Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Алымкулов, А. А. Халматов, Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 819–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:42:23

Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой

К. Алымкулов, А. А. Халматов

Доказана возможность применения метода, который аналогичен методу погранфункций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева, для построения асимптотики решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой.

Библиография: 8 названий.

Сингулярно возмущенные уравнения, в которых соответствующие невозмущенные уравнения содержат особую точку в рассматриваемой области, впервые начал изучать Лайтхилл [1]. В работе [2] было получено параметрическое представление решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой. В работе [3] асимптотика решения этого уравнения была получена методом структурного сращения.

Здесь доказана возможность применения метода, который аналогичен методу погранфункций Вишика–Люстерника–Васильевой–Иманалиева [4]–[6], для построения асимптотики решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой.

Рассмотрим задачу Коши

$$u(1) = u^0 \tag{1} \quad \{\text{eq1}\}$$

для модельного уравнения Лайтхилла [1]

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) = q(x)u(x) + r(x), \tag{2} \quad \{\text{eq2}\}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, u^0 – заданная постоянная, $x \in [0, 1]$, $u'(x) = du/dx$. На известные функции налагаются следующие условия: $q(x), r(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$.

В частности, $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$, $r(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$, $q_k = q^{(k)}(0)/k!$. Эти равенства понимаются в асимптотическом смысле.

Здесь рассматривается случай $q_0 = -1$, а именно для того, чтобы выпукло показать идею применения метода в случае, когда решение невозмущенного уравнения становится бесконечным в особой точке.

Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \sum_{k=0}^{\infty}(\pi_k(t) + u_k(x))\mu^k, \quad (3) \quad \{\text{eq3}\}$$

где $t = x/\mu$, $\varepsilon = \mu^2$, $u_k(x) \in C^\infty[0, 1]$, $\pi_k(t) \in C^\infty[0, \mu_0]$, $\mu_0 = 1/\mu$. Отметим, что $\pi_k(t) = \pi_k(t, \mu)$ т.е. $\pi_k(t)$ зависит также от μ , но эту зависимость мы не указываем.

Начальные условия для функций $\pi_j(t)$ берем в виде

$$\pi_{-1}(\mu_0) = b\mu, \quad b = u^0 - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(1), \quad \pi_k(\mu_0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4) \quad \{\text{eq4}\}$$

Подставляя (3) в (2) имеем

$$\begin{aligned} & (x + \mu\pi_{-1}(t) + \mu^2(\pi_0(t) + u_0(x)) + \mu^3(\pi_1(t) + u_1(x)) + \mu^4(\pi_2(t) + u_2(x)) + \dots) \\ & \quad \times [\mu^{-2}\pi'_{-1}(t) + \mu^{-1}\pi'_0(t) + \pi'_1(t) + \mu^1\pi'_2(t) + \dots \\ & \quad + u'_0(x) + \mu u'_1(x) + \mu^2 u'_2(x) + \dots] \\ & = q(x)(u_0(x) + \mu u_1(x) + \mu^2 u_2(x) + \dots + \mu^n u_n(x)) \\ & \quad + q(\mu t)(\mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \pi_0(t) + \mu\pi_1(t) + \pi_0(t) + \dots) + r(x). \end{aligned}$$

Отсюда, для определения функций $\pi_k(t)$, $k = -1, 0, 1, 2, \dots$, $u_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, имеем следующие уравнения:

$$(t + \pi_{-1}(t))\pi'_{-1}(t) = q(\mu t)\pi_{-1}(t), \quad \pi_{-1}(\mu_0) = b\mu, \quad (5.-1) \quad \{\text{eq5.}\}$$

$$Lu_0(x) := xu'_0(x) - q(x)u_0(x) = r(x), \quad u_0(x) \in C^{(\infty)}[0, 1], \quad (6.0) \quad \{\text{eq6.}\}$$

$$D\pi_0(t) := (t + \pi_{-1}(t))\pi'_0(t) + (\pi'_{-1}(t) - q(\mu t))\pi_0(t) = -u_0(\mu t)\pi'_{-1}(t), \quad \pi_0(\mu_0) = 0, \quad (5.0) \quad \{\text{eq5.}\}$$

$$Lu_1(x) := 0, \quad u_1(x) \in C^{(\infty)}[0, 1], \quad (6.1) \quad \{\text{eq6.}\}$$

$$D\pi_1(t) := -u_0(\mu t)\pi'_0(t) + \pi_0(t)\pi'_0(t) - u_1(\mu t)\pi'_{-1}(t), \quad \pi_1(\mu_0) = 0, \quad (5.1) \quad \{\text{eq5.}\}$$

