Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Хаметов, Асимптотика решения задачи Коши для линейных параболических уравнений второго порядка с малой диффузией, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 917–934

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 11:12:41

УДК 519

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ

В. М. Хаметов

Статья посвящена построению асимптотики решения задачи Коши для линейного параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, содержащего малый параметр при старшей производной. В работе приводятся достаточные условия, при которых существует и единственно “мультипликативное” асимптотическое разложение решения в целом указанной выше задачи.

Библиография: 24 названия.

1. Введение. Настоящая заметка посвящена построению асимптотики в целом решения задачи Коши для обратного уравнения Колмогорова, соответствующего диффузионному процессу с малой диффузией. Пусть $u: (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – функция, обозначаемая $u^\varepsilon(t, x)$, удовлетворяет однородному линейному параболическому уравнению второго порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u^\varepsilon(t, x) + (a, \nabla u^\varepsilon)(t, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla u^\varepsilon)(t, x) + \frac{d}{\varepsilon^2} u^\varepsilon(t, x) = 0, \\ u^\varepsilon|_{t=T} = \varphi(x) \exp \left\{ -\frac{\Phi(x)}{\varepsilon^2} \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где $a: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – вектор-функция (называемая *коэффициент сноса*), $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$ – $(n \times n)$ -матрица-функция; $d: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\Phi, \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – гладкие функции; $\varepsilon \in (0, 1]$ – малый параметр, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, ∇u^ε – градиент функции u^ε по x .

Целью работы является исследование поведения функции $u^\varepsilon(t, x)$ – решения уравнения (1), когда $\varepsilon \downarrow 0$.

Задача (1) имеет многочисленные приложения: в теории управляемых случайных процессов [1]–[6], в квантовой теории поля [7], в теории предельных теорем для диффузионных процессов [8]–[10] и т. д.

Основным результатом настоящей заметки является теорема 2.1, в которой даются достаточные условия, позволяющие построить асимптотику “в целом” решения задачи Коши для уравнения (1), когда параметр ε стремится к нулю.

Аналогичная задача рассматривалась в [11]–[19] в предположении, что действие (в наших обозначениях функция $v^0(t, x)$) имеет ограниченную вторую производную по x ,

последнее имеет место только при “малых” T . В общем случае такое предположение неверно в силу установленной ниже теоремы 4.1.

В [15], [17]–[19] и ряде других работ, в отличие от рассматриваемой в статье проблемы, построена асимптотика решения (1) на “малых временах”, т.е. T “мало”. В [7] была разработана конструкция туннельного канонического оператора, позволяющая строить асимптотику решения задачи Коши для уравнения (1) “в целом” в предположении, что особые точки (называемые в различных источниках *точками Якоби* либо *фокальными*) системы уравнений Гамильтона, соответствующей уравнению (3) (см. ниже), являются изолированными. В [9] был получен результат, похожий на утверждение теоремы 2.1, однако условия основной теоремы [9, теорема 5.1.2] трудно проверяемы. Отметим, что во всех указанных выше работах для построения асимптотики решения использовался метод Лапласа или его обобщение [9], [10]; в данной заметке этот метод вообще не используется. Кроме того, условия, при которых справедлив основной результат (теорема 2.1), формулируются в терминах коэффициентов уравнения (1) и начальных данных.

Отметим также, что эта статья содержит полное изложение результатов, анонсированных автором в [20], [21].

2. Обозначения. Основные предположения. Формулировка основного результата.

2.1. *Обозначения.* Сначала перечислим наши обозначения для областей в $\mathbb{R}^n$: $D_r \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r\}$, $\tilde{D}_r^j \stackrel{\text{def}}{=} \{|x_j| < r\}$, $D_r^i \stackrel{\text{def}}{=} D_r \setminus \tilde{D}_r^i$. Пусть $(0, T) \subset \mathbb{R}^+$, тогда $C_{Tr} \stackrel{\text{def}}{=} (0, T) \times D_r$.

Пусть $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$. Через

$$f_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x), \quad f_{x_i} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x), \quad f_{x_i x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x)$$

обозначены частные производные по t , x_i и вторая частная производная по x_i, x_j функции f соответственно. Кроме того, через $f_x \stackrel{\text{def}}{=} (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})^T (= \nabla f)$ и $f_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{x_i x_j})$ обозначены соответственно градиент и матрица вторых производных функции f . Для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$f_{(\xi)} \stackrel{\text{def}}{=} (f_x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_\xi f), \quad f_{(\xi), (\xi)} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{xx} \xi, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} (\nabla_\xi^2 f),$$

которые называются соответственно *первой* и *второй производной* функции f по направлению ξ .

Через $C^{l,m}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ обозначено пространство действительных функций на $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{R}^1$, имеющих l непрерывных производных по t и m непрерывных производных по x . Через $C_0^\infty(D_r)$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых функций с носителем D_r .

Пусть $B(D_r)$ – σ -алгебра борелевских множеств на D_r , $q: \mathcal{B}(D_r) \rightarrow \mathbb{R}^1$ – заряд, а $\text{var } q(B)$ – его вариация, здесь B – произвольное множество из σ -алгебры $B(D_r)$. Множество таких зарядов на D_r обозначим через $bv(D_r)$, свойства пространства $bv(D_r)$

можно найти в [1], [3], [22]. Через $L_p(D_r, \text{var } q)$ ($p \geq 1$) обозначается множество действительных измеримых функций на D_r с конечной нормой

$$\|u\|_{L_p(D_r, \text{var } q)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{D_r} |u(x)|^p d \text{var } q(x),$$

где $\text{var } q \in bv(D_r)$. В том случае, когда в качестве $\text{var } q$ выступает мера Лебега Λ , вместо $L_p(D_r, \Lambda)$ будем использовать обозначение $L_p(D_r)$. Нам понадобятся также пространства Соболева $W_p^{1,q}(C_{Tr})$, $1 \leq p \leq \infty$, подробное описание которых можно найти в [1], [3], [22].

Пусть (Ω, F) – измеримое пространство, а P и $\tilde{P}$ – две вероятностные меры на нем. Пусть $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ – случайная величина. Обозначим

$$M\xi(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \xi(w) P(dw), \quad \tilde{M}\xi(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \xi(w) \tilde{P}(dw).$$

Через $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ обозначим поток σ -алгебр на (Ω, F) , $t \in \mathbb{R}^+$.

2.2. Основные предположения.

УСЛОВИЕ А.

- 1) Для всех i и для $j = \overline{1, n}$ функции $a_i(t, x)$, $\sigma_{ij}(t, x)$, $d(t, x) \in C^{1,5}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$;
- 2) функции $\varphi(x)$, $\Phi(x) \in C^5(\mathbb{R}^n)$.

