Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Экстремальные задачи Гретша и Тейхмюллера на римановой поверхности, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 834–843

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:31:23

Экстремальные задачи Гретша и Тейхмюллера на римановой поверхности

В. Н. Дубинин

Хорошо известные экстремальные задачи Гретша и Тейхмюллера для модулей плоских двусвязных областей распространяются на случай областей, расположенных на римановых поверхностях.

Библиография: 7 названий.

1. Введение и формулировки результатов. Пусть G – двусвязная область на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}_w$, и пусть E_0 и E_1 – компоненты дополнения этой области. Задача Гретша состоит в отыскании области G с наибольшим значением модуля $\text{mod } G$ при следующих условиях: множество E_0 содержит круг $|w| \leq 1$, а множество E_1 содержит точку $\sigma > 1$ и ∞ . Известно, что единственным решением этой задачи является так называемое кольцо Гретша

$$\mathbb{G}(\sigma) = \{w : |w| > 1\} \setminus [\sigma, +\infty].$$

Задача Тейхмюллера состоит в отыскании области G с наибольшим значением модуля при других условиях: E_0 содержит точки 0 и -1 , а E_1 – точки $\sigma > 0$ и ∞ . Единственным решением этой задачи является кольцо Тейхмюллера

$$\mathbb{T}(\sigma) = \mathbb{C}_w \setminus ([-1, 0] \cup [\sigma, +\infty]).$$

Различные определения модулей колец (двусвязных областей) и их приложения в геометрической теории функций достаточно полно изложены в литературе (см., например, [1]–[3], а также [4; §5.5 и §7.1]). В данной заметке делается попытка распространить указанные выше экстремальные задачи со сферы Римана на случай произвольной римановой поверхности. Всюду ниже под римановой поверхностью будем понимать компактную риманову поверхность с краем. Мы представляем такую поверхность лежащей над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и “склеенной” из конечного числа плоских областей с естественным определением проекций, локальных параметров и окрестностей для точек на такой поверхности [5]. Экстремальная задача для двусвязных областей, лежащих на произвольной фиксированной поверхности $\mathcal{R}$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00038) и ДВО РАН (грант № 12-II-CO-01M-002).

представляется крайне сложной, поскольку модуль области существенно зависит от расположения точек ветвления. Поэтому мы ослабим постановку задач, осуществляя поиск области с наибольшим модулем независимо от $\mathcal{R}$. Конечно, потребуются определенные ограничения на листность накрытия и расположение точек ветвления. Экстремальные области типа области Гретша и области Тейхмюллера будут располагаться на римановой поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева $T_p(z) := \cos(\operatorname{arccos} z) = 2^{p-1}z^p + \dots$. Близкие, по существу, задачи, но на более “простых” римановых поверхностях $\mathcal{R}(e^z)$ и $\mathcal{R}(z^p)$, рассматривались ранее Дженкинсом в связи с приложениями симметризации к многолиственным функциям [1]. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_p(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_p(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2 - 1})^p + (z - \sqrt{z^2 - 1})^p), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышева $z = \cos(k\pi/p)$, $k = 1, \dots, p-1$, разбивают z -плоскость на p попарно непересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, как $B_1, \dots, B_p$. Полином T_p отображает область B_1 конформно и однолистно на область D_1 — w -плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \dots, B_{p-1}$ отображаются этим полиномом на области $D_2, \dots, D_{p-1}$ — w -плоскости с разрезом вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_p отображается на область D_p — w -плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathcal{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k , $k = 1, \dots, p$, следующим образом. Область D_1 склеивается “крест на крест” с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^- . Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k , рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathcal{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Обозначим через

$$\mathbb{G}_p(c, r, \sigma, \tau), \quad p \geq 2, \quad (-1)^p c \geq 0, \quad 0 \leq r \leq 1 + |c|, \quad 0 \leq \sigma < \tau \leq \infty,$$

двусвязную область на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, полученную удалением с этой поверхности замкнутого круга на листе $\overline{\mathcal{D}}_p$ с проекцией $|w - c| \leq r$ и удалением отрезка на листе $\mathcal{D}_1$, проекция которого есть $[\sigma, \tau]$. Введем также аналог кольца Тейхмюллера:

$$\mathbb{T}_p(s, t, \sigma, \tau), \quad p \geq 2, \quad 0 \leq s < t < \infty, \quad 0 \leq \sigma < \tau \leq \infty,$$

