Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Худайкулиев, Эллиптическое уравнение с сингулярным потенциалом в области с конической точкой, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 928–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10149>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:45:24

Эллиптическое уравнение с сингулярным потенциалом в области с конической точкой

Б. А. Худайкулиев

В работе изучается поведение неотрицательных решений задачи

$$-\Delta u = V(x)u, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi(x)$$

в конической области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, где $0 \leq V(x) \in L_1(\Omega)$, $0 \leq \phi(x) \in L_1(\partial\Omega)$ и $\phi(x)$ непрерывна на границе $\partial\Omega$, и доказывается, что существует постоянная $C_*(n) = (n-2)^2/4$ такая, что если $V_0(x) = (c + \lambda_1)|x|^{-2}$, то при $0 \leq c \leq C_*(n)$ и $V(x) \leq V_0(x)$ в области Ω , эта задача имеет неотрицательное решение при любой неотрицательной граничной функции $\phi(x) \in L_1(\partial\Omega)$; при $c > C_*(n)$ и $V(x) \geq V_0(x)$ в области Ω , эта задача не имеет неотрицательных решений, если $\phi(x) > 0$.

Библиография: 4 названия.

Рассматривается задача нахождения неотрицательной функции $u(x)$ такой, что

$$-\Delta u = Vu, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \phi, \tag{2}$$

в области $\Omega = G \cap B_\rho \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, где G – область с конической точкой, $B_\rho = B(0, \rho)$ – шар радиуса ρ , $\rho \leq 1$, с центром в начале координат, $\partial\Omega$ – граница области Ω . Предполагается, что граница $\partial\Omega$ области Ω является, кроме начала координат, достаточно гладкой. Напомним, что область $G \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, называется *областью с конической точкой*, если ее граница ∂G является бесконечно гладкой всюду, кроме начала координат O , а в некоторой окрестности начала координат область G совпадает с конусом Σ , вершиной которого является точка O .

В качестве решения уравнения (1) понимается обобщенная функция $u \in D'(\Omega)$ такая, что $u(x) \geq 0$, $Vu \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ и $u = \phi$ для почти всех $x \in \partial\Omega$. Предполагается, что $0 \leq V \in L_1(\Omega)$, $0 \leq \phi \in L_1(\partial\Omega)$ и $\phi(x)$ заданная непрерывная на границе $\partial\Omega$ функция, где $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ – пространство локально интегрируемых в Ω функций, $L_1(\partial\Omega)$ – пространство интегрируемых на $\partial\Omega$ функций. Через $D'(\Omega)$ обозначим пространство обобщенных функций.

Введем полярные координаты (r, ω) , $r = |x|$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$, с центром в начале координат. Оператор Лапласа в полярных координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\omega,$$

где Δ_ω – оператор Бельтрами. Пусть λ_ρ – наименьшее собственное значение оператора Бельтрами $-\Delta_\omega$ на $G \cap \partial B_\rho$ с нулевым краевым условием Дирихле на $\partial G \cap \partial B_\rho$ и $Y_\rho(\omega)$ – собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению λ_ρ .

Пусть $\varphi(x) = |x|^{-\alpha} Y_\rho(\omega)$. Найдем функцию $V_0(x)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta\varphi + V_0(x)\varphi = 0$ в $D'(\Omega)$. Поскольку $\varphi \in C^\infty$ при $x \neq 0$, то переходя к полярным координатам (r, ω) , получаем

$$-\Delta\varphi = (\alpha(n-2-\alpha) + \lambda_\rho)|x|^{-2}\varphi,$$

так что $-\Delta\varphi/\varphi = (c + \lambda_\rho)|x|^{-2}$, где $c = \alpha(n-2-\alpha)$.

Положим

$$V_0(x) = \frac{c + \lambda_\rho}{|x|^2}, \quad x \in \Omega.$$

Когда $\varphi(x) = |x|^{-\alpha} Y_\rho(\omega) > 0$, условие $\Delta\varphi \in L_1(\Omega)$ означает, что $n-2-\alpha > 0$. Последнее выполняется, если $c > 0$ (и $\alpha > 0$). Заметим, что при $0 \leq c \leq C_*(n) = (n-2)^2/4$ величина α определяется из равенства

$$\alpha = \frac{n-2}{2} - \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} - c}.$$

В работе изучается поведение неотрицательных решений задачи (1), (2) и доказывается, что существует постоянная $C_* = C_*(n) = (n-2)^2/4$ такая, что если $V_0(x) = (c + \lambda_\rho)/|x|^2$, то при $0 \leq c \leq C_*$ и $V \leq V_0$ в области Ω , эта задача имеет неотрицательное решение при любой неотрицательной непрерывной граничной функции $\phi \in L_1(\partial\Omega)$; а при $c > C_*$ и $V \geq V_0$ не имеет неотрицательных решений, если $\phi > 0$.