УСЛОВИЕ Б. Для (t, x) существуют положительные константы $0 < C_1 \leq C_2$ такие, что для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$C_1 |\xi|^2 \leq |\sigma^T(t, x) \xi|^2 \leq C_2 |\xi|^2.$$

2.3. Формулировка основного результата.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия А, Б и $u^\varepsilon(t, x)$ – решение уравнения (1). Тогда существуют единственные функции: $v^0: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $g_1^0: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $\psi^0: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что для всех t и почти всех x (относительно меры Лебега) выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u^\varepsilon(t, x) \exp \left\{ \frac{v^0(t, x)}{\varepsilon^2} \right\} g_1^0(t, x) = \psi^0(t, x). \quad (2)$$

При этом вышеуказанные функции обладают свойствами:

- 1) функция $v^0(t, x)$ почти всюду дифференцируема по t и x , и для произвольной пары (t, x) справедлива оценка $|v^0(t, x)| + |v_t^0(t, x)| + |\nabla v^0(t, x)| \leq C_3$; кроме того, у $v^0(t, x)$ существует вторая производная по x в смысле теории обобщенных функций, являющаяся зарядом для произвольного $t \in (0, T)$, т. е. для всех $t \in (0, T)$, всех $i, j = \overline{1, n}$ выполнено условие $v_{x_i x_j}^0 \in bv(D_r)$; $v^0(t, x)$ – единственное решение уравнения

$$v_t^0 + \left(a - \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \nabla v^0, \nabla v^0 \right) = d, \quad v^0|_{t=T} = \Phi(x), \quad (3)$$

справедливого для почти всех t, x (относительно меры Лебега).

- 2) для функций g_1^0 и ψ^0 для произвольной пары (t, x) справедливы оценки $0 \leq g_1^0(t, x) \leq C_4$, $|\psi^0(t, x)| \leq C_5$, причем эти функции имеют для всех $i = \overline{1, n}$ (в смысле теории обобщенных функций) производные по t и x_i , являющиеся зарядами, т. е. для всех t и $i = \overline{1, n}$ функции g_{1t}^0 , $g_{1x_i}^0$, ψ_t^0 , $\psi_{x_i}^0 \in bv(D_r)$ и являются для почти всех t единственными (обобщенными) решениями соответственно уравнений

$$\left[g_{1t}^0 + (a - \sigma\sigma^T \nabla v_1^0, \nabla g_1^0) + \frac{g_1^0}{2}(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^0) \right] (t, dx) = 0, \quad g_1^0|_{t=T} = 1, \quad (4)$$

$$[\psi_t^0 + (a - \sigma\sigma^T \nabla v^0, \nabla \psi^0)](t, dx) = 0, \quad \psi^0|_{t=T} = \varphi(x), \quad (5)$$

т. е. для всех $\eta \in C_0^\infty(C_{Tr})$ справедливы равенства

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left[g_{1t}^0 + (a - \sigma\sigma^T \nabla v^0, \nabla g_1^0) + \frac{g_1^0}{2}(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^0) \right] (t, dx) dt = 0, \quad (4a)$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left[\psi_t^0 + (a - \sigma\sigma^T \nabla v^0, \nabla \psi^0) \right] (t, dx) dt = 0. \quad (5a)$$

3. Представление решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия А, Б. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда:

- 1) существуют единственные функции $v^\varepsilon(t, x)$ и $\psi^\varepsilon(t, x)$ такие, что для всех (t, x) выполняется равенство

$$u^\varepsilon(t, x) = \psi^\varepsilon(t, x) \exp \left\{ - \frac{v^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2} \right\}, \quad (6)$$

причем $v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ и являются единственными решениями соответственно уравнений

$$v_t^\varepsilon + \left(a - \frac{1}{2} \sigma\sigma^T \nabla v^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon) = d, \quad v^\varepsilon|_{t=T} = \Phi(x); \quad (7)$$

$$\psi_t^\varepsilon + (a - \sigma\sigma^T \nabla v^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma\sigma^T \nabla, \nabla \psi^\varepsilon) = 0, \quad \psi^\varepsilon|_{t=T} = \varphi(x); \quad (8)$$

- 2) обратно, если $v^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ – единственные решения уравнений (7), (8) соответственно, то функция $\psi^\varepsilon(t, x) \exp \{ -v^\varepsilon(t, x)/\varepsilon^2 \}$ – единственное решение (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $u_1^\varepsilon(t, x)$ решение (1) с “начальными” данными

$$u_1^\varepsilon(t, x)|_{t=T} = \exp\{-\varepsilon^{-2}\Phi(x)\}.$$

Рассмотрим n -мерное стохастическое уравнение Ито [2], [3], [23], [24]

$$\xi_{t,x}^\varepsilon(s) = x + \int_t^s a(\tau, \xi_{t,x}^\varepsilon(\tau)) d\tau + \varepsilon \int_t^s \sigma(\tau, \xi_{t,x}^\varepsilon(\tau)) dw_\tau, \quad (9)$$

где $(W_s, \mathcal{F}_s)_{s \geq t}$ – n -мерный винеровский процесс. Известно [2], [23], [24], что если выполнены условия А, Б, то (9) имеет единственное сильное решение [23]. Известно [2], что $u_1^\varepsilon(t, x)$ допускает представление

$$u_1^\varepsilon(t, x) = M \exp\left\{-\varepsilon^{-2}\left[\Phi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) - \int_t^T d(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds\right]\right\}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что для всех (ε, t, x) функция $u_1^\varepsilon(t, x) > 0$. Следовательно, определена функция

$$v^\varepsilon(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} -\varepsilon^2 \ln u_1^\varepsilon(t, x).$$

Очевидно, что $v^\varepsilon \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$. Отсюда и из уравнения (1) следует, что $v^\varepsilon(t, x)$ удовлетворяет (7). Из (10) следует равенство

$$M \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\Phi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) - v^\varepsilon(t, x) - \int_t^T d(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds\right]\right\} = 1. \quad (10a)$$

Применим к $v^\varepsilon(t, x)$ формулу Ито, учитывая что $v^\varepsilon(t, x)$ удовлетворяет (7), имеем

$$\begin{aligned} & \Phi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) - \int_t^T d(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds - v^\varepsilon(t, x) \\ &= \frac{1}{2} \int_t^T |\sigma^T \nabla v^\varepsilon|^2(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds + \varepsilon \int_t^T (\sigma^T \nabla v^\varepsilon(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)), dw_s). \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим

$$z_{t,x}^\varepsilon(T) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon} \int_t^T (\sigma^T \nabla v^\varepsilon(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)), dw_s) - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_t^T |\sigma^T \nabla v^\varepsilon|^2(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds\right\}. \quad (12)$$

Из (10a), (11), (12) следует: а) для всех (ε, t, x) $M z_{t,x}^\varepsilon(T) = 1$; б) $(z_{t,x}^\varepsilon(s), \mathcal{F}_s)_{s \geq t}$ – равномерно интегрируемый мартингал (так как для любого $\varepsilon > 0$ функция $v_x^\varepsilon(s, x)$ ограничена равномерно по (t, x)). Обозначим для произвольного $A \in \mathcal{F}_T$

$$\tilde{P}_{t,x}(A) \stackrel{\text{def}}{=} M z_{t,x}^\varepsilon(T) 1_A(\omega). \quad (13)$$