полученный удалением с поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ отрезка на листе $\overline{\mathcal{D}}_p$ с проекцией $[(-1)^p s, (-1)^p t]$ и отрезка на листе $\mathcal{D}_1$, проекция которого есть $[\sigma, \tau]$. В отличие от классического случая мы вынуждены помимо σ вводить дополнительные параметры (p, c, r, τ, u, s, t) , поскольку произвольную экстремальную область нельзя свести к канонической с помощью дробно-линейного отображения, учитывая также расположение точек ветвления. Заметим, что все параметры (включая натуральное p) влияют на величину модуля введенных выше областей. Обозначим через $\gamma(\rho)$ окружность

$|w| = \rho$ в случае $0 < \rho < \infty$ и положим по определению окружность $\gamma(0)$ равной точке $w = 0$ и $\gamma(\infty) = \infty$. Будем говорить, что кольцо (двусвязная область) $\mathcal{G}$ принадлежит классу $\mathcal{A}_p$, $p \geq 2$, если выполняются следующие условия:

- i) кольцо $\mathcal{G}$ расположено на некоторой римановой поверхности $\mathcal{R}$, лежащей над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$ и покрывающей каждую точку w этой сферы не более, чем p раз;
- ii) дополнение $\overline{\mathcal{R}} \setminus \mathcal{G}$ состоит из двух связных компонент $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$, одна из которых ($\mathcal{E}_0$) содержит всю границу поверхности $\mathcal{R}$;
- iii) для любого ρ , $1 \leq \rho < \infty$, множество $\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_0$ не содержит замкнутой жордановой кривой, лежащей над окружностью $\gamma(\rho)$ и не покрывающей p -кратно эту окружность.

Классу $\mathcal{A}_p$ принадлежат, например, все двусвязные области, лежащие на римановой поверхности $\mathcal{R}(P)$ функции, обратной полиному P степени p , критические значения которого находятся в круге $|w| < 1$. Имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Среди всех колец класса $\mathcal{A}_p$, проекция одной компоненты дополнения которых $\mathcal{E}_0$ содержит круг $|w - c| \leq r$, а проекция другой компоненты дополнения $\mathcal{E}_1$ соединяет окружность $\gamma(\sigma)$ с окружностью $\gamma(\tau)$ ($(-1)^p c \geq 0$, $0 \leq r \leq 1 + |c|$, $0 \leq \sigma < \tau \leq \infty$) кольцо $\mathbb{G}_p(c, r, \sigma, \tau)$ обладает максимальным модулем.

ТЕОРЕМА 2. Среди всех колец класса $\mathcal{A}_p$, проекция одной компоненты дополнения которых $\mathcal{E}_0$ соединяет окружности $\gamma(s)$ и $\gamma(t)$, а проекция другой компоненты дополнения $\mathcal{E}_1$ соединяет окружность $\gamma(\sigma)$ с окружностью $\gamma(\tau)$ ($0 \leq s < t < \infty$, $0 \leq \sigma < \tau \leq \infty$) кольцо $\mathbb{T}_p(s, t, \sigma, \tau)$ обладает максимальным модулем.

Теоремы 1 и 2 будут доказаны в части 3 данной статьи методом симметризации [6]. Можно показать, что экстремальные кольца в этих теоремах единственны. Кроме того, метод симметризации позволяет существенно расширить класс рассматриваемых областей, например, ввести многосвязные области (см. [4]). В этом случае условие “проекция $\mathcal{E}_1$ соединяет окружность $\gamma(\sigma)$ с окружностью $\gamma(\tau)$ ” можно заменить на “круговая проекция на вещественную положительную полуось проекции $\mathcal{E}_1$ содержит отрезок $[\sigma, \tau]$ ”. Заметим также, что требование “проекция соединяет...” слабее требования “континуум на $\mathcal{R}$ соединяет...” (соответствующие точки). Далее, условие ii) в определении класса $\mathcal{A}_p$ носит “технический характер”, в то время как условия i) и iii) существенны для теорем 1 и 2. Именно, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При некоторых значениях параметров c, r, σ, τ, s и t среди всех колец совокупности $\bigcup_{p \geq 2} \mathcal{A}_p$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 (теоремы 2), не существует кольца с наибольшим модулем, и множество модулей колец, удовлетворяющих всем условиям теоремы 1 (теоремы 2), за исключением одного условия iii) в определении класса $\mathcal{A}_p$, не ограничено сверху.

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся понятия емкости конденсатора и круговой симметризации [6].