Аналогичный вопрос изучен в работе [1] для первой смешанной задачи для линейного уравнения теплопроводности и в работе [2] для первой смешанной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в случае, когда Ω – область с достаточно гладкой границей, содержащая единичный шар с центром в начале координат.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. 1. Пусть $V \geq 0$. Если $0 \leq c \leq C_*$ и $V \leq V_0$ в Ω , то задача (1), (2) имеет неотрицательное решение при любой неотрицательной непрерывной граничной функции $\phi \in L_1(\partial\Omega)$.

2. Если $c > C_*$ и $V \geq V_0$ в Ω , то при $\phi > 0$ задача (1), (2) не имеет неотрицательных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем первую часть теоремы.

$$-\Delta u_m = V_m u_m, \tag{1_m}$$

$$u_m|_{\partial\Omega} = \phi_m, \tag{2_m}$$

где $m = 1, 2, \dots$, $0 \leq V_m \leq V$, $\{V_m\}$ – монотонно возрастающая последовательность ограниченных измеримых функций такая, что $\lim_{m \rightarrow \infty} V_m = V$ для почти всех $x \in \Omega$, и $0 \leq \phi_m \leq \phi$, $\{\phi_m\} \subset C^1(\bar{\Omega})$ – монотонно возрастающая последовательность неотрицательных непрерывно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к неотрицательной непрерывной граничной функции $\phi \in L_1(\partial\Omega)$. Из классической теории линейных эллиптических задач [3] следует, что задача (1_m), (2_m) имеет

единственное ограниченное неотрицательное решение. Это решение для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_m(x) = - \int_{\partial\Omega} \phi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu} dS_y + \int_{\Omega} G(x, y) V_m(y) u_m(y) dy, \quad (3)$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $G(x, y)$ – функция Грина задачи $-\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, причем $G(x, y) \geq 0$, $\partial G / \partial \nu < 0$ в Ω . Очевидно, что последовательность $\{u_m\}$ монотонно не убывает.

Покажем, что предел u последовательности $\{u_m\}$ решений задачи (1_m), (2_m) является решением задачи (1), (2). Умножим уравнение (1_m) на $u_m^{p-1} \varphi^{2-p} \psi^2$, $p \geq 2$, где $\psi = \psi(x)$ – срезающая функция для области Ω , $\varphi = \varphi(x) = |x|^{-\alpha} Y_\rho(\omega)$ и α определяется из равенства $\alpha(n-2-\alpha) = c$, и проинтегрируем по Ω :

$$- \int_{\Omega} \Delta u_m u_m^{p-1} \varphi^{2-p} \psi^2 dx = \int_{\Omega} V_m u_m u_m^{p-1} \varphi^{2-p} \psi^2 dx.$$

Положим $k_m = u_m / \varphi$. После прямых вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} & 4p^{-2}(p-1) \int_{\Omega} |\nabla(k_m^{p/2})|^2 \varphi^2 \psi^2 dx + \int_{\Omega} k_m^p \varphi (-\Delta \varphi) \psi^2 dx + 2 \int_{\Omega} \nabla k_m k_m^{p-1} \varphi^2 \psi \nabla \psi dx \\ & = \int_{\Omega} V_m k_m^p \varphi^2 \psi^2 dx. \end{aligned}$$

Поскольку по предположению $-\Delta \varphi \varphi = V_0 \varphi^2 \geq V_m \varphi^2$, из последнего равенства получаем

$$4p^{-2}(p-1) \int_{\Omega} |\nabla(k_m^{p/2})|^2 \varphi^2 \psi^2 dx \leq 2 \left| \int_{\Omega} \nabla k_m k_m^{p-1} \varphi^2 \psi \nabla \psi dx \right|. \quad (4)$$

Для интеграла в правой части используем неравенство Коши:

$$2 \left| \int_{\Omega} \nabla k_m k_m^{p-1} \varphi^2 \psi \nabla \psi dx \right| \leq \frac{2}{p^2} \int_{\Omega} |\nabla(k_m^{p/2})|^2 \varphi^2 \psi^2 dx + 2 \int_{\Omega} k_m^p \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx.$$