Очевидно, что $\tilde{P}$ – вероятностная мера. Известно [2], что решение уравнения (1) $u^\varepsilon(t, x)$ допускает представление

$$u^\varepsilon(t, x) = M \varphi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\Phi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) - \int_t^T d(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds\right]\right\}.$$

Отсюда в силу (10а) и (13) имеем

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &= \exp\left\{-\frac{v^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}\right\} M\left[\varphi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) \exp\left\{-\varepsilon^{-2}\left[\Phi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T))\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.-\int_t^T d(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds - v^\varepsilon(t, x)\right]\right\}\right] \\ &= \exp\left\{-\frac{v^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}\right\} M\varphi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) z_{t,x}^\varepsilon(T) \\ &= \exp\left\{-\frac{v^\varepsilon(t, x)}{\varepsilon^2}\right\} \widetilde{M}\varphi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)). \end{aligned}$$

Обозначим $\psi^\varepsilon(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{M}\varphi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T))$. Очевидно, что $\psi^\varepsilon(t, x) \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$. Кроме того, в силу условий А, Б и теоремы Гирсанова [2], [24] аналогично [2], [24] легко показать, что $\psi^\varepsilon(t, x)$ удовлетворяет (8).

2) Доказательство обратного утверждения производится непосредственной проверкой.

4. Априорные оценки функции v^ε и ее производных.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия А, Б. Тогда для всех (ε, t, x) существуют положительные константы $C_i(n, T)$, $i = 6, \dots, 10$, такие, что

- 1) $|v^\varepsilon(t, x)| \leq C_6$;
- 2) $|\nabla v^\varepsilon(t, x)| \leq C_7$;
- 3) $\varepsilon^2 |v_{\Theta\Theta}^\varepsilon(t, x)| \leq C_8 |\Theta|^2$ для всех $\Theta \in \mathbb{R}^n$;
- 4) $v_{\Theta\Theta}^\varepsilon(t, x) \leq C_9 |\Theta|^2$ для всех $\Theta \in \mathbb{R}^n$;
- 5) $|v_t^\varepsilon(t, x)| \leq C_{10}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как для всех (t, x) выполнена оценка $|\Phi(x)| + |d(s, x)| \leq L_1$, то

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\frac{L_1(1+T)}{\varepsilon^2}\right\} &\leq \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\Phi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) - \int_t^T d(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds\right]\right\} \\ &\leq \exp\left\{\frac{L_1(1+T)}{\varepsilon^2}\right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя эти неравенства по мере P , имеем

$$-L_1(1+T) \leq v^\varepsilon(t, x) \leq L_1(1+T).$$

2) Из уравнения (7) легко вывести уравнение относительно $v_{x_i}^\varepsilon$. Рассмотрим произведение $\sigma_{ij} v_{x_i}^\varepsilon(t, x)$ и применим к нему формулу Ито, учитывая при этом уравнение, которому удовлетворяет $v_{x_i}^\varepsilon$. Получившееся равенство проинтегрируем по мере $\tilde{P}$ (смотри (13)), учитывая при этом свойства стохастических интегралов Ито, а также теорему Гирсанова, имеем

$$\begin{aligned} \sigma^T \nabla v^\varepsilon(t, x) &= \widetilde{M}\left\{\sigma^T \nabla \Phi(T, \xi_{t,x}^\varepsilon(T)) - \int_t^T \left[\sigma^T \nabla d - (\sigma^T \nabla a) \nabla v^\varepsilon\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+ \left(\sigma_t^T + (a, \nabla) \sigma^T + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla) \sigma^T\right) \nabla v^\varepsilon\right](s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds\right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Из (14) в силу условий А, Б и неравенства Йенсена имеем

$$|\nabla v^\varepsilon|^2(t, x) \leq C_{12}(n, T) + C_{11}(n, T) \widetilde{M} \int_t^T |\nabla v^\varepsilon|^2(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds, \quad (15)$$

где $C_{11}(n, T)$, $C_{12}(n, T)$ – некоторые положительные константы. Из (15) следует искомая оценка. Действительно, воспользуемся методом последовательных приближений:

$$|\nabla v_{j+1}^\varepsilon|^2 \leq C_{12} + C_{11} \widetilde{M} \int_t^T |\nabla v_j^\varepsilon(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s))|^2 ds, \quad |\nabla v_j^\varepsilon(t, x)|^2|_{j=0} \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $|\nabla v^\varepsilon|^2(t, x) \leq C_{12} e^{C_{11}T}$.

Для доказательства пунктов 3)–5) теоремы нам понадобятся оценки для первой и второй производных по направлению Θ, ε процесса $(\xi_{t,x}^\varepsilon(s), \mathcal{F}_s)_{s \geq t}$ (смотри (9)), понимаемых в смысле средних порядка $p \geq 1$ относительно меры $\tilde{P}$ [3] и обозначенных через $\nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^\varepsilon(s)$, $\nabla_{\Theta}^2 \xi_{t,x}^\varepsilon(s)$, $\partial/\partial \varepsilon$, $\xi_{t,x}^\varepsilon(s)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть выполнены условия А. Тогда для всех (ε, t, x, s) и всех $\Theta \in \mathbb{R}^n$ существуют положительные константы $C_{13}(n, T)$ – $C_{15}(n, T)$ такие, что

- 1) $\widetilde{M} |\nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^\varepsilon(s)|^4 \leq C_{13} |\Theta|^4$;
- 2) $\widetilde{M} |\nabla_{\Theta}^2 \xi_{t,x}^\varepsilon(s)|^4 \leq C_{14} |\Theta|^8$;
- 3) $\widetilde{M} |\partial \xi_{t,x}^\varepsilon(s)/\partial \varepsilon|^4 \leq C_{15}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения производится аналогично доказательству теоремы 7 из [3, с. 152] с помощью теоремы Гирсанова и пункта 2 теоремы 4.1.

Установим теперь утверждение 3) теоремы 4.1. Из теоремы 3.1 следует, что $v^\varepsilon(t, x) \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ и допускает представление (10а). Отсюда в силу предложения 4.2 имеем

$$v_{x_i}^\varepsilon(t, x) = \widetilde{M} \sum_{l=1}^n \left[\Phi_{x_l}(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) \frac{\partial \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(T)}{\partial x_i} - \int_t^T d_{x_l}(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) \frac{\partial \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(s)}{\partial x_i} ds \right]. \quad (16)$$

Аналогично (16) получим представление для $v_{\Theta\Theta}^\varepsilon(t, x)$:

$$\begin{aligned} v_{\Theta\Theta}^\varepsilon(t, x) = & \widetilde{M} \left\{ \sum_{k,l=1}^n \left[\Phi_{x_l x_k}(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(T) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(T) \right. \right. \\ & - \left. \int_t^T d_{x_l x_k}(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(s) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(s) ds \right] \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\Phi_{x_k}(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) \nabla_{\Theta}^2 \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(T) - \int_t^T d_{x_k}(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) \nabla_{\Theta}^2 \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(s) ds \right] \\ & \left. - \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\sum_{l=1}^n \Phi_{x_l}(\xi_{t,x}^\varepsilon(T)) \times \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(T) - \int_t^T d_{x_l}(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(s) ds \right]^2 \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Из (17), условий А, пунктов 1), 2) настоящей теоремы, предложения 4.2 с помощью неравенства Гёльдера легко установить третье утверждение теоремы.