$$Lu_2(x) := -u_0 u'_0(x), \quad u_2(x) \in C^{(\infty)}[0, 1], \quad (6.2) \quad \{\text{eq6.}\}$$

$$D\pi_2(t) := -u_0(\mu t)\pi'_{-1}(t) - \pi_0(t)\pi'_1(t) - u_1(\mu t)\pi'_0(t) + \pi_1(t)\pi'_0(t) - u_2(\mu t)\pi'_{-1}(t), \\ \pi_{-2}(\mu_0) = 0, \quad (5.2) \quad \{\text{eq5.}\}$$

$$Lu_3(x) := -u_0(x)u'_1(x) - u'_0(x)u_1(x), \quad u_3(x) \in C^{(\infty)}[0, 1], \quad (6.3) \quad \{\text{eq6.}\}$$

$$D\pi_3(t) := \sum_{\substack{i+j=2 \\ i \geq 0, j \geq -2}} (u_i(\mu t)\pi'_j(t)) + \sum_{\substack{i+j=2 \\ i, j \geq 0}} (\pi_i(t)\pi'_j(t)), \quad \pi_3(\mu_0) = 0, \quad (5.3) \quad \{\text{eq5.}\}$$

.....

Теперь решим эти задачи последовательно. Задачу (5.-1) запишем в виде

$$tz'(t) - q(\mu t)z(t) = -z(t)z'(t), \quad z(\mu_0) = b\mu,$$

где

$$z = \pi'_{-1}(t), \quad \mu_0 = \mu^{-1}.$$

Фундаментальное решение однородного уравнения, соответствующего этому уравнению имеет вид

$$z^0(t) = \exp \left\{ \int_{\mu_0}^t q(\mu s) \frac{ds}{s} \right\} = \exp \left\{ \int_{\mu_0}^t (q(\mu s) + 1) \frac{ds}{s} - \int_{\mu_0}^t \frac{ds}{s} \right\} = \frac{p(t, \mu)}{\mu t},$$

где

$$p(t, \mu) = \exp \left\{ \int_{\mu_0}^t (q(\mu s) + 1) \frac{ds}{s} \right\}.$$

Используя $z^0(t)$, решение неоднородного уравнения для $z(t)$ можно записать в виде

$$z(t) = \frac{p(t, \mu)}{\mu t} \left[z(\mu_0) - \mu \int_{\mu_0}^t p^{-1}(s, \mu) z(s) z'(s) ds \right],$$

или

$$tz(t) = p(t, \mu)b - p(t, \mu) \int_{\mu_0}^t p^{-1}(s, \mu) z(s) z'(s) ds.$$

После интегрирования по частям последнее выражение сводится к следующему уравнению:

$$tz(t) = p(t, \mu)b - \frac{z^2(t)}{2} + p(t, \mu) \frac{b^2 \mu^2}{2} + \frac{p(t, \mu)}{2} \int_{\mu_0}^t \frac{1 + q(\mu s)}{s} p^{-1}(s, \mu) z^2(s) ds$$

или

$$z^2(t) + 2tz(t) - p(t, \mu)b_0 = p(t, \mu) \int_{\mu_0}^t \phi(s, \mu) p^{-1}(s, \mu) z^2(s) ds := p(t, \mu)T(t, z^2), \quad (7) \quad \{\text{eq7}\}$$

где $\phi(s, \mu) = (1 + q(\mu s))/s$, $b_0 = 2b + b^2 \mu^2$.

Пусть $b_0 > 0$. Введем обозначение $z_0(t) = -t + \sqrt{t^2 + b_0 p(t, \mu)}$. Эта функция удовлетворяет неравенству $0 < z_0(t) \leq Mt^{-1}$ ($t > 0$) и является строго убывающей ограниченной функцией на отрезке $[0, \mu_0]$. Здесь и далее все постоянные, не зависящие от малого параметра μ , обозначим через M . Пусть S_μ множество функций $z(t)$, удовлетворяющих условию $\|z - z_0\| \leq M\mu$, где $\|z\| = \max_{0 \leq t \leq \mu_0} |z(t)|$.