Теперь неравенство (4) можно записать в следующем виде:

$$2p^{-2} \left(p - \frac{3}{2} \right) \int_{\Omega} |\nabla(k_m^{p/2})|^2 \varphi^2 \psi^2 dx \leq \int_{\Omega} k_m^p \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx,$$

или

$$\int_{\Omega} |\nabla(k_m^{p/2})|^2 \varphi^2 \psi^2 dx \leq \frac{p^2}{2(p-3/2)} \int_{\Omega} k_m^p \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx. \quad (5)$$

Теперь докажем следующее неравенство.

ЛЕММА. Пусть $0 \leq h(s) \in C^1[0, r]$ и $h(r) = 0$, $0 < r \leq 1$. Тогда при $p \geq 2$ выполняется неравенство

$$\left(\int_0^r h^{np/(n-2)}(s) s^{n-2\alpha-1} ds \right)^{(n-2)/n} \leq K \int_0^r |(h^{p/2}(s))'|^2 s^{n-2\alpha-1} ds, \quad (6)$$

где постоянная $K = K(n, \alpha) > 0$ и α определяется из равенства $\alpha(n-2-\alpha) = c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Интегрируя по частям и используя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^r h^{np/(n-2)}(s) s^{n-2\alpha-1} ds \\
 &= -\frac{np}{(n-2)(n-2\alpha)} \int_0^r h^{np/(n-2)-1}(s) h'(s) s^{n-2\alpha} ds \\
 &\leq \frac{2n}{(n-2)(n-2\alpha)} \left(\int_0^r h^{p(n+2)/(n-2)}(s) s^{n-2\alpha+1} ds \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\int_0^r |(h^{p/2}(s))'|^2 s^{n-2\alpha-1} ds \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{2n}{(n-2)(n-2\alpha)} \left(\int_0^r |(h^{p/2}(s))'|^2 s^{n-2\alpha-1} ds \right)^{1/2} \\
 &\quad \times \left(\int_0^r h^{np/(n-2)}(s) s^{n-2\alpha-1} ds \right)^{1/2} \left(\sup_{s \in [0, r]} \{h^{2p/(n-2)}(s) s^2\} \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
 & \int_0^r h^{np/(n-2)}(s) s^{n-2\alpha-1} ds \\
 &\leq \sup_{s \in [0, r]} \{h^{2p/(n-2)}(s) s^2\} \left(\frac{2n}{(n-2)(n-2\alpha)} \right)^2 \int_0^r |(h^{p/2}(s))'|^2 s^{n-2\alpha-1} ds.
 \end{aligned}$$

Теперь покажем, что

$$\sup_{s \in [0, r]} \{h^{2p/(n-2)}(s) s^2\} \leq K_1 \left(\int_0^r |(h^{p/2}(s))'|^2 s^{n-2\alpha-1} ds \right)^{2/(n-2)}.$$

Имеем (отметим, что $h^{2p/(n-2)}(s) s^2 = [h^{p/2}(s) s^{(n-2)/2}]^{4/(n-2)}$.)

$$\begin{aligned}
 & \sup_{s \in [0, r]} s^{(n-2)/2} \{h^{p/2}(s)\} \\
 &= \sup_{s \in [0, r]} s^{(n-2)/2} \{h^{p/2}(s) - h^{p/2}(r)\} = \sup_{s \in [0, r]} s^{(n-2)/2} \left\{ - \int_s^r (h^{p/2}(\tau))' d\tau \right\} \\
 &\leq \sup_{s \in [0, r]} s^{(n-2)/2} \left\{ \left(\int_s^r |(h^{p/2}(\tau))'|^2 \tau^{n-2\alpha-1} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_s^r \tau^{1+2\alpha-n} d\tau \right)^{1/2} \right\} \\
 &\leq \sup_{s \in [0, r]} M(s) \left(\int_0^r |(h^{p/2}(\tau))'|^2 \tau^{n-2\alpha-1} d\tau \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 M(s) &= s^{(n-2)/2} \left(\int_s^r \tau^{1+2\alpha-n} d\tau \right)^{1/2} \\
 &= s^{(n-2)/2} ((2+2\alpha-n)^{-1} (r^{2+2\alpha-n} - s^{2+2\alpha-n}))^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Пусть

$$M^2(s) = s^{n-2} (2+2\alpha-n)^{-1} (r^{2+2\alpha-n} - s^{2+2\alpha-n}).$$

Так как при $\alpha \rightarrow (n-2)/2$ по правилу Лопиталя

$$\lim_{\alpha \rightarrow (n-2)/2} \frac{s^{2+2\alpha-n} - r^{2+2\alpha-n}}{n-2\alpha-2} = \lim_{\alpha \rightarrow (n-2)/2} (r^{2+2\alpha-n} \ln r - s^{2+2\alpha-n} \ln s) = \ln \frac{r}{s},$$