Из (17) также следует неравенство

$$v_{\Theta\Theta}^{\varepsilon}(t, x) \leq \widetilde{M} \left\{ \sum_{k,l=1}^n \left[\Phi_{x_l x_k}(\xi_{t,x}^{\varepsilon}(T)) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(T) \nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(T) - \int_t^T d_{x_l x_k}(s, \xi_{t,x}^{\varepsilon}(s)) (\nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,l}(s)) (\nabla_{\Theta} \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(s)) ds \right] + \sum_{k=1}^n \left[\Phi_{x_k}(\xi_{t,x}^{\varepsilon}(T)) \nabla_{\Theta}^2 \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(T) - \int_t^T d_{x_k}(s, \xi_{t,x}^{\varepsilon}(s)) (\nabla_{\Theta}^2 \xi_{t,x}^{\varepsilon,k}(s)) ds \right] \right\}. \quad (18)$$

Оценим сверху выражение, стоящее в правой части (18): из условий А и п. 1), 2) предложения 4.2 с помощью неравенства Гёльдера получаем искомую оценку. Стало быть, получаем и четвертое утверждение теоремы.

Из уравнения (7) следует неравенство

$$|v_t^{\varepsilon}| \leq |(a, \nabla v^{\varepsilon})| + \frac{1}{2} |\sigma^T \nabla v^{\varepsilon}|^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \|\sigma\|^2 \|v_{xx}^{\varepsilon}\|. \quad (19)$$

Далее заметим, что в силу условий А, Б и пунктов 2)–4) теоремы 4.1 существуют положительные константы C_{16} , C_{17} такие, что

- 1) $|(a, \nabla v^{\varepsilon})| \leq |a| C_7 \leq C_{16}$;
- 2) $|\sigma^T \nabla v^{\varepsilon}|^2 \leq C_2 |\nabla v^{\varepsilon}|^2 \leq C_2 C_7^2$;
- 3) $\varepsilon^2 \|v_{xx}^{\varepsilon}\| \leq C_{17}(n, T) (= C_8 n^2)$.

Из неравенства (19) и вышеуказанных оценок следует пятое утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Из п. 4) теоремы 4.1 следует, что $v_{x_i x_j}^{\varepsilon}(t, x) \leq C_9 \delta_{ji}$ для всех (ε, t, x) и всех $i, j = \overline{1, n}$ (δ_{ji} – символ Кронекера).

В дальнейшем нам понадобятся свойства функции $(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^{\varepsilon})(t, x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и $\varepsilon > 0$. Тогда

- 1) для всех (t, ε) функция $C_9 |x|^2 / 2 - v^{\varepsilon}(t, x)$ выпуклая по x ;
- 2) для всех (ε, t) существует константа $C_{18}(n, T, r) > 0$ такая, что

$$\int_{D_r} |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^{\varepsilon})(t, x)| dx \leq C_{18}(n, T, r);$$

- 3) для всех (ε, t, x) существует константа $C_{19}(n, T) > 0$ такая, что

$$(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^{\varepsilon})(t, x) \leq C_{19}(n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первое утверждение следует из п. 3) теоремы 4.1, так как для всех $\Theta \in \mathbb{R}^n$ функция $C_9|\Theta|^2 - v_{\Theta\Theta}^\varepsilon(t, x) \geq 0$;

2) Заметим, что $\sigma\sigma^T$ и $C_9E - v_{xx}^\varepsilon$ (здесь E — единичная $(n \times n)$ -матрица) положительно определенные симметрические $(n \times n)$ -матрицы-функции, поэтому

$$\left(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla \left(\frac{C_9}{2}|x|^2 - v^\varepsilon \right) \right) = \text{tr } \sigma\sigma^T (C_9E - v_{xx}^\varepsilon).$$

Из этого равенства, п. 4) теоремы 4.1 и условия Б имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq C_1 \Delta \left(\frac{C_9}{2}|x|^2 - v^\varepsilon \right) (t, x) &\leq \left(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla \left(\frac{C_9}{2}|x|^2 - v^\varepsilon \right) \right) (t, x) \\ &\leq C_2 \Delta \left(\frac{C_9}{2}|x|^2 - v^\varepsilon(t, x) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (20) следует неравенство для всех (ε, t, x)

$$|(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)| \leq \frac{C_9}{2} (\sigma\sigma^T \nabla, \nabla |x|^2)(t, x) + C_2 \Delta \left(\frac{C_9}{2}|x|^2 - v^\varepsilon \right) (t, x). \quad (21)$$

Интегрируя (21) по мере Лебега в области D_r , имеем для всех (ε, t) и $0 < r < \infty$ неравенство

$$\int_{D_r} |(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)| dx \leq 2C_2 C_9 r^n n + C_2 \left| \int_{D_r} \Delta v^\varepsilon(t, x) dx \right|. \quad (22)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (22), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_r} \Delta v^\varepsilon(t, x) dx \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_r} v_{x_i x_i}^\varepsilon(t, x) dx \right| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{D_r^i} \int_{-r}^r v_{x_i x_i}^\varepsilon(t, y, x_i) dx_i dy \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{D_r^i} [|v_{x_i}^\varepsilon(t, y, r)| + |v_{x_i}^\varepsilon(t, y, -r)|] dy \leq 2C_7 |r|^{n-1} n. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) и (23) следует искомая оценка.

3) Из (20) следует, что для всех (ε, t, x) выполняется неравенство

$$(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x) \leq \left(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla \frac{C_9}{2}|x|^2 \right) (t, x) = C_9 \text{tr } \sigma\sigma^T(t, x) (\leq C_{19}).$$

Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Из замечания 4.3 и доказательства пункта 2) предложения 4.4 (см. (23)) следует, что для всех (ε, t, i, j) выполнены неравенства

$$\text{i) } \text{var } v_{x_i x_j}^\varepsilon(D_r) \leq 4C_7 r^{n-1};$$

$$\text{ii) } \text{var}(\sigma\sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(D_r) \leq C_{18}(n, T, r).$$

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть выполнены условия А, Б, $\varepsilon > 0$ произвольно и $v^\varepsilon(t, x) \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению (7). Тогда

- 1) для всех (t, x) функция $v^\varepsilon(t, x)$ дифференцируема по ε^2 ;
- 2) для всех (ε, t, x) существует константа $C_{19} > 0$ такая, что

$$\frac{\partial v^\varepsilon}{\partial \varepsilon^2}(t, x) \leq \frac{C_{19}T}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из условий А, представления (10а) для $v^\varepsilon(t, x)$ и предложения 4.2 следует дифференцируемость $v^\varepsilon(t, x)$ по ε^2 .

