrow \infty.$$

Отсюда находим

$$\|B^{(1)} w\|_{C_{0,0}} \leq c\omega^{-\mu} \|w\|_{C_{\mu,0}}, \quad c = \text{const} > 0.$$

Из представления (35) оператора $B^{(1)}$ следует неравенство

$$\|B^{(1)} w\|_{C_{1,0}} \leq c \|w\|_{C_{0,0}}, \quad c = \text{const} > 0.$$

Два последних неравенства в силу простой оценки [2]

$$\|u\|_{C_{\mu,0}} \leq \|u\|_{C_{0,0}} + \|u\|_{C_{1,0}}^\mu (2\|u\|_{C_{0,0}})^{1-\mu}$$

приводят к неравенству

$$\|B^{(1)} w\|_{C_{\mu,0}} \leq c\omega^{-\mu} \|w\|_{C_{\mu,0}}, \quad c = \text{const} > 0. \tag{38}$$

Из неравенств (36), (38) вытекает искомая оценка

$$\|A_1^{(1)} w\|_{C_{\mu,0}} \leq c\omega^{-\mu} \|w\|_{C_{\mu,0}}.$$

Из (33) следует существование единственного решения $w \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0)$ уравнения (32) при больших ω . Учитывая этот факт, выразим $v_2 \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0)$ из уравнения (25):

$$v_2(t) = (I - e^{T_\omega A_\omega})^{-1} \int_0^{T_\omega} e^{A_\omega(T_\omega + t - s)} [\Gamma_\omega(\xi(s), v_2(s)) + D_\omega] ds + \int_0^t e^{A_\omega(t-s)} [\dots] ds. \quad (39)$$

Слагаемое правой части (39), содержащее d/dt , проинтегрируем по частям (учитывая свойства (11), (12)). После этого выберем и подставим в правую часть (39) последовательности $d_k^{(l)} \in H_0^2$, $v_2^{(l)} \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H_0^2)$, $l = 1, 2, \dots$, сходящиеся к d_k и v_2 по нормам H^0 и $C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0)$ соответственно. Тогда для соответствующей последовательности $\hat{v}_2^{(l)}$ левых частей (39) в силу (13) получим

$$\hat{v}_2^{(l)} \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H_0^2), \quad \|\hat{v}_2^{(l)} - v_2\|_{C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^1)} \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $v = (v_1, v_2) \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H_0^1)$. В силу связи (22) вектор-функций u и v находим, что $u \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H_0^1)$, а потому $u(t)$ является слабым решением [14; п. 6.1.2] задачи (1), (2) с начальным условием $u|_{t=0} = u(0)$ (т.е. удовлетворяет обычному интегральному тождеству). Из [14; гл. VII, теорема 5] теперь следует, что

$$u \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^2) \cap C_{\mu,0}([0, T_\omega], H_0^1), \quad (40)$$

поэтому $u(t)$, $t \in [0, T_\omega]$, удовлетворяет уравнению (1) в смысле $C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0)$.

Продолжим вектор-функцию $u(t)$ T_ω -периодическим образом на всю ось $t \in \mathbb{R}$, оставив за продолжением прежнее обозначение $u(t)$. Из соотношения (40) следует, что продолжение

$$u \in C_\mu(\mathbb{R}, H^2) \cap C_\mu(\mathbb{R}, H_0^1), \quad (41)$$

где символом $C_\mu(\mathbb{R}, B)$ обозначено обычное банахово пространство вектор-функций $u: \mathbb{R} \rightarrow B$ (B – банахово пространство), удовлетворяющих равномерному условию Гёльдера с показателем μ . В силу $(2\pi/\omega)$ -периодичности по t коэффициентов задачи (1), (2) и доказанной выше единственности решения $u \in C_{\mu,0}([0, T_\omega], H^0)$ уравнения (32) следует, что u – единственное $(2\pi/\omega)$ -периодическое решение уравнения (15) в смысле $C(\mathbb{R}, H^0)$ (так как вместе с $u(t)$ решением (15) является $u(t + 2\pi\omega^{-1})$). Из соотношений (22), (23), (33) и (34) в сочетании с первым из неравенств (13) следует при больших ω оценка

$$\|u\|_{C_\mu(R, H^1)} \leq c \sum_{0 \leq k \leq m} \|d_k\|_{H_0}, \quad (42)$$

где константа c зависит от A , B_k и M_k , $0 \leq k \leq m$, но не зависит от ω .