то очевидно, что найдется постоянная $K_2 > 0$ такая, что $\sup_{s \in [0, r]} M(s) \leq K_2$. Откуда и следует неравенство (6). Лемма доказана.

Теперь переходим к доказательству теоремы. Пусть $B_r = B(0, r) \subset B_\rho$, $\Omega_r = G \cap B_r$. Выберем функцию ψ следующим образом:

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{r-\delta}, \quad \delta > 0, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega \setminus \Omega_r. \end{cases}$$

Предположим, что $|\nabla \psi|^2 \leq C_1 \delta^{-2}$. Тогда неравенство (5) примет вид

$$\int_{\Omega_{r-\delta}} |\nabla(k_m^{p/2})|^2 \varphi^2 dx \leq \frac{C_1 \delta^{-2} p^2}{2(p-3/2)} \int_{\Omega_r} k_m^p \varphi^2 dx. \quad (7)$$

Умножив неравенство (6) на $Y_r^2(\omega)$ и проинтегрировав по угловым координатам, для любой неотрицательной функции $v \in C_0^1(\Omega_r)$ получаем

$$\left(\int_{\Omega_r} v^{np/(n-2)} \varphi^2 dx \right)^{(n-2)/n} \leq C_2 \int_{\Omega_r} |\nabla(v^{p/2})|^2 \varphi^2 dx, \quad (8)$$

где $Y_r(\omega)$ – собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению λ_r оператора Бельтрами $-\Delta_\omega$ на $G \cap \partial B_r$ с нулевым краевым условием Дирихле на $\partial G \cap \partial B_r$. Поэтому, используя неравенство (7) и неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_{r-\delta}} k_m^{np/(n-2)} \varphi^2 dx \right)^{(n-2)/n} \\ & \leq \left(\int_{\Omega_r} (k_m \psi)^{np/(n-2)} \varphi^2 dx \right)^{(n-2)/n} \leq C_2 \int_{\Omega_r} |\nabla(k_m^{p/2} \psi)|^2 \varphi^2 dx \\ & \leq 2C_2 \int_{\Omega_r} (|\nabla(k_m^{p/2})|^2 \psi^2 + k_m^p |\nabla \psi|^2) \varphi^2 dx \\ & \leq 2C_1 C_2 \delta^{-2} \left(\frac{p^2}{2(p-3/2)} + 1 \right) \int_{\Omega_r} k_m^p \varphi^2 dx \leq \frac{C_3 \delta^{-2} p^2}{p-3/2} \int_{\Omega_r} k_m^p \varphi^2 dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\int_{\Omega_{r-\delta}} k_m^{np/(n-2)} \varphi^2 dx \right)^{(n-2)/(pn)} \leq \left(\frac{C_3 \delta^{-2} p^2}{p-3/2} \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega_r} k_m^p \varphi^2 dx \right)^{1/p}. \quad (9)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad r_{j+1} = r_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad p_j = 2 \left(\frac{n}{n-2} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad r_1 = r.$$

Тогда в этих обозначениях неравенство (9) примет вид

$$\left(\int_{\Omega_{r_{j+1}}} k_m^{p_{j+1}} \varphi^2 dx \right)^{1/p_{j+1}} \leq \left(\frac{C_3 2^{2j} p_j^2}{\varepsilon^2 (p_j - 3/2)} \right)^{1/p_j} \left(\int_{\Omega_{r_j}} k_m^{p_j} \varphi^2 dx \right)^{1/p_j}, \quad (10)$$