2. Емкость конденсатора и симметризация. Конденсатором на римановой поверхности $\mathcal{R}$ называется упорядоченная пара $\mathcal{C} = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ непустых непересекающихся замкнутых множеств $\mathcal{E}_k \subset \overline{\mathcal{R}}$, $k = 0, 1$. Множества $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ называются пластинами конденсатора $\mathcal{C}$. Емкость конденсатора $\mathcal{C}$ определяется равенством

$$\text{cap } \mathcal{C} = \inf \int_{\mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)} |\nabla V|^2 d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем функциям $\mathcal{V}$, липшицевым на любом компактном подмножестве множества $\mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)$, равным нулю на множестве $\mathcal{E}_0$ и единице $\mathcal{E}_1$. Непосредственно из определения емкости конденсатора вытекает свойство монотонности: включения $\mathcal{E}_j^1 \subset \mathcal{E}_j^2$, $j = 0, 1$ влекут неравенство

$$\text{cap}(\mathcal{E}_0^1, \mathcal{E}_1^1) \leq \text{cap}(\mathcal{E}_0^2, \mathcal{E}_1^2).$$

Известно, что если одна из пластин конденсатора содержит границу $\partial\mathcal{R}$ и если существует потенциальная функция $\mathcal{P}$, т.е. функция, непрерывная в $\overline{\mathcal{R}}$, гармоническая в $\mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)$ и равная k на $\mathcal{E}_k$, $k = 0, 1$, то

$$\text{cap } C = \int_{\mathcal{R} \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)} |\nabla \mathcal{P}|^2 d\sigma$$

(принцип Дирихле). Для модуля кольца $\mathcal{G}$ класса $\mathcal{A}_p$ с компонентами дополнения $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ справедливо равенство

$$\text{mod } \mathcal{G} = \frac{1}{\text{cap}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)} \quad (1) \quad \{\text{eq1}\}$$

(см., например, [3], [4]). Известно также, что если компоненты дополнения кольца $\mathcal{G}$ невырожденные, то соответствующий конденсатор $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ имеет потенциальную функцию. В этой связи представляет интерес

ЛЕММА 1 (см. [6; теорема 1]). Пусть $\mathcal{G}$ – невырожденное кольцо класса $\mathcal{A}_p$, и пусть $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ – соответствующий конденсатор. Тогда справедливо неравенство

$$\text{cap } C \geq \text{cap Sym } C,$$

где $\text{Sym } C = (\text{Sym } \mathcal{E}_0, \text{Sym } \mathcal{E}_1)$, $\text{Sym } \mathcal{E}_j = \{W \in \mathcal{R}(T_p) : \text{Sym } \mathcal{P}(W) = j\}$, $j = 0, 1$ и $\mathcal{P}(W)$ – потенциальная функция конденсатора C .

Ниже дается определение симметризованной функции $\text{Sym } \mathcal{V}$ по заданной функции $\mathcal{V}$ в несколько этапов. Напомним сначала определения круговой симметризации множеств и функций, заданных в круге $\overline{U}$, $U := \{w : |w| < 1\}$ (см., например, [1], [7]). Пусть B – открытое в $\overline{U}$ множество. Круговая симметризация относительно вещественной положительной полуоси сопоставляет множеству B кругосимметричное множество B^* , определенное следующим образом. Если при данном ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, окружность $\gamma(\rho)$ не пересекается с множеством B , то она не пересекается и с множеством B^* . Если $\gamma(\rho) \subset B$, то $\gamma(\rho) \subset B^*$. В остальных случаях множество B^* пересекается с $\gamma(\rho)$ по открытой дуге с центром на вещественной положительной полуоси и линейной меры, равной мере пересечения множества B с $\gamma(\rho)$. Нетрудно увидеть, что множество B^* открыто в $\overline{U}$. Рассмотрим вещественнозначную функцию v , непрерывную в $\overline{U}$ и открытые в $\overline{U}$ множества $B_a = \{w \in \overline{U} : v(w) > a\}$, $-\infty < a < +\infty$. Результатом круговой симметризации (относительно вещественной положительной полуоси) функции v называют функцию v^* :

$$v^*(w) = \sup\{a : w \in B_a^*\}, \quad w \in \overline{U}.$$

Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность, лежащая над сферой $\overline{\mathbb{C}_w}$ и покрывающая каждую точку w не более, чем p раз. Будем говорить, что множество $\mathcal{B}$ поверхности $\mathcal{R}$ удовлетворяет условию (A), если для любого ρ , $1 \leq \rho < \infty$, оно не содержит