2) Из условий А, Б и (7), (15), (17) следует дифференцируемость $v_t^\varepsilon, v_{x_i}^\varepsilon, v_{x_i x_j}^\varepsilon$ ($i, j = \overline{1, n}$) по ε^2 . Обозначим $\bar{v}^\varepsilon(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial v^\varepsilon(t, x) / \partial \varepsilon^2$. Дифференцируя (7) по ε^2 , легко получить уравнение относительно $\bar{v}^\varepsilon(t, x)$:

$$\begin{cases} \bar{v}_t^\varepsilon + (a - \sigma \sigma^T \nabla v^\varepsilon, \nabla \bar{v}^\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla \bar{v}^\varepsilon) + \frac{1}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon) = 0, \\ \bar{v}^\varepsilon|_{t=T} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Известно [3], что решение уравнения (24) допускает представление

$$\bar{v}^\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2} \widetilde{M} \int_t^T (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(s, \xi_{t,x}^\varepsilon(s)) ds. \quad (25)$$

Из пункта 3) предложения 4.2 и (25) следует второе утверждение теоремы.

5. Предельный переход в уравнении (7).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия А, Б, а $v^\varepsilon(t, x)$ – решение уравнения (7). Тогда существует функция $v^0(t, x) \in W_p^{1,1}(C_{Tr})$, $p \in (1, \infty)$, такая, что для всех (t, x) выполнено $v^0(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} v^\varepsilon(t, x)$, причем для всех (t, x) справедлива оценка

$$|v^0(t, x)| + |\nabla v^0(t, x)| + |v_t^0(t, x)| \leq C_{20}.$$

Кроме того, $v^0(t, x)$ обладает свойствами:

- 1) $v^0(t, x)$ является единственным обобщенным решением уравнения (3);
- 2) $v^0(t, x)$ имеет в смысле теории обобщенных функций вторую производную по x , которая является зарядом, т. е. для $v_{xx}^0 \in bv(D_r)$ и для всех $(\Theta, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ существует положительная константа C_{21} такая, что выполнена оценка

$$\|v_{\Theta\Theta}^0\|_{bv(D_r)} \leq C_{21} n r^{n-1} |\Theta|^2. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из пункта 2) теоремы 4.6 следует, что для всех (t, x) выполнена оценка

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon^2}(v^\varepsilon - C_{19}T\varepsilon^2) \leq -\frac{C_{19}T}{2}.$$

Поэтому для всех (t, x) функция $v^\varepsilon(t, x) - C_{19}T\varepsilon^2$ — монотонная функция по ε^2 . Так как функция $v^\varepsilon(t, x) - C_{19}T\varepsilon^2$ равномерно ограничена, то у $v^\varepsilon(t, x)$ для всех (t, x) существует предел при $\varepsilon \downarrow 0$, т. е. существует функция $v^0(t, x)$ такая, что

$$v^0(t, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} v^\varepsilon(t, x). \quad (27)$$

Отсюда в силу п. 1) теоремы 4.1 для всех (t, x) справедлива оценка $|v^0(t, x)| \leq L_1(1+T)$. Из пунктов 2), 4) теоремы 4.1 и теоремы Арцела получаем, что у $v^\varepsilon(t, x)$ существуют соболевские производные по t и x , причем для всех (t, x) справедливы оценки

$$|\nabla v^0(t, x)| + |v_t(t, x)| \leq C_{22}.$$

Займемся предельным переходом в уравнении (7). Для этого умножим левую и правую части (7) на произвольную функцию $\eta \in C_0^\infty(C_T)$, а затем интегрируя (7) в полосе $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ по мере Лебега, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left[v_t^\varepsilon + \left(a - \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \nabla^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon \right) \right] (t, x) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left[\eta d + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma^T \nabla \eta, \sigma^T \nabla v^\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} \eta (\operatorname{div} \sigma \sigma^T, \nabla v^\varepsilon) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Из п. 1) предложения 4.4 следует, что для всех (ε, t) функция $C_9|x|^2/2 - v^\varepsilon(t, x)$ выпукла по x . Из теории выпуклых функций известно:

- а) свойство выпуклости функций сохраняется при предельном переходе, поэтому $C_9|x|^2/2 - v^0(t, x)$ также выпуклая по x функция для всех t ;
- б) существует подпоследовательность ε' такая, что для всех (t, x) последовательность $v_{x_i}^{\varepsilon'}(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, почти всюду сходится к $v_{x_i}^0(t, x)$ при $\varepsilon' \downarrow 0$. Поэтому, переходя к пределу в (28) при $\varepsilon' \downarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left[v_t^0 + \left(a - \frac{1}{2} \sigma \sigma^T \nabla v^0, \nabla v^0 \right) \right] (t, x) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) d(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности функции η получаем, что для почти всех (t, x) справедливо уравнение (3). Очевидно, что $v^0(t, x)|_{t=T} = \Phi(x)$.

Единственность решения уравнения (3) следует из единственности предела (27). Очевидно, что последовательность $v_{x_i x_j}^{\varepsilon'}$ для любого t локально слабо сходится при $\varepsilon' \downarrow 0$ к функции $v_{x_i x_j}^0$, которая является обобщенной функцией. Кроме того, в силу лемм 2, 3 из [22] получаем, что $v_{x_i x_j}^0$ — заряд. Воспользуемся замечанием 4.5 и получим оценку (26).

6. Вывод уравнения для функции $g_1^0(t, x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, $0 < q < \infty$. Обозначим

$$g_q^\varepsilon(t, x) = \exp \left\{ \frac{q}{\varepsilon^2} [v^\varepsilon(t, x) - v^0(t, x)] \right\}. \quad (29)$$

Из теорем 3.1 и 5.1 и (29) следует:

- i) g_q^ε дифференцируема почти всюду по x, t ;
- ii) g_q^ε является единственным обобщенным решением уравнения (справедливого для почти всех (t, x)):

$$\left[g_{qt}^\varepsilon + \left(a - \sigma \sigma^T \nabla \frac{v^\varepsilon + v^0}{2}, \nabla g_q^\varepsilon \right) + \frac{qg_q^\varepsilon}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon) \right] (t, x) = 0, \quad g_q^\varepsilon|_{t=T} = 1. \quad (30)$$

Ниже будут исследованы свойства функции $g_q^\varepsilon(t, x)$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия теорем 3.1 и 5.1. Тогда относительно $g_q^\varepsilon(t, x)$, $q \in [1, \infty)$, справедливы утверждения:

- 1) для всех (ε, t, x) имеет место оценка $0 \leq g_q^\varepsilon(t, x) \leq \exp\{qC_{19}T/2\}$;
- 2) для всех (ε, t) существует положительная константа $C_{23}(q, r, n, T)$ такая, что

$$\|g_{qt}^\varepsilon\|_{bv(D_r)} + \sum_{i=1}^n \|g_{qx_i}^\varepsilon\|_{bv(D_r)} \leq C_{23}(q, r, n, T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница. В силу теоремы 4.6 для всех (ε, t, x) имеем равенство

$$\frac{v^\varepsilon(t, x) - v^0(t, x)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon^2} \frac{\partial v^\varepsilon(t, x)}{\partial \varepsilon^2} d\varepsilon^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon^2} \bar{v}^\varepsilon(t, x) d\varepsilon^2.$$

Поэтому из п. 2) теоремы 4.6 для всех (ε, t, x) имеем

$$0 \leq g_q^\varepsilon(t, x) = \exp \left\{ \frac{q}{\varepsilon^2} \int_0^{\varepsilon^2} \bar{v}^\varepsilon(t, x) d\varepsilon^2 \right\} \leq e^{qC_{19}T/2}.$$

2) Сначала установим оценку

$$\int_{D_r} |g_{qx_i}^\varepsilon(t, x)| dx \leq 4 \exp \left\{ \frac{qC_{19}T}{2} \right\} |r|^{n-1}. \quad (31)$$

Для этого рассмотрим модуль интеграла $\int_{D_r} g_{qx_i}^\varepsilon(t, x) dx$. В силу теоремы Фубини и п. 1) этой теоремы имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_r} g_{qx_i}^\varepsilon(t, x) dx \right| &= \left| \int_{D_r^i} \int_{-r}^r g_{qx_i}^\varepsilon(t, y, x_i) dx_i dy \right| = \left| \int_{D_r^i} [g_q^\varepsilon(t, y, r) - g_q^\varepsilon(t, y, -r)] dy \right| \\ &\leq \int_{D_r^i} [g_q^\varepsilon(t, y, r) + g_q^\varepsilon(t, y, -r)] dy \leq 2e^{C_{19}Tp/2} |r|^{n-1}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что для всех (ε, t) справедлива оценка

$$\int_{D_r} |g_{qt}^\varepsilon(t, x)| dx \leq C_{24}(n, r, T, p).$$

Так как $g_q^\varepsilon(t, x)$ удовлетворяет уравнению (30), то из него следует неравенство

$$|g_{qt}^\varepsilon(t, x)| \leq \left| \left(a - \sigma \sigma^T \nabla \frac{v^\varepsilon + v^0}{2}, \nabla g_q^\varepsilon \right)(t, x) \right| + \frac{q g_q^\varepsilon(t, x)}{2} |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)|. \quad (32)$$

В силу условий А, п. 2) теоремы 4.1 и п. 1) теоремы 5.1 для всех (ε, t, x, i) имеем оценку

$$\left| a_i(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\sigma \sigma^T)_{ij} (v_{x_j}^\varepsilon + v_{x_j}^0)(t, x) \right| \leq C_{25}(n, T). \quad (33)$$

Так как $0 \leq g_q^\varepsilon(t, x) \leq e^{qC_{19}T/2}$ для всех (t, x) , то из (32) с учетом (33) следует неравенство

$$|g_{qt}^\varepsilon(t, x)| \leq C_{25}(n, T) \sum_{i=1}^n |g_{qx_i}^\varepsilon(t, x)| + \frac{q}{2} e^{qC_{19}T/2} |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)|.$$

Интегрируя правую и левую части последнего неравенства по мере Лебега в области D_r , имеем

$$\begin{aligned} \int_{D_r} |g_{qt}^\varepsilon(t, x)| dx &\leq C_{25}(n, T) \sum_{i=1}^n \int_{D_r} |g_{qx_i}^\varepsilon(t, x)| dx \\ &\quad + \frac{q}{2} e^{qC_{19}T/2} \int_{D_r} |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)| dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу п. 2) предложения 4.4 и оценки (31) получаем искомую оценку.

Займемся теперь предельным переходом в уравнении (30).

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и $q = 1$. Тогда существует подпоследовательность $\{\varepsilon'\}$ такая, что для всех t последовательность $g_1^{\varepsilon'}(t, x)$ сходится в $L_q(D_r)$, $q \in (1, \infty)$, к некоторой функции $g_1^0(t, x) \in L_q(D_r)$ при $\varepsilon' \downarrow 0$, причем для всех (t, x) выполнены оценки $0 \leq g_1^0(t, x) \leq e^{C_{19}T/2}$ и $g_1^0(t, x)$ обладает следующими свойствами:

- 1) существуют производные $g_{1t}^0(t, x)$, $g_{1x_i}^0(t, x)$, $i = \overline{1, n}$, в смысле теории обобщенных функций, являющиеся зарядами, такие, что

$$\|g_{1t}^0\|_{bv(D_r)} + \sum_{i=1}^n \|g_{1x_i}^0\|_{bv(D_r)} \leq C_{26}(n, T, r);$$

- 2) функция $g_1^0(t, x)$ является единственным обобщенным решением уравнения (4).

Обозначим $\gamma: (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ ($\gamma^\varepsilon(t, x) = \gamma(\varepsilon, t, x)$), $Q: (0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B}(D_r) \rightarrow \mathbb{R}^1$ ($Q^\varepsilon(t, A) = Q(\varepsilon, t, A)$). Доказательство следующего утверждения почти очевидно.

ЛЕММА 6.3. Пусть выполняются условия:

- 1) семейство $\{\gamma^\varepsilon(t, x)\}$ состоит из измеримых ограниченных функций (т.е. для всех (ε, t, x) выполнена оценка $|\gamma^\varepsilon(t, x)| \leq C_{27}$), причем $\gamma^0(t, x)$ — измеримая ограниченная функция такая, что для всех t и почти всех x (относительно меры Лебега) $\gamma^\varepsilon(t, x) \rightarrow \gamma^0(t, x)$ при $\varepsilon \downarrow 0$,
- 2) для всех (ε, t) функции $Q^\varepsilon, Q^0 \in bv(D_r)$, причем для всех t Q^ε слабо сходятся к заряду Q^0 при $\varepsilon \downarrow 0$ и для всех (ε, t) выполнена оценка $\|Q^\varepsilon\|_{bv(D_r)} \leq C_{28}(n, r), \|Q^0\|_{bv(D_r)} \leq C_{28}(n, r)$.