откуда по индукции находим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_{r_{j+1}}} k_m^{p_{j+1}} \varphi^2 dx \right)^{1/p_{j+1}} \\ & \leq \left(\frac{C_3 2^{2j} p_j^2}{\varepsilon^2 (p_j - 3/2)} \right)^{1/p_j} \cdots \left(\frac{C_3 2^{2j} p_1^2}{\varepsilon^2 (p_1 - 3/2)} \right)^{1/p_1} \left(\int_{\Omega_r} u_m^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{C_4} \left(\frac{C_3 p_j^2}{\varepsilon^2 (p_j - 3/2)} \right)^{1/p_j} \cdots \left(\frac{C_3 p_1^2}{\varepsilon^2 (p_1 - 3/2)} \right)^{1/p_1} \cdot 2^{\sum_{i=1}^j (2i/p_i)}, \end{aligned} \quad (11)$$

так как $u_m = k_m \varphi$ и $\int_{\Omega_r} u_m^2 dx \leq C_4$, $C_4 > 0$ [4; с. 132]. Но ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p_j} \ln \left(\frac{C_3 p_j^2}{\varepsilon^2 (p_j - 3/2)} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$$

сходится, так как $\alpha_j \sim \mu^{-j} \ln(C\mu^j)$ при $\mu > 1$. Кроме того, сходится и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j}{p_j} = \sum_{j=1}^{\infty} j \left(\frac{n-2}{n} \right)^{j-1}.$$

Отсюда для всех $j \geq 1$ имеем

$$\left(\int_{\Omega_{r_j}} k_m^{p_j} \varphi^2 dx \right)^{1/p_j} \leq A,$$

причем постоянная $A > 0$ не зависит от p_j . Поэтому, переходя в неравенстве (11) к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем $\sup k_m \leq A$ для почти всех $x \in \Omega$. Это означает, что $k_m \leq A$ для почти всех $x \in \Omega$ и $u_m \leq A\varphi$ для почти всех $x \in \Omega$. В силу монотонности последовательности $\{u_m\}$ можем положить

$$k = \lim_{m \rightarrow \infty} k_m, \quad u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m$$

для почти всех $x \in \Omega$.

Теперь покажем, что $Vu \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$. Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ такую, что $u(x_0)$ конечна. Тогда для любого m и для любой компактной подобласти $\Omega' \subset \Omega$ такой, что $\partial\Omega' \cap \partial\Omega = \{0\}$, из интегрального уравнения для функции $u_m(x)$ имеем

$$u_m(x_0) \geq \int_{\Omega'} G(x_0, y) V_m(y) u_m(y) dy.$$

Но в силу сильного принципа максимума $G(x_0, y) > 0$, следовательно, из неравенства Харнака следует, что существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что $G(x_0, y) \geq C_0$ в Ω' . Поэтому

$$\int_{\Omega'} V_m(y) u_m(y) dy \leq C_0^{-1} u_m(x_0) \leq C_0^{-1} u(x_0). \quad (12)$$

Это означает, что $Vu \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$.

Поскольку u_m – решение задачи (1_m) , (2_m) для любой функции $\xi \in C_0^\infty(\Omega')$ имеем

$$\int_{\Omega'} u_m \Delta \xi \, dx + \int_{\Omega'} V_m u_m \xi \, dx = 0.$$

Отсюда, учитывая (12) и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{\Omega'} u \Delta \xi \, dx + \int_{\Omega'} V u \xi \, dx = 0.$$

Это и показывает, что $u(x)$ является решением задачи (1), (2). Первая часть теоремы доказана.

Теперь покажем, что если $V \geq V_0$, и $\phi \neq 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$ такой, что $\partial\Omega' \cap \partial\Omega = \{0\}$, существует постоянная $C = C(\varepsilon, \Omega') > 0$ такая, что

$$u(x) \geq C \cdot \varphi(x) \quad (13)$$

для почти всех $x \in \Omega'$, где $\varphi(x) = |x|^{-\alpha} Y_r(\omega)$, $Y_r(\omega)$ – собственная функция, соответствующая наименьшему собственному значению λ_r оператора Бельтрами $-\Delta_\omega$ на $G' \cap \partial B_r$ с нулевым краевым условием Дирихле на $\partial G' \cap \partial B_r$, α определяется из равенства $\alpha(n-2-\alpha) = c$.