Для завершения доказательства утверждения 1) теоремы осталось установить бесконечную дифференцируемость решения $u(x, t)$, т.е. что $u \in C^\infty(\overline{Q})$. Пусть $\chi(t)$, $t \in [0, 1]$, – бесконечнодифференцируемая функция такая, что $\chi(t) \neq 0$ при $t \in (1/3, 2/3)$ и

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/3, \\ 1, & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Вектор-функция $v(t) = \chi(t)u(t)$, $t \in [0, 1]$, очевидно, является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - A_\omega v &= \chi \left(\sum_{0 < |k| \leq m} M_k e^{ik\omega t} u + \sum_{0 \leq |k| \leq m} d_k e^{ik\omega t} \right) + \chi' u, \\ v(0) &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Поскольку коэффициенты левой части (43) и граница $\partial\Omega$ бесконечно дифференцируемы, а также для этой задачи выполнены условия согласования сколь угодно порядка, то будем к ней применять многократно [14; § 7.1, теорема 6]. В силу (41) и $(2\pi/\omega)$ -периодичности вектор-функции $u(t)$ получим тогда, что $u \in C^\infty(\bar{Q})$.

6. Построение асимптотики. Пункт 2) теоремы доказан в [10]. Здесь же для полноты изложения опишем кратко лишь сам процесс построения формальных асимптотик. Подставим ряд (6) в уравнение (1) и в граничное условие (2) и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях ω , причем отдельно для регулярных и отдельно для погранслойных слагаемых. Начнем со старшей степени и с регулярных слагаемых. Получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{(2-k)/2} \left(\frac{\partial y_k(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial z_k(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} \right) \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-k/2} L_0(u_k(x) + w_k(\psi, \rho) + y_k(x, \tau) + z_k(\psi, \rho, \tau)) + c_{-2} L_1 a_0(x) \\ &\quad + \sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-(k+2)/2} L_1(u_k(x) + w_k(\psi, \rho) + c_k a_0(x) + y_k(x, \tau) + z_k(\psi, \rho, \tau)) \\ &\quad + \sum_{1 \leq |k| \leq m} \left(\sum_{i=-1}^{\infty} \omega^{-i/2} M_k[u_i(x) + w_i(\psi, \rho) + y_i(x, \tau) + z_i(\psi, \rho, \tau)] c_i a_0(x) \right. \\ &\quad \left. + \omega c_{-2} M_k a_0(x) + d_k(x) \right) e^{ik\tau} + d_0(x), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\left(\sum_{k=-1}^{\infty} \omega^{-k/2} [u_k(x) + w_k(\psi, \rho) + y_k(x, \tau) + z_k(\psi, \rho, \tau)] \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (45)$$

Приравнявая коэффициенты при $\omega^{3/2}$, получаем $\partial y_{-1}(x, \tau)/\partial \tau = 0$, $\langle y_{-1} \rangle = 0$, так что $y_{-1}(x, \tau) = 0$.

Приравнявая при той же степени погранслойные слагаемые, получим

$$\frac{\partial z_{-1}(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} = l_0 \frac{\partial^2 z_{-1}(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho^2} + l_0 \frac{\partial^2 w_{-1}(\psi, \rho)}{\partial \rho^2}, \quad (46)$$

где

$$l_0 = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(\psi, 0) p_i(\psi, 0) p_j(\psi, 0) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) |_{\Gamma} \xi_i \xi_j > 0.$$

Применяя к уравнению (46) операцию усреднения по τ , придем к двум задачам:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{-1}(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} = l_0 \frac{\partial^2 z_{-1}(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho^2}, \\ \langle z_{-1}(\psi, \rho, \tau) \rangle = 0, \\ z_{-1}(\psi, \rho, \tau)|_{\rho=\infty} = 0, \\ z_{-1}(\psi, \rho, \tau)|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 w_{-1}(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} = 0, \\ w_{-1}(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $z_{-1}(\psi, \rho, \tau) = 0$, $w_{-1}(\psi, \rho) = 0$.

Выпишем регулярные слагаемые при степени ω^1 . Имеем

$$\frac{\partial y_0(x, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{1 \leq |k| \leq m} c_{-2} M_k a_0(x) e^{ik\tau}.$$

Отсюда в силу условия $\langle y_0(x, \tau) \rangle = 0$ находим

$$y_0(x, \tau) = \sum_{1 \leq |k| \leq m} c_{-2} \frac{M_k a_0(x)}{ik} e^{ik\tau}. \quad (47)$$

Перейдем к погранслоинным слагаемым при той же степени ω . Имеем

$$\frac{\partial z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} = l_0 \frac{\partial^2 z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho^2} + l_0 \frac{\partial^2 w_0(\psi, \rho)}{\partial \rho^2}.$$

Получим задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_0(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} = 0, \\ w_0(\psi, \rho)|_{\rho=\infty} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} = l_0 \frac{\partial^2 z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho^2}, \\ \langle z_0(\psi, \rho, \tau) \rangle = 0, \\ z_0(\psi, \rho, \tau)|_{\rho=\infty} = 0, \\ z_0(\psi, \rho, \tau)|_{\Gamma} = - \left(\sum_{1 \leq |k| \leq m} c_{-2} \frac{M_k a_0(x)}{ik} e^{ik\tau} \right) \Big|_{\Gamma}. \end{cases}$$

Отсюда $w_0(\psi, \rho) = 0$. К задаче для $z_0(\psi, \rho, \tau)$ нужно вернуться позже, когда будет найдена c_{-2} .