замкнутую жорданову кривую, лежащую над окружностью $\gamma(\rho)$ и не покрывающую p -кратно эту окружность. Пусть $\mathcal{B}$ – множество на $\mathcal{R}$, открытое относительно $\mathcal{R}_e := \{W \in \mathcal{R} : |\text{пр } W| \geq 1\}$ и удовлетворяющее условию (А). Обозначим через $\mathcal{U}$ p -листный круг, лежащий на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ над множеством $|w| > 1$, и пусть $\mathcal{L}$ – луч на $\overline{\mathcal{U}}$, который лежит над L^+ и принадлежит области $\mathcal{D}_1$ (см. введение). Круговая симметризация относительно луча $\mathcal{L}$ сопоставляет множеству $\mathcal{B}$ кругосимметричное множество $\mathcal{B}^* \subset \overline{\mathcal{U}}$, определенное следующим образом. Если при данном ρ , $1 \leq \rho \leq \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathcal{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathcal{B}^*$. Если множество $\mathcal{B}$ содержит замкнутую кривую, p -кратно лежащую над $\gamma(\rho)$, то $\mathcal{B}^*$ содержит замкнутую жорданову кривую, p -кратно лежащую над $\gamma(\rho)$. В остальных случаях часть множества $\mathcal{B}^*$, лежащая над $\gamma(\rho)$, представляет собой открытую жорданову дугу на $\overline{\mathcal{U}}$, симметричную относительно луча $\mathcal{L}$ (с центром на $\mathcal{L}$) и линейной меры, равной суммарной мере всех дуг на $\mathcal{B}$, лежащих над $\gamma(\rho)$. Рассмотрим неотрицательную непрерывную функцию $\mathcal{V}$ в $\mathcal{R}_e$, для которой множества $\mathcal{B}_a(\mathcal{V}) \equiv \mathcal{B}_a := \{W \in \mathcal{R}_e : \mathcal{V}(W) > a\}$, $0 \leq a < +\infty$, удовлетворяют условию (А) и которая в точках границы поверхности $\mathcal{R}$ обращается в ноль. Результатом круговой симметризации (относительно $\mathcal{L}$) функции $\mathcal{V}$ назовем функцию $\mathcal{V}^*$:

$$\mathcal{V}^*(W) = \begin{cases} \sup\{a \geq 0 : W \in \mathcal{B}_a^*\}, & \text{если } \{a \geq 0 : W \in \mathcal{B}_a^*\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad W \in \overline{\mathcal{U}}.$$

Пусть вновь $\mathcal{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более, чем p раз, и пусть $\mathcal{V}$ – неотрицательная непрерывная функция на $\overline{\mathcal{R}}$, для которой множество $\mathcal{B}_0(\mathcal{V})$ удовлетворяет условию (А) и которая в точках границы поверхности $\mathcal{R}$ обращается в ноль. Результатом симметризации функции $\mathcal{V}$ назовем функцию $\text{Sym } \mathcal{V}$, заданную на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, которая в круге $\overline{\mathcal{U}}$ совпадает с функцией $\mathcal{V}^*$:

$$\text{Sym } \mathcal{V}(W) := \mathcal{V}^*(W), \quad W \in \overline{\mathcal{U}}. \quad (2) \quad \{\text{eq2}\}$$

В остальных точках поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ функция $\text{Sym } \mathcal{V}$ определяется следующим образом. Пусть w – произвольная фиксированная точка круга $\overline{\mathcal{U}}$. Значения функции $\mathcal{V}$ в точках W с проекцией $\text{пр } W = w$ обозначим как

$$v_1(w) \geq v_2(w) \geq \dots \geq v_p(w), \quad w \in \overline{\mathcal{U}}. \quad (3) \quad \{\text{eq3}\}$$

Если для данной точки w не существует точки $W \in \mathcal{R}$ с $\text{пр } W = w$ либо если указанных выше значений (с учетом кратности) меньше, чем p , то соответствующие значения $v_k(w)$ полагаем равными нулю. Поступая так в каждой точке $w \in \overline{\mathcal{U}}$, определим в $\overline{\mathcal{U}}$ p непрерывных функций $v_k(w)$, $k = 1, \dots, p$. Для каждой пары функций (v_k, v_l) , $1 \leq k < l \leq p$, определим F -преобразование, которое сопоставляет этой паре пару других функций (v'_k, v'_l) :

$$\begin{aligned} v'_k(w) &= (\max(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, & w \in \overline{\mathcal{U}}, \\ v'_l(w) &= (\min(v_k^*(w), v_l^*(-w)))^*, & w \in \overline{\mathcal{U}}, \end{aligned}$$

где $*$ означает круговую симметризацию относительно вещественной положительной полуоси. Проведем F -преобразование над парой (v_1, v_2) , затем над парой (v'_1, v_3) ,