Пусть $B_0 = B(0, r_0) \Subset B_\rho = B(0, \rho)$ – шар радиуса r_0 с центром в начале координат, $G' \subset G$ – такая область, что $\partial G' \cap \partial G = \{0\}$, $\Omega_0 = G' \cap B_0$, $\Omega_0 \subset \Omega'$. Далее, пусть v – решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v &= V_0 v, \\ v|_{\partial\Omega_0} &= \phi. \end{aligned}$$

Здесь v – предел последовательности $\{v_m\}$ единственных неотрицательных решений задачи

$$\begin{aligned} -\Delta v_m &= V_m v_m, \\ v_m|_{\partial\Omega_0} &= \phi_m, \end{aligned} \quad (14)$$

где $V_m = \inf\{V_0, m\}$ и $\{\phi_m\} \subset C^1(\overline{\Omega}_0)$ – монотонно возрастающая последовательность неотрицательных непрерывно дифференцируемых функций, равномерно сходящаяся к неотрицательной непрерывной граничной функции $\phi \in L_1(\partial\Omega_0)$. Очевидно, что $u \geq v \geq v_m$. Покажем, что для почти всех $x \in (1/2)\Omega_0 = \Omega_{r_0/2}$ выполняется неравенство

$$v(x) \geq \text{Const} \cdot \varphi(x). \quad (15)$$

Пусть $g: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ – неотрицательная выпуклая функция из C^2 . Умножим уравнение (14) на $g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2$, где $k_m = v_m/\varphi$, ψ – срезающая функция для области Ω_0 , и проинтегрируем по Ω_0 :

$$-\int_{\Omega_0} \Delta v_m g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2 \, dx = \int_{\Omega_0} V_m v_m g'(k_m)g(k_m)\varphi\psi^2 \, dx. \quad (16)$$

Однако

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_0} \Delta v_m g'(k_m) g(k_m) \varphi \psi^2 dx &= \int_{\Omega_0} \nabla(k_m \varphi) \nabla(g'(k_m) g(k_m) \varphi \psi^2) dx \\ &= \int_{\Omega_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2 \psi^2 dx + \int_{\Omega_0} g''(k_m) |\nabla k_m|^2 g(k_m) \varphi^2 \psi^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega_0} \nabla g(k_m) g(k_m) \varphi^2 \nabla \psi^2 dx + \int_{\Omega_0} g'(k_m) g(k_m) k_m \varphi \psi^2 (-\Delta \varphi) dx. \end{aligned}$$

Отсюда (16) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2 \psi^2 dx + \int_{\Omega_0} g''(k_m) |\nabla k_m|^2 g(k_m) \varphi^2 \psi^2 dx + \int_{\Omega_0} \nabla g(k_m) g(k_m) \varphi^2 \nabla \psi^2 dx \\ = \int_{\Omega_0} (\Delta \varphi + V_m \varphi) g'(k_m) g(k_m) k_m \varphi \psi^2 dx. \end{aligned}$$

Но второй член в левой части неотрицателен, так как функция g выпукла и неотрицательна. Для третьего члена в левой части используем неравенство Коши:

$$2 \left| \int_{\Omega_0} \nabla g(k_m) g(k_m) \varphi^2 \psi \nabla \psi dx \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2 \psi^2 dx + 2 \int_{\Omega_0} g^2(k_m) \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} |\nabla g(k_m)|^2 \varphi^2 \psi^2 dx \\ \leq 2 \int_{\Omega_0} g^2(k_m) \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx + \int_{\Omega_0} (\Delta \varphi + V_m \varphi) g'(k_m) g(k_m) k_m \varphi \psi^2 dx. \end{aligned}$$

Пусть $B_r = B(0, r)$ – шар достаточно малого радиуса, $\Omega_r = \Omega_0 \cap B_r$. Теперь предположим, что $\varphi \Delta \varphi \in L_1(\Omega_r)$ (что эквивалентно условию $\alpha < (n-2)/2$). Так как $V_0 = -\Delta \varphi / \varphi$ и $V_m \uparrow V_0$ почти всюду в Ω_r , то подынтегральное выражение второго интеграла в правой части почти всюду в Ω_r стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. (Здесь используем то, что $\|k_m\|_\infty \leq \text{Const}$ и предположения на g). Следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла второй член в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{\Omega_r} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 \psi^2 dx \leq 4 \int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 |\nabla \psi|^2 dx. \quad (17)$$

Выберем функцию ψ следующим образом:

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_{r-\delta}, \delta > 0, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega_0 \setminus \Omega_r. \end{cases}$$

Предположим, что $|\nabla \psi|^2 \leq C_5 \delta^{-2}$, где постоянная $C_5 > 0$ не зависит от δ . Тогда неравенство (17) примет вид

$$\int_{\Omega_{r-\delta}} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 dx \leq 4C_5 \delta^{-2} \int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx. \quad (18)$$