Выпишем регулярные слагаемые при $\omega^{1/2}$:

$$\frac{\partial y_1(x, \tau)}{\partial \tau} = L_0 u_{-1}(x) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} (M_k u_{-1}(x) + M_k c_{-1} a_0(x)) e^{ik\tau}. \quad (48)$$

Применяя к уравнению (48) операцию усреднения по τ , получим

$$\begin{cases} L_0 u_{-1}(x) = 0, \\ (u_{-1}(x), z_0(x)) = 0, \\ (u_{-1}(x) + w_0(\psi, \rho))|_{\partial \Omega} = 0. \end{cases}$$

Так как $w_0(\psi, \rho) = 0$, то $u_{-1}(x) = 0$. Далее,

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1(x, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{1 \leq |k| \leq m} c_{-1} M_k a_0(x) e^{ik\tau}, \\ \langle y_1(x, \tau) \rangle = 0. \end{cases}$$

Так что

$$y_1(x, \tau) = \sum_{1 \leq |k| \leq m} c_{-1} \frac{M_k a_0(x)}{ik} e^{ik\tau}.$$

Выпишем погранслойные слагаемые при $\omega^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1(\psi, \rho, \tau)}{\partial \tau} &= l_0(\psi) \frac{\partial^2 z_1(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho^2} + l_0(\psi) \frac{\partial^2 w_1(\psi, \rho)}{\partial \rho^2} + \rho l_1(\psi) \frac{\partial^2 z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho^2} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} q_{k0}(\psi) \frac{\partial^2 z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho \partial \psi_k} + q_0(\psi) \frac{\partial z_0(\psi, \rho, \tau)}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (49)$$

К задаче (48) нужно вернуться после нахождения $z_0(\psi, \rho, \tau)$.

Выпишем регулярные слагаемые при ω^0 . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_2(x, \tau)}{\partial \tau} &= L_0(u_0(x) + y_0(x, \tau)) + c_{-2} L_1 a_0(x) \\ &+ \sum_{1 \leq |k| \leq m} (M_k(u_0(x) + c_0 a_0(x) + y_0(x, \tau)) + d_k(x)) e^{ik\tau} + d_0(x). \end{aligned} \quad (50)$$

Применяя к (50) операцию усреднения по τ и учитывая (47), получим

$$0 = L_0 u_0(x) + c_{-2} L_1 a_0(x) + \sum_{1 \leq |k| \leq m} c_{-2} \frac{M_k M_{-k}}{ik} a_0(x) + d_0(x).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} -L_0 u_0(x) = c_{-2} M_0 a_0(x) + d_0(x), \\ (u_0(x), z_0(x)) = 0, \\ u_0(x)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Согласно альтернативе Фредгольма последняя задача разрешима тогда и только тогда, когда вектор $c_{-2} M_0 a_0 + d_0$ ортогонален в H^0 вектору z_0 :

$$(c_{-2} M_0 a_0(x) + d_0(x), z_0(x)) = 0.$$

Отсюда

$$c_{-2} = -\frac{(d_0(x), z_0(x))}{(M_0 a_0(x), z_0(x))}.$$

Здесь, как и выше, скобками $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в H^0 .

На этом шаге прервем описание процесса, так как он подробно изложен в работе [10].

7. Обоснование асимптотики. В этом заключительном пункте докажем утверждение 3) теоремы.

В силу методики построения коэффициентов асимптотического ряда (6) (см. п. 6) его частичные суммы u_ω^s удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\omega^s}{\partial t} - \left(L_0 + \frac{1}{\omega} L_1 \right) u_\omega^s - \sum_{1 \leq |k| \leq m} (M_k u_\omega^s + d_k) e^{ik\omega t} - d_0 &= r_\omega^s(x, t), \\ u_\omega^s|_\Gamma &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где при любом $l \geq 0$

$$\|r_\omega^s\|_{C^{l,1/2}(\overline{Q})} \leq c_s \omega^{-(s+1-l)/2}, \quad c_s = \text{const} > 0. \quad (52)$$

Действительно, по построению при формальной подстановке ряда (6) в (1), (2) коэффициенты при всех степенях ω обращаются в нуль. Таким образом, невязку r_ω^s определяют несколько первых членов ряда

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} \omega^{-k/2} (u_k + w_k + c_k a_0 + y_k + z_k),$$

откуда и следует оценка (52) теоремы.