$((v'_1)', v_4)$ и т.д. В результате получим совокупность функций

$$(\dots((v'_1)')'\dots)', v'_2, v'_3, \dots, v'_p,$$

которую переименуем вновь соответственно как

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_p,$$

считая при этом

$$M(v_1) \geq m(v_1) \geq M(v_2) \geq M(v_3) \geq \dots \geq M(v_p).$$

Здесь

$$M(v) = \max\{v(w) : |w| = 1\}, \quad m(v) = \min\{v(w) : |w| = 1\}.$$

Далее повторим предыдущую процедуру с набором функций $v_2, \dots, v_p$. Затем с $v_3, \dots, v_p$, пока, наконец, не получим совокупность функций $v_1, v_2, \dots, v_p$, удовлетворяющих неравенствам

$$M(v_k) \geq m(v_k) \geq M(v_{k+1}) \geq m(v_{k+1}), \quad k = 1, \dots, p-1.$$

Перераспределяя значения функций $v_k(w)$ в каждой точке w внутри круга U , можно считать, что выполняются неравенства (3) и $v_k = v_k^*$, $k = 1, \dots, p$.

Доопределим теперь функцию $\text{Sym } \mathcal{V}$ в точках поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, лежащих над кругом $\overline{U}$, по правилу

$$\text{Sym } \mathcal{V}(W) := v_k((-1)^{k+1} \text{пр } W), \quad W \in \overline{\mathcal{D}}_k, \quad |\text{пр } W| \leq 1, \quad k = 1, \dots, p. \quad (4) \quad \{\text{eq4}\}$$

Над окружностью $|w| = 1$ функция $\text{Sym } \mathcal{V}$ определялась нами разными способами. Однако оба способа приводят к одним и тем же значениям функции $\text{Sym } \mathcal{V}$ над $|w| = 1$ [6]. Таким образом, функция $\text{Sym } \mathcal{V}$ определяется соотношениями (2) и (4).

3. Доказательства. Пусть кольцо $\mathcal{G}$ класса $\mathcal{A}_p$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда компоненты дополнения этого кольца $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ невырожденные и, следовательно, соответствующий конденсатор $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ имеет потенциальную функцию $\mathcal{P}(W)$, $\mathcal{P}(W) = j$ на $\mathcal{E}_j$, $j = 0, 1$, и $0 < \mathcal{P}(W) < 1$ на дополнении $R \setminus (\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1)$. Здесь $\mathcal{R}$ – некоторая риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку этой сферы не более, чем p раз. Обозначим через $C^* = (\mathcal{E}_0^*, \mathcal{E}_1^*)$ конденсатор, соответствующий кольцу Гретша $\mathbb{G}_p(c, r, \sigma, \tau)$ так, что $\mathcal{E}_0^*$ – это замкнутый круг на замыкании листа $\mathcal{D}_p$, а $\mathcal{E}_1^*$ – отрезок на листе $\mathcal{D}_1$. Для доказательства теоремы 1 достаточно установить включения

$$\text{Sym } \mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_0^*, \quad \text{Sym } \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_1^*. \quad (5) \quad \{\text{eq5}\}$$

Действительно, в случае выполнения (5) монотонность емкости дает

$$\text{cap Sym } C \geq \text{cap } C^*.$$

По лемме 1

$$\text{cap } C \geq \text{cap Sym } C$$

и равенство (1) для обоих колец приводит к требуемому соотношению. Проверяя первое включение в (5), следует убедиться, что для любой точки W , принадлежащей множеству $\mathcal{E}_0^*$, справедливо равенство

$$\text{Sym } \mathcal{P}(W) = 0. \quad (6) \quad \{\text{eq6}\}$$

Пусть для определенности p нечетное. Тогда $c \leq 0$ и $0 \leq r \leq 1 - c$. Обозначим через Ω_1 часть круга $|w - c| \leq r$, лежащую вне круга U , а через Ω_2 – пересечение этих двух кругов. (Одно из множеств Ω_1, Ω_2 может быть пустым). Пусть $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ – поднятия множеств соответственно Ω_1 и Ω_2 на лист $\mathcal{D}_p$. Ясно, что $\mathcal{E}_0^* = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2$. Если точка W из множества $\mathcal{E}_0^*$ принадлежит множеству $\tilde{\Omega}_1 \subset \bar{U}$, то по определению симметризации функции