Тогда существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$ и версия (вариант) функции $\gamma^0(t, x)$ такие, что для всех $\eta \in C_0^\infty(D_r)$ и всех $t \in (0, T)$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \gamma^{\varepsilon_k}(t, x) Q^{\varepsilon_k}(t, dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \gamma^0(t, x) Q^0(t, dx).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Из теории пространств Соболева [22] и п. 2) теоремы 6.1 следует, что для всех (ε, t, i) функции g_{1, x_i}^ε ограничены в $W_p^{-1/2}(D_r)$, $p \in (1, 2n/(n-1))$. Поэтому для всех t семейство $\{g_1^\varepsilon\}$ ограничено в $W_p^{1/2}(D_r)$, значит, оно компактно в $L_{\tilde{p}}(D_r)$, $\tilde{p} \in (1, \infty)$. Стало быть, существует подпоследовательность $\{\varepsilon_n\}$ и функция $g_1^0 \in L_{\tilde{p}}(D_r)$ такие, что для всех t при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ выполняется условие

$$\|g_1^{\varepsilon_n} - g_1^0\|_{L_{\tilde{p}}(D_r)} \rightarrow 0. \quad (34)$$

Значит, из подпоследовательности $\{\varepsilon_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}$ такую, что для всех t при $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$ имеет место сходимость $g_1^{\varepsilon_{n_k}} \rightarrow g_1^0$ для почти всех $x \in D_r$, причем $0 \leq g_1^0(t, x) \leq e^{C_{19}T/2}$.

1) Из оценок пп. 2), 3) теоремы 6.1 и сделанных выше замечаний следует, что для всех (t, ε) последовательности $g_{1t}^{\varepsilon_k}$ и $g_{1x_i}^{\varepsilon_k}$ слабо сходятся при $\varepsilon_k \downarrow 0$ к обобщенным производным функции g_1^0, g_{1t}^0 и $g_{1x_i}^0$ ($i = \overline{1, n}$) соответственно, которые, в свою очередь, являются зарядами, причем для всех $\eta \in C_0^\infty(C_{Tr})$ справедлива оценка

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) g_{1t}^0(t, dx) dt \right| + \sum_{i=1}^n \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) g_{1x_i}^0(t, dx) dt \right| \leq \sup_{t, x} |\eta(t, x)| C_{27}(r, n) T. \quad (35)$$

2) Займемся предельным переходом в уравнении (30) при $q = 1$.

Умножим левую и правую части (30) на произвольную функцию $\eta \in C_0^\infty(C_{Tr})$ и, интегрируя по мере Лебега в полосе $(0, T) \times \mathbb{R}^n$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) g_{1t}^\varepsilon(t, x) dx dt &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left\{ \left(a - \sigma \sigma^T \nabla \frac{v^\varepsilon + v^0}{2}, \nabla g_1^\varepsilon \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_1^\varepsilon}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon) \right\} (t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим сначала правую часть равенства (36). Поскольку выполнены все условия леммы 6.3, то имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left\{ \left(a - \sigma \sigma^T \nabla \frac{v^0 + v^{\varepsilon_k}}{2}, \nabla g_1^{\varepsilon_k} \right) + \frac{g^{\varepsilon_k}}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^{\varepsilon_k}) \right\} dx dt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) \left\{ (a - \sigma \sigma^T \nabla v^0, \nabla g_1^0)(t, dx) + \frac{g_1^0}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^0)(t, dx) \right\} dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим теперь левую часть равенства (36). В силу оценки (35) и п. 3) теоремы 6.1 имеем

$$\lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) g_{1t}^{\varepsilon_k}(t, x) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) g_{1t}^0(t, dx) dt. \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует, что g_1^0 удовлетворяет уравнению (4). Единственность решения (4) следует из единственности предела (34) для всех t и почти всех x . Теорема доказана.

7. Пределный переход в уравнении (8).

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.1, $\psi^\varepsilon(t, x) \in C^{1,5}((0, T) \times \mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению (8). Тогда существуют:

- 1) функция $\psi^0: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что для всех (t, x) и всех $r > 0$ выполнено неравенство

$$|\psi^0(t, x)| + \|\psi_t^0\|_{bv(t, D_r)} + \sum_{i=1}^n \|\psi_{x_i}^0\|_{bv(t, D_r)} \leq C_{28}(n, t, r);$$

- 2) подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что при $\varepsilon_k \rightarrow 0$ для всех t и почти всех x выполнено равенство $\psi^0(t, x) = \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} \psi^{\varepsilon_k}(t, x)$, причем $\psi^0(t, x)$ является единственным обобщенным решением уравнения (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы опирается на ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 7.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для всех (ε, t) и всех $r > 0$ справедливы оценки:

- 1) $|\psi^\varepsilon(t, x)| \leq C_{29}$ для любых x ;
- 2) $\sum_{i=1}^n \int_{D_r} |\psi_{x_i}^\varepsilon(t, x)| dx \leq C_{30}(r, n)$;
- 3) $\int_{D_r} |\psi_t^\varepsilon(t, x)| dx \leq C_{31}(r, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (14) следует (см. доказательство теоремы 3.1) оценка

$$|\psi^\varepsilon(t, x)| = |\widetilde{M}\varphi(\xi_{t,x}^\varepsilon(T))| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| (\stackrel{\text{def}}{=} C_{29}).$$

2) Доказательство данного пункта проводится аналогично доказательству п. 2) теоремы 6.1, поэтому его не приводим.

3) Обозначим $\omega^\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\{-\lambda\sqrt{|x|^2+1}\}$, $\lambda > 0$. Умножим правую и левую части (8) на $w^\lambda(x)$ и, интегрируя по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$, а затем используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) \psi_t^\varepsilon(t, x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) \left[(a - \sigma \sigma^T \nabla v^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla \psi^\varepsilon) \right] (t, x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) \psi^\varepsilon(t, x) \Theta(\varepsilon, t, x, \lambda) dx, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta(\varepsilon, t, x, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} -\lambda \frac{(a - \sigma \sigma^T \nabla v^\varepsilon, x)}{\sqrt{|x|^2+1}} + \operatorname{div} a - (\operatorname{div} \sigma \sigma^T, \nabla v^\varepsilon) - (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[-\operatorname{div} \operatorname{div} \sigma \sigma^T + 2 \frac{\lambda}{\sqrt{|x|^2+1}} (\operatorname{div} \sigma \sigma^T, x) - \frac{\lambda^2}{|x|^2+1} |\sigma^T x|^2 + \frac{\lambda^2}{|x|^2+1} \operatorname{tr} \sigma \sigma^T \right]. \end{aligned}$$

В силу условия А и п. 2 теоремы 3.1 для функции $\Theta(\varepsilon, t, x, \lambda)$ для всех (ε, t, x) справедлива оценка

$$|\Theta(\varepsilon, t, x, \lambda)| \leq C_{32}(n, \lambda) + |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)|, \quad (40)$$

здесь $C_{32}(n, \lambda)$ – некоторая положительная константа. Из (39) и (40) и п. 1) леммы имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) \psi_t^\varepsilon(t, x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) |\psi^\varepsilon(t, x)| |\Theta(\varepsilon, t, x, \lambda)| dx \\ &\leq C_{33} \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) [C_{32}(n, \lambda) + |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)|] dx. \end{aligned} \quad (41)$$

Вернемся теперь к неравенству (21), умножим его левую и правую части на $w^\lambda(x) > 0$, а затем проинтегрируем его по мере Лебега в $\mathbb{R}^n$. Далее к правой части получившегося неравенства применим формулу интегрирования по частям и, учитывая свойства функции $w^\lambda(x)$, а также тот факт, что для всех (ε, t, x) $|\nabla v^\varepsilon(t, x)| \leq C_7$ (см. п. 2) теоремы 4.1), для всех (ε, t) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) |(\sigma \sigma^T \nabla, \nabla v^\varepsilon)(t, x)| dx \leq C_{34}(n, \lambda). \quad (42)$$