ТЕОРЕМА 1. Если $b_0 > 0$, то существует единственное ограниченное решение задачи (5.1) из множества S_μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (7) эквивалентно уравнению $z = F[t, z]$, где

$$F[t, z] = -t + \sqrt{t^2 + bp(t, \mu) + p(t, \mu)T(t, z^2)}.$$

Пусть $\|\phi(t, \mu)\| \leq M\mu$, $0 < m \leq p(t, \mu) \leq M$, $\|p^{-1}(t)\| \leq M$. Сначала оценим $T(t, z^2)$ на множестве S_μ . Имеем

$$\begin{aligned} |T(t, z^2)| &\leq \int_t^{\mu_0} |\phi(s, \mu)| |p^{-1}(s, \mu)| |z(s)|^2 ds \leq M\mu \int_t^{\mu_0} |z(s)|^2 ds \leq M\mu \int_0^{\mu_0} |z(s)|^2 ds \\ &\leq M\mu \int_0^1 |z(s)|^2 ds + M\mu \int_1^{\mu_0} |z(s)|^2 ds \leq M\mu. \end{aligned}$$

Мы использовали неравенство треугольника $|z(t)| \leq |z(t) - z_0(t)| + |z_0(t)|$, а также $|z_0(t)| \leq Mt^{-1}$ ($t > 0$).

Производная Фреше оператора $F(t, z)$ по z в точке $z_0(t)$ является линейным оператором [6; с. 371]:

$$F'_z(t, z_0)h = -p(t, \mu) \int_t^{\mu_0} \phi(s, \mu) p^{-1}(s, \mu) z_0(s) h(s) \frac{ds}{\sqrt{t^2 + p(t, \mu)(b + T(t, z^2))}},$$

где $h(t)$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, \mu_0]$. Отметим, что в силу $T(t, z_0^2) = O(\mu)$, знаменатель этого выражения строго положителен на отрезке $[0, \mu_0]$. Для $F'_z(t, z_0)$ можно получить оценку $\|F'_z(t, z_0)\| \leq M\mu \ln \mu^{-1}$ точно тем же способом, каким мы получили оценку для $T(t, z^2)$. Отсюда, в свою очередь, из неравенства Лагранжа [6; с. 376] вытекает, что оператор является сжимающим в множестве S_μ . Поэтому по принципу неподвижной точки уравнение (7) имеет единственное решение из класса S_μ . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Имеем

- 1) $z(t) = \pi_{-1}(t) \geq M > 0$ для всех $t \in [0, \mu_0]$;
- 2) $\pi_{-1}(t) \leq Mt^{-1}$ ($t > 0$).

Остальные функции $\pi_j(t)$, $u_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, определяются из неоднородных линейных уравнений, поэтому нам нужны следующие леммы.

ЛЕММА 1. Для любой функции $f(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$ уравнение $L\xi = f(x)$ имеет единственное ограниченное решение $\xi(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$, представимое в виде

$$\xi(x) = Q(x) \int_0^x Q^{-1}(s) f(s) \frac{ds}{s}, \quad Q(x) = \exp \left\{ \int_1^x (q(s) + 1) \frac{ds}{s} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из того, что общее решение рассматриваемого уравнения представимо в виде

$$\xi(x) = Q(x)x^{-1}[\xi(1) + \int_1^x Q^{-1}(s)f(s)ds].$$

Если здесь выберем $\xi(1) = \int_0^1 Q^{-1}(s)f(s)ds$, то получим искомый результат.

Из этой леммы вытекает, что все функции $u_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, определяются однозначно и принадлежат классу $C^{(\infty)}[0, 1]$.

ЛЕММА 2. Задача

$$(t + \pi_{-1}(t))\eta'(t) + (\pi'_{-1} - q(\mu t))\eta(t) = k(t), \quad \eta(\mu_0) = 0, \quad (8) \quad \{\text{eq8}\}$$

где функция $k(t) \in C^{(\infty)}[0, 1]$ (непрерывна и ограничена) и $|k(t)| \leq Mt^{-2}$, $t \rightarrow \infty$, имеет единственное равномерно ограниченное решение $\eta(t) = \eta(t, \mu)$ на отрезке $t \in [0, \mu_0]$ и при малом μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фундаментальное решение однородного уравнения (8) имеет вид

$$\Phi(t) = (1 + \mu^2 b) \frac{G(t, \mu)}{\mu(t + \pi_{-1}(t))}, \quad G(t, \mu) = \exp \left\{ - \int_t^{\mu_0} (1 + q(\mu s)) \frac{ds}{(s + \pi_{-1}(s))} \right\}.$$