$$\text{Sym } \mathcal{P}(W) = \mathcal{P}^*(W).$$

Предположим, что (6) неверно, т.е. $\text{Sym } \mathcal{P}(W) > 0$. Тогда существует такое число $a > 0$, что точка $W \in \mathcal{B}_a^*$, $\mathcal{B}_a = \{W \in \mathcal{R}_e : \mathcal{P}(W) > a\}$. Поэтому, либо множество $\mathcal{B}_a$ содержит замкнутую кривую, p -кратно лежащую над окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho = |\text{pr } W|$, $1 \leq \rho \leq r - c$, либо часть множества $\mathcal{B}_a$, лежащая над $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность дуг, суммарная мера которых строго больше величины $[2\pi(p - 1) + 2 \arg \text{pr } W]\rho$, где аргумент выбирается в пределах от 0 до π . Первое невозможно, так как в этом случае на поверхности $\mathcal{R}$ нет точек множества $\mathcal{E}_0$ (где $\mathcal{P} = 0$), а по условию теоремы проекция множества $\mathcal{E}_0$ содержит круг $|w - c| \leq r$. Второй случай также невозможен, так как из покрытия $\mathcal{E}_0$ круга $|w - c| \leq r$ следует, что суммарная мера части $\mathcal{E}_0$, лежащая над $\gamma(\rho)$ больше либо равна $2(\pi - \arg \tilde{w})\rho$. Здесь $\tilde{w}$ – точка пересечения окружностей $|w - c| = r$ и $\gamma(\rho)$, $0 < \arg \tilde{w} \leq \pi$. Следовательно, линейная мера дополнительной части множества $\mathcal{B}_0$ над $\gamma(\rho)$ не превосходит $[2\pi p - 2(\pi - \arg \tilde{w})]\rho \leq [2\pi(p - 1) + 2 \arg \text{pr } W]\rho$. Пусть теперь точка W из множества $\mathcal{E}_0^*$ принадлежит $\tilde{\Omega}_2$. Так как проекция $\mathcal{E}_0$ содержит Ω_2 , то, ввиду (3), на первом этапе преобразований совокупности функций $\{v_k\}_{k=1}^p$ (см. (3), где $\mathcal{V} \equiv \mathcal{P}$) функция $v_p \equiv 0$ на множестве Ω_2 . Преобразование F над какой-либо парой $(\tilde{v}, v_p)$ дает пару $(\tilde{v}', v'_p)$, где

$$v'_p(w) = (\min(\tilde{v}^*(w), v_p^*(-w)))^*, \quad w \in \bar{U}.$$

Отсюда видно, что $v'_p \equiv 0$ на Ω_2 и т.д. Следовательно, окончательное представление функции v_p равно тождественно нулю на множестве Ω_2 . Учитывая, что p нечетное, заключаем $\text{Sym } \mathcal{P}(W) = v_p(\text{pr } W) = 0$. Таким образом, левое включение в (5) доказано при нечетном p . Случай четного p рассматривается аналогично и отличается от предыдущего лишь значениями параметров c, r и выражениями для линейных мер множеств, лежащих над окружностью $\gamma(\rho)$. Проверяя второе включение в (5), необходимо убедиться, что на отрезке $\mathcal{E}_1^*$ функция $\text{Sym } \mathcal{P}(W)$ равна единице. Напомним, что отрезок $\mathcal{E}_1^*$ расположен на листе $\mathcal{D}_1$ и однолистно покрывает отрезок $[\sigma, \tau]$, $0 \leq \sigma < \tau \leq \infty$. По условию теоремы 1 проекция множества $\mathcal{E}_1$ соединяет окружность $\gamma(\sigma)$ с окружностью $\gamma(\tau)$. Пусть, для определенности, $\sigma \leq 1 \leq \tau$. Тогда на проекции $\mathcal{E}_1$ существует континуум λ_1 , соединяющий окружность $\gamma(\sigma)$ с окружностью $\gamma(1)$, и континуум λ_2 , соединяющий $\gamma(1)$ с $\gamma(\tau)$. На первом этапе преобразований совокупности $\{v_k\}_{k=1}^p$ в круге $\bar{U}$ функция v_1 равна единице на λ_1 . Преобразование F переводит пару (v_1, v_2) в пару (v'_1, v'_2) так, что

$$v'_1(w) = (\max(v_1^*(w), v_2^*(-w)))^*, \quad w \in \bar{U}.$$

Отсюда видно, что $v'_1 = 1$ на отрезке $[\sigma, 1]$. Аналогично, $(v'_1)' = 1$ на $[\sigma, 1]$ и т.д. Следовательно, окончательное представление функции v_1 равно единице на отрезке $[\sigma, 1]$. Поэтому для точек W множества $\mathcal{E}_1^*$, лежащих над $[\sigma, 1]$, имеем