Теперь нам понадобится следующий факт из работы [1; с. 129]:

Если $0 < r \leq 1$ и $h(s) \in C^1[0, r]$, то выполняется неравенство

$$\left(\int_0^r |h(s)|^q s^{n-2\alpha-1} ds \right)^{2/q} \leq C_6 \int_0^r [|h'(s)|^2 + h^2(s)] s^{n-2\alpha-1} ds, \quad (19)$$

где $1/q > 1/2 - 1/(n - 2\alpha)$ ($q < \infty$, если $n - 2\alpha = 2$), где постоянная $C_6 > 0$ не зависит от r .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если Q задано и если

$$2 \leq q \leq \min\{Q, 2(n - 2\alpha)(n - 2\alpha - 2)^{-1}\},$$

то постоянная C_6 в неравенстве (19) равномерно ограничена при $\alpha \in [0, (n - 2)/2]$.

Умножив неравенство (19) на $Y_r^2(\omega)$ и проинтегрировав по угловым координатам, для любой функции $h \in C^1(\Omega_r)$ получаем

$$\left(\int_{\Omega_r} |h|^q \varphi^2 dx \right)^{2/q} \leq C_6 \int_{\Omega_r} [|\nabla h|^2 + h^2] \varphi^2 dx.$$

Определим β формулой $\beta + 2/q = 1$, где $1 > 2/q \geq 1/2 - 1/(n - 2\alpha)$. Используя последнее неравенство и неравенство Гёльдера для неотрицательной функции h , имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} h^{2+2\beta} \varphi^2 dx &\leq \left(\int_{\Omega_r} h^q \varphi^2 dx \right)^{2/q} \left(\int_{\Omega_r} h^2 \varphi^2 dx \right)^\beta \\ &\leq C_6 \left(\int_{\Omega_r} |\nabla h|^2 \varphi^2 dx + \int_{\Omega_r} h^2 \varphi^2 dx \right) \left(\int_{\Omega_r} h^2 \varphi^2 dx \right)^\beta, \end{aligned} \quad (20)$$

откуда, заменяя h на $g(k)$ и Ω_r на $\Omega_{r-\delta}$, получаем

$$\int_{\Omega_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k) \varphi^2 dx \leq C_6 \left(\int_{\Omega_{r-\delta}} |\nabla g(k)|^2 \varphi^2 dx + \int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right) \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^\beta.$$

Используя неравенство (18), из последнего неравенства находим

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k) \varphi^2 dx \\ &\leq C_6(4C_5\delta^{-2} + 1) \int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^\beta \\ &= C_6(4C_5\delta^{-2} + 1) \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1+\beta} \leq C_7\delta^{-2} \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1+\beta} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\Omega_{r-\delta}} g^{2+2\beta}(k) \varphi^2 dx \right)^{1/(2+2\beta)} \\ &\leq (C_7\delta^{-2})^{1/(2+2\beta)} \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2} \leq C_8\delta^{-1/(1+\beta)} \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C_8\delta^{-1} \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число. Положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad r_{j+1} = r_j - \frac{\varepsilon}{2^j}, \quad g_{j+1} = g_j^{1+\beta},$$

$$H_j = \left(\int_{\Omega_{r_j}} g_j^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad r_1 = r, \quad g_1 = g.$$

В этих обозначениях неравенство (21) примет вид

$$H_{j+1}^{1/(1+\beta)} \leq C_8 2^j \varepsilon^{-1} H_j,$$

откуда по индукции

$$H_j^{1/(1+\beta)} \leq (C_8 \varepsilon^{-1})^{\alpha_j} 2^{\gamma_j} H_1^{(1+\beta)^{j-2}},$$

где

$$\alpha_j = (1+\beta)^{j-2} \sum_{\nu=0}^{j-2} (1+\beta)^{-\nu}, \quad \gamma_j = \sum_{\nu=0}^{j-2} (1+\nu)(1+\beta)^{j-2-\nu}.$$

Поскольку $g_j = g^{(1+\beta)^{j-1}}$, переходя в последнем неравенстве к пределу при $j \rightarrow \infty$, получаем

$$\sup_{\Omega_{r-\varepsilon}} g(k(x)) \leq (C_8 \varepsilon^{-1} 2^{(1+\beta)/\beta})^{(1+\beta)/\beta} \left(\int_{\Omega_r} g^2(k) \varphi^2 dx \right)^{1/2}.$$