Перепишем (50) в операторной форме

$$\frac{du_\omega^s}{dt} = \left(A + \frac{1}{\omega} B \right) u_\omega^s + \sum_{1 \leq |k| \leq m} (M_k u_\omega^s + d_k) e^{ik\omega t} + d_0 + r_\omega^s. \quad (53)$$

Из (15), (53) следует, что разность $w_\omega^s = u_\omega - u_\omega^s$, где u_ω – решение (15), является решением уравнения

$$\frac{dw}{dt} - \left(A + \frac{1}{\omega} B \right) w + \sum_{1 \leq |k| \leq m} M_k e^{ik\omega t} w = r_\omega^s. \quad (54)$$

Из оценок (42), (52) в силу результата [14; гл. 7, теорема 5] (улучшенная регулярность) следует неравенство

$$\|w_\omega^s\|_{L^2([0,1], H^2)} \leq d_s \omega^{-(s+1)/2}, \quad d_s = \text{const} > 0. \quad (55)$$

Из равенства (54) следует, что вектор-функция $z_\omega^s(t) = \chi(t) w_\omega^s(t)$, $t \in [0, 1]$, где $\chi(t)$ – та же функция, что и выше, является решением задачи

$$\frac{dz}{dt} - Az = \chi \left[r_\omega^s - \left(\omega^{-1} B + \sum_{1 \leq |k| \leq m} M_k e^{ik\omega t} \right) w \right] - \chi' w, \quad z(0) = 0. \quad (56)$$

Множественно применяя к (56) результат [14; гл. 7, теорема 6] (более высокая регулярность) с учетом (55) и структуры ряда (6), выводим указанную в теореме 3.1 оценку. Поясним, что в силу структуры ряда (6) указанную оценку достаточно установить с заменой в ее левой части k на n , где n – какое-либо натуральное число, не меньшее k . Утверждение 3) теоремы 3.1 доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [2] В. Б. Симоненко, “Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **81:1** (1970), 53–61.
- [3] В. Б. Левенштам, “Метод погранслоя и эффективное построение старших приближений метода осреднения”, *Изв. вузов. Матем.*, 1978, № 3, 48–55.
- [4] В. Б. Левенштам, “К асимптотическому интегрированию задачи конвекции”, *Сиб. матем. журн.*, **30:4** (1989), 69–75.

- [5] В. Б. Левенштам, “Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:9 (2000), 1416–1424.
- [6] В. Б. Левенштам, “Асимптотическое интегрирование системы Навье–Стокса с быстро осциллирующей массовой силой”, *Дифференц. уравнения*, **37**:5 (2001), 696–705.
- [7] До Нгок Тхань, В. Б. Левенштам, “Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с большим параметром в критическом случае”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:6 (2011), 1043–1055.
- [8] Н. Т. До, В. Б. Левенштам, “Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с высокочастотными слагаемыми в критическом случае”, *Дифференц. уравнения*, **48**:8 (2012), 1190–1192.
- [9] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений. I”, *УМН*, **15**:3 (1960), 3–80.
- [10] В. В. Гусаченко, Е. А. Ильичева, В. Б. Левенштам, “Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:7 (2013), 1067–1081.
- [11] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ИЛ, М., 1958.
- [12] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5 (1957), 3–122.
- [13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазILINEЙНЫЕ уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.
- [14] Л. К. Эванс, *Уравнения с частными производными*, Университетская серия, **7**, Тамара Рожковская, Новосибирск, 2003.
- [15] В. Ф. Солонников, “О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида”, *Краевые задачи математической физики. 3. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Тр. МИАН СССР, **83**, 1965, 3–163.
- [16] М. З. Соломяк, “Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха”, *Докл. АН СССР*, **122** (1958), 766–769.
- [17] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [18] В. И. Юдович, *Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1985.
- [19] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.
- [20] В. Б. Левенштам, “О взаимосвязи двух классов решений уравнений Навье–Стокса”, *Владикавказ. матем. журн.*, **12**:3 (2010), 56–66.

В. Б. Левенштам

Южный федеральный университет,

г. Ростов-на-Дону

Южный математический институт ВНЦ РАН и

РСО-А, г. Владикавказ

E-mail: vleven@math.rsu.ru

Поступило

30.08.2012

Исправленный вариант

16.10.2013