$$\text{Sym } \mathcal{P}(W) = v_1(\text{пр } W) = 1,$$

и, значит, $W \in \text{Sym } \mathcal{E}_1$. Значения функции $\text{Sym } \mathcal{P}(W)$ для точек W с $|\text{пр } W| > 1$ определяются формулой (2), где $\mathcal{V} = \mathcal{P}$. Так как континуум λ_2 соединяет окружность $\gamma(1)$ с окружностью $\gamma(\tau)$, то для любого ρ , $1 \leq \rho \leq \tau$, пересечение λ_2 с окружностью $\gamma(\rho)$ не пусто. Следовательно, для любого ρ , $1 \leq \rho \leq \tau$, и любого числа a , $0 < a < 1$, над окружностью $\gamma(\rho)$ найдется точка множества $\mathcal{B}_a$. Поэтому множество $\mathcal{B}_a^*$ содержит отрезок на луче $\mathcal{L}$ с проекцией $[1, \tau]$. Отсюда $\mathcal{P}^*(W) = 1$ на этом отрезке, и мы завершаем доказательство второго включения в (5). В случае $1 \notin [\sigma, \tau]$ доказательство включения (5) совпадает по существу с предыдущим доказательством и поэтому здесь не приводится.

Пусть кольцо $\mathcal{G}$ класса $\mathcal{A}_p$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Следуя приведенному выше доказательству, введем обозначения $C = (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$, $\mathcal{P}(W)$, $\mathcal{R}$ и $C^* = (\mathcal{E}_0^*, \mathcal{E}_1^*)$, только на этот раз $\mathcal{E}_j^*$, $j = 0, 1$, суть компоненты дополнения кольца Тейхмюллера $\mathbb{T}_p(s, t, \sigma, \tau)$ до поверхности $\mathcal{R}(T_p)$. Полагаем $\mathcal{E}_0^*$ – это отрезок на листе $\overline{\mathcal{D}}_p$ с проекцией $[(-1)^p s, (-1)^p t]$, а $\mathcal{E}_1^*$ – отрезок на листе $\mathcal{D}_1$, проекция которого есть $[\sigma, \tau]$. Как и при доказательстве первой теоремы убеждаемся, что достаточно установить включения (5). Более того, доказательство второго включения в (5) совпадает с соответствующим доказательством, приведенным выше. Проверим первое включение в (5), и пусть для определенности p четное. Наиболее общим случаем является ситуация, когда отрезок $[s, t]$ содержит точку $w = 1$. Обозначим через λ_1 континуум на множестве $\text{пр } \mathcal{E}_0$, соединяющий окружности $\gamma(s)$, $\gamma(1)$, и через λ_2 – континуум на $\text{пр } \mathcal{E}_0$, соединяющий $\gamma(1)$ с $\gamma(t)$. На первом шаге (3) преобразований совокупности функций $\{v_k\}_{k=1}^p$ функция $v_p = 0$ на континууме λ_1 . Следовательно, $v_p^* = 0$ по крайней мере на отрезке $[-1, -s]$. Преобразование F над какой-либо парой вида $(\tilde{v}, v_p)$ дает пару $(\tilde{v}', v'_p)$ с функцией $v'_p = 0$ на отрезке $[-1, -s]$ и т.д. Окончательно $v_p = 0$ на $[-1, -s]$ и, следовательно, $\text{Sym } \mathcal{P}(W) = v_p(-\text{пр } W) = 0$ на части $\mathcal{E}_0^*$, лежащей над $[s, 1]$. То есть эта часть множества $\mathcal{E}_0^*$ принадлежит пластине $\text{Sym } \mathcal{E}_0$. Далее, любая окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho \leq t$, пересекает континуум $\lambda_2 \subset \text{пр } \mathcal{E}_0$. Следовательно, для любого ρ , $1 \leq \rho \leq t$, над окружностью $\gamma(\rho)$ есть по крайней мере одна точка $W \in \mathcal{R}$, в которой $\mathcal{P}(W) = 0$. Отсюда вытекает, в частности, что множество $\mathcal{B}_0$ не содержит замкнутой кривой, p -кратно лежащей над $\gamma(\rho)$, и часть $\mathcal{B}_0^*$, лежащая над $\gamma(\rho)$, “выпускает” точку поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, лежащую над отрезком $[1, t]$, $1 \leq \rho \leq t$. Из определения симметризованной функции заключаем, что в такой точке $\text{Sym } \mathcal{P}(W) = \mathcal{P}^*(W) = 0$. Левое включение в (5) доказано. Ситуации, когда $1 \notin [s, t]$ (либо когда p нечетное) рассматриваются аналогично и даже проще.