Заменим g последовательностью $\{g_l\}$, где g_l те же, что и g , $g_l(k) \rightarrow k^{-\gamma}$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sup_{\Omega_{r-\varepsilon}} k^{-\gamma}(x) \leq (C_8 \varepsilon^{-1} 2^{(1+\beta)/\beta})^{(1+\beta)/\beta} \left(\int_{\Omega_r} k^{-2\gamma} \varphi^2 dx \right)^{1/2}.$$

Так как при $r < r_0$ для почти всех $x \in \Omega_r$ по неравенству Харнака $v(x) \geq C_9 > 0$, то

$$k(x) = \frac{v(x)}{\varphi(x)} \geq C_9 \varphi^{-1}(x).$$

Поэтому имеем

$$\sup_{\Omega_{r-\varepsilon}} k^{-\gamma}(x) \leq C_{10} \varepsilon^{-1-1/\beta} \left(\int_{\Omega_r} \varphi^{2+2\gamma} dx \right)^{1/2},$$

откуда

$$k(x) \geq C_{11} \varepsilon^{(1+1/\beta)/\gamma} \left(\int_{\Omega_r} \varphi^{2+2\gamma} dx \right)^{-1/2\gamma} \quad (22)$$

для почти всех $x \in \Omega_{r-\varepsilon}$, где постоянная $C_{11} > 0$ не зависит от r и ε . Неравенство (15), следовательно, и неравенство (13) доказаны для случая $\alpha < (n-2)/2$; нетрудно показать, что это неравенство справедливо и в предельном случае $\alpha = (n-2)/2$.

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Пусть $c > C_\star = (n-2)^2/4$ и $\phi > 0$. Если задача (1), (2) имеет решение, то оно удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u = (C_\star + \lambda_\rho)|x|^{-2}u + (c - C_\star)|x|^{-2}u$$

в $D'(\Omega)$. Умножая это уравнение на $|x|^{-(n-2)/2}Y_\rho(\omega)$ и интегрируя по Ω , получаем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \Delta u |x|^{-(n-2)/2} Y_\rho(\omega) dx \\ & = (C_\star + \lambda_\rho) \int_{\Omega} u |x|^{-(n+2)/2} Y_\rho(\omega) dx + (c - C_\star) \int_{\Omega} u |x|^{-(n+2)/2} Y_\rho(\omega) dx. \end{aligned}$$

Но из неравенства (13) следует, что для любой области $\Omega_r \subset \Omega$ такой, что $\partial\Omega_r \cap \partial\Omega = \{0\}$ выполнено

$$u(x) \geq \text{Const} \cdot \varphi(x) = \text{Const} \cdot |x|^{-(n-2)/2} Y_r(\omega),$$

поэтому

$$\int_{\Omega_r} u |x|^{-(n+2)/2} Y_r(\omega) dx \geq \text{Const} \int_{\Omega_r} |x|^{-n} Y_r^2(\omega) dx \geq \text{Const} \int_{\Omega_r} |x|^{-n} Y_\rho^2(\omega) dx = \infty.$$

Это означает, что $V_0 u \notin L_{1,\text{loc}}(\Omega)$. Поскольку по условию $V \geq V_0$, отсюда следует, что и $Vu \notin L_{1,\text{loc}}(\Omega)$. Вторая часть теоремы доказана. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема может быть доказана для потенциалов $V(x) = -\Delta\varphi/\varphi$, где $\varphi > 0$, $\Delta\varphi \in L_1(\Omega)$ и для которых при некотором $q > 2$ выполняется неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |h|^q \varphi^2 dx \right)^{1/q} \leq \text{Const} \left(\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \varphi^2 dx + \int_{\Omega} |h|^2 \varphi^2 dx \right)^{1/2}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Baras, J. A. Goldstein, “The heat equation with a singular potential”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284**:1 (1984), 121–139.
- [2] J. P. García Azorero, I. Peral Alonso, “Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems”, *J. Differential Equations*, **144**:2 (1998), 441–476.
- [3] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.
- [4] В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис, “Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка”, *Дифференциальные уравнения с частными производными – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **32**, ВИНТИ, М., 1988, 99–215.

Б. А. Худайкулиев

Туркменский государственный университет им. Махтумгулы
E-mail: bazargeldyh@yandex.ru

Поступило

11.12.2009

Исправленный вариант

11.07.2011