Очевидно, что $\|G(t, \mu)\| \leq M$, $G^{-1}(t, \mu) \leq M$ при $t \in [0, \mu_0]$ и μ малом. Решение задачи (8) представляется в виде

$$\eta(t) = \left(\frac{G(t, \mu)}{(t + \pi_{-1}(t))} \right) \int_{\mu_0}^t G^{-1}(s, \mu) k(s) ds. \quad (9) \quad \{\text{eq9}\}$$

Оценка интегрального члена в (9) показывает, что он ограничен постоянной M . Отсюда также вытекает, что $|\eta(t)| \leq Mt^{-1}$ ($t > 0$). Решение задачи (5.0) определяется интегралом (9), где

$$k(t) = -u_0(t\mu)\pi_{-1}(t) = -u_0(t\mu)q(\mu t) \frac{\pi_{-1}(t)}{(t + \pi_{-1}(t))}$$

удовлетворяет условию леммы. Поэтому функция $\pi_0(t)$ ограничена на $[0, \mu_0]$. Ограниченность остальных функций $\pi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, доказывается аналогично, так как правые части уравнений, определяющих эти функции, удовлетворяют условию леммы 2. Оценка асимптотического характера ряда (3) также проводится использованием леммы 2.

Введем обозначение

$$u(x) = \mu^{-1}\pi_{-1}(t) + \sum_{k=0}^n (\pi_k(t) + u_k(x))\mu^k + \mu^{n+1}R_{n+1}(x, \mu). \quad (10) \quad \{\text{eq10}\}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $b_0 > 0$ (для этого достаточно выполнения условия $b_0 := u^{(0)} - u_0(1)$). Тогда решение задачи (1), (2) существует на отрезке $[0, 1]$ и его асимптотика представляется в виде (10) и $|R_{n+1}(x, \mu)| \leq M$ для всех $x \in [0, 1]$.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение

$$(x + \varepsilon u(x))u'(x) + u(x) = 1, \quad u(1) = u^{(0)}, \quad (11) \quad \{\text{eq11}\}$$

Это уравнение интегрируется точно:

$$u(x) = \varepsilon^{-1} \left[-x + \sqrt{x^2 + 2b_0\varepsilon + \varepsilon^2(u^{(0)})^2 + 2\varepsilon x} \right],$$

где $b_0 = u^{(0)} - 1$. Если $b_0 > 0$, то решение задачи (1) существует на отрезке $[0, 1]$, что подтверждается теоремой 2. Уравнение для $\pi_{-1}(t)$ имеет вид

$$(t + \pi_{-1}(t))\pi'_{-1}(t) + \pi_{-1}(t) = 0, \quad \pi_{-1}(\mu_0) = b\mu.$$

Решение этой задачи представляется в виде

$$\pi_{-1}(t) = -t + \sqrt{t^2 + 2b + b^2\mu^2}.$$

Уравнение для $u_0(x)$ имеет решение $u_0(x) = 1 \in C^{(\infty)}[0, 1]$. Далее

$$\pi_0(t) = \frac{-\pi_{-1}(t) + b\mu}{t + \pi_{-1}(t)}, \quad u_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем $b = b_0$. Асимптотика решений задачи (1) представляется в виде

$$u(x) = \frac{\pi_{-1}(x/\mu)}{\mu} + 1 + \pi_0\left(\frac{x}{\mu}\right) + o(\mu) \quad \text{для всех } x \in [0, 1], \quad \mu \rightarrow 0.$$

В заключение, авторы выражают искреннюю благодарность Д. В. Аносову за полезные обсуждения при выполнении данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. G. Lighthill, “A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid”, *Philos. Mag.* (7), **40** (1949), 1179–1201.
- [2] К. Алымкулов, *Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач*, Илим, Бишкек, 1992.
- [3] К. Алымкулов, Ж. К. Жээнтаева, “Метод структурного сращивания решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой”, *Матем. заметки*, **79**:5 (2006), 643–652.
- [4] М. Иманалиев, *Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем*, Илим, Бишкек, 1972.
- [5] В. А. Треногин, “Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника–Витшика”, *УМН*, **25**:4 (1970), 123–156.
- [6] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [7] К. Алымкулов, “Равномерное представление решений как бисингулярно возмущенного уравнения с малым параметром при старшей производной, так и возмущенного уравнения с особыми точками”, Материалы международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной памяти И. Г. Петровского (21–26 мая 2007 г.), МГУ, М., 2007, 15–16.
- [8] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

К. Алымкулов

Ошский государственный социологический университет

E-mail: keldibay@mail.ru, keldibay@yahoo.com

Поступило

13.04.2011

А. А. Халматов

Ошский государственный социологический университет

E-mail: haa83@mail.ru