Для доказательства утверждения 1 нужно привести примеры колец, удовлетворяющих условиям этого утверждения, но обладающих сколь угодно большим модулем. Прежде всего заметим, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{mod } \mathbb{G}_p(0, 1, 1, \infty) = \infty. \quad (7) \quad \{\text{eq7}\}$$

Действительно, ввиду конформной инвариантности

$$\text{mod } \mathbb{G}_p(0, 1, 1, \infty) = \text{mod} \{ \mathbb{C}_z \setminus (E_0^p \cup [1, +\infty]) \},$$

где E_0^p – часть лемнискаты $\{z : |T_p(z)| \leq 1\}$, которую полином T_p однолистно отображает на круг $|w| \leq 1$ и которая содержит точки -1 и $\cos(\pi(p-1)/p)$. Полином T_p представим в виде

$$T_p(z) = \Phi(\Psi^p(z)),$$

где Φ – функция Жуковского, а Ψ – та ветвь в области $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus [-1, 1]$ обратной Φ функции, которая отображает точку ∞ в ноль. Отсюда легко видеть, что если p устремить к ∞ , то множество E_0^p стягивается в точку -1 . Так как модуль вырожденного кольца равен бесконечности, то непрерывность модулей дает требуемое равенство (7). Еще проще увидеть, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{mod } \mathbb{T}_p(0, 1, 1, \infty) = \infty,$$

поскольку

$$\text{mod } \mathbb{T}_p(0, 1, 1, \infty) = \text{mod} \left\{ \mathbb{C}_z \setminus \left(\left[-1, \cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2p} \right) \right] \cup [1, +\infty] \right) \right\}.$$

Это завершает доказательство первой части утверждения 1. Приведем теперь пример кольца, удовлетворяющего всем условиям теоремы 1, за исключением одного условия iii) в определении класса $\mathcal{A}_p$. Риманова поверхность $\mathcal{R}(T_p^d)$ полинома $T_p^d(z) := dT_p(z)$, $d > 1$ получается из поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ растяжением в d раз. “Растянутые” соответственно листы поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ обозначим через $\mathcal{D}_k^d$, $k = 1, \dots, p$. На поверхности $\mathcal{R}(T_p^d)$ рассмотрим кольцо $\mathcal{G}_d$, получающееся удалением из этой поверхности замкнутого круга $\mathcal{E}_0$ на листе $\mathcal{D}_p^d$ с проекцией $|w| \leq 1$ и удалением луча $\mathcal{E}_1$ на листе $\mathcal{D}_1^d$ с проекцией на луче $[0, +\infty]$. Кольцо $\mathcal{G}_d$ удовлетворяет условиям теоремы 1 с параметрами $c = 0$, $r = 1$, $\sigma = 0$, $\tau = \infty$, за исключением условия принадлежности классу $\mathcal{A}_p$. Требования i) и ii) очевидно выполняются (в качестве поверхности $\mathcal{R}$ можно взять поверхность $\mathcal{R}(T_p^d)$ с “пустой” границей). Что касается условия iii), то оно нарушается для всех значений p из промежутка $(1, d)$. Ввиду конформной инвариантности модуль кольца $\mathcal{G}_d$ равен модулю кольца $\mathbb{C}_z \setminus (F^d \cup [\cos(\pi/2p), +\infty])$, где F^d есть “почти круг” с центром в точке $\cos(\pi(2p-1)/2p)$ радиуса

$$\left[d \left| T_p' \left(\cos \left(\frac{\pi(2p-1)}{2p} \right) \right) \right| \right]^{-1}, \quad d \rightarrow \infty.$$

При $d \rightarrow \infty$ модуль последнего кольца стремится к бесконечности. Пример кольца со сколь угодно большим модулем, удовлетворяющего всем условиям теоремы 2, за исключением одного условия iii) в определении класса $\mathcal{A}_p$, получается из предыдущего примера заменой круга $|w| \leq 1$ на отрезок $[0, (-1)^p]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962.

- [2] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, М., 1969.
- [3] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill Ser. in Higher Math., McGraw-Hill, New York, 1973.
- [4] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [5] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968.
- [6] В. Н. Дубинин, “Новая версия круговой симметризации с приложениями к p -листным функциям”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 79–94.
- [7] W. K. Hayman, *Multivalent Functions*, Cambridge Tracts in Math., **100**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

В. Н. Дубинин

Дальневосточный федеральный университет

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

12.05.2012