Из (41), (42) следует, что для всех (ε, t, x) существует константа $C_{35}(n, \lambda) > 0$ такая, что $\left| \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) \psi_t^\varepsilon(t, x) dx \right| \leq C_{35}(n, \lambda)$. Отсюда следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) |\psi_t^\varepsilon(t, x)| dx \leq 2C_{35}(n, \lambda).$$

Обозначим

$$\bar{w}^\lambda(r) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\{-\lambda\sqrt{|r|^2+1}\} > 0, \quad 1_{\{|x| \leq r\}} = \begin{cases} 1, & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r. \end{cases}$$

Очевидно, что $w^\lambda(x) \geq \bar{w}^\lambda(r) 1_{\{|x| \leq r\}} \geq 0$, поэтому для всех (ε, t) справедлива оценка

$$\bar{w}^\lambda(r) \int_{D_r} |\psi_t^\varepsilon(t, x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} w^\lambda(x) |\psi_t^\varepsilon(t, x)| dx \leq 2C_{35}(n, \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1. Из пп. 1)–3) леммы 7.2 следует (аналогично доказательству теоремы 6.2), что

- i) существуют подпоследовательность $\{\varepsilon_n\}$ и функция $\psi^0: (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\psi^0 \in L_p(D_r)$ ($p \in (1, \infty)$ для всех t) такие, что $\|\psi^{\varepsilon_n} - \psi^0\|_{L_p(D_r)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ для всех t ;
- ii) $\psi_t^{\varepsilon_n}$ и $\psi_{x_i}^{\varepsilon_n}$ для всех i и почти всех t слабо сходятся к ψ_t^0 и $\psi_{x_i}^0$ – обобщенным производным ψ^0 по t и x_i соответственно, являющимся зарядами, т. е. для почти всех t $\|\psi_t^0\|_{bv(D_r)} + \sum_{i=1}^n \|\psi_{x_i}^0\|_{bv(D_r)} \leq C_{36}(r, n)$.

Займемся теперь предельным переходом в уравнении (8). Умножим левую и правую части (8) на произвольную $\eta \in C_0^\infty(C_{Tr})$ и, интегрируя по мере Лебега в полосе $(0, T) \times \mathbb{R}^n$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) [\psi_t^\varepsilon + (a - \sigma \sigma^T \nabla v^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)](t, x) dx dt \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t, x) (\sigma \sigma^T \nabla, \nabla \psi^\varepsilon)(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Рассмотрим левую часть равенства (43). Переходя к пределу в (43), аналогично доказательству теоремы 6.2, получаем (5). Единственность решения (5) очевидна.

8. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$g_{-1}^\varepsilon(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ -\frac{v^\varepsilon(t, x) - v^0(t, x)}{\varepsilon^2} \right\}.$$

В силу теоремы 3.1 функция $u^\varepsilon(t, x)$ допускает представление (6). Умножив правую и левую части (6) на $\exp\{v^0(t, x)/\varepsilon^2\}$, имеем

$$u^\varepsilon(t, x) \exp \left\{ \frac{v^0(t, x)}{\varepsilon^2} \right\} = g_{-1}^\varepsilon(t, x) \psi^\varepsilon(t, x). \quad (44)$$

Из определения $g_{-1}^\varepsilon(t, x)$ следует, что $g_{-1}^\varepsilon(t, x) g_1^\varepsilon(t, x) \equiv 1$; $g_{-1}^\varepsilon(t, x) \geq e^{-C_{19}T/2} > 0$ для всех (ε, t, x) . Из теоремы 6.2 следует, что для всех t и почти всех x существуют подпоследовательность $\{\varepsilon_k\}$ и функция $g_1^0(t, x)$ такие, что $g_1^0(t, x) = \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} g_1^{\varepsilon_k}(t, x)$. Поэтому для всех $t \in (0, T)$ и почти всех x выполняются равенства

$$\lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} g_{-1}^{\varepsilon_k}(t, x) g_1^{\varepsilon_k}(t, x) = g_1^0(t, x) \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} g_{-1}^{\varepsilon_k}(t, x) = 1.$$

Стало быть, существует функция $g_{-1}^0(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} g_{-1}^{\varepsilon_k}(t, x)$. Следовательно для всех $t \in (0, T)$ и почти всех x в силу теоремы 7.1 и (44) имеем для почти всех x

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} u_k^\varepsilon(t, x) \exp \left\{ \frac{v^0(t, x)}{\varepsilon_k^2} \right\} &= \lim_{\varepsilon_k \downarrow 0} g_{-1}^{\varepsilon_k}(t, x) \psi^{\varepsilon_k}(t, x) \\ &= g_{-1}^0(t, x) \psi^0(t, x). \end{aligned} \quad (45)$$

Умножив теперь правую часть (45) на $g_1^0(t, x)$, получим (2). Для завершения доказательства осталось только отметить, что утверждение теоремы 2.1 следует из единственности решений уравнений: (3) и (7), (4) и (30), (5) и (8).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985.
- [2] Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978.
- [3] Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.
- [4] Баклан В. В., Зуев Л. А. Управление диффузионными процессами с малой диффузией // Сб. "Теория случайных процессов". Киев: Наукова думка, 1976. С. 46–55.
- [5] Fleming W. H., Wendell H. Logarithmic transformation with applications in probability and stochastic control // Lecture Notes in Control and Information Sciences. 1988. V. 121. P. 309–311.
- [6] Хаметов В. М. ε -оптимальное управление случайными процессами диффузионного типа // Сб. "Вероятностные процессы в дискретной математике". М.: МИЭМ, 1987. С. 56–73.
- [7] Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. М.: Наука, 1988.
- [8] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [9] Вентцель А. Д. Предельные теоремы о больших отклонениях для марковских случайных процессов. М.: Наука, 1980.
- [10] Питербарг В. И., Фаталов В. Р. Метод Лапласа для вероятностных мер в банаховых пространствах // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 57–150.
- [11] Schilder M. Some asymptotic formulas for Wiener integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 125. P. 63–85.
- [12] Дубровский В. Н. Точные асимптотические формулы лапласовского типа для марковских процессов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 5. С. 1001–1004.
- [13] Кифер Ю. И. Об асимптотике переходных вероятностных процессов с малой диффузией // Теория вероятн. и ее примен. 1976. Т. 21. № 3. С. 527–536.
- [14] Varadhan S. R. S. Diffusion processes in a small time interval // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. № 4. P. 659–685.
- [15] Молчанов С. А. Диффузионные процессы и риманова геометрия // УМН. 1975. Т. 30. № 1. С. 3–59.
- [16] Несепенко Г. А., Тюрин Ю. Н. Лучевая асимптотика функции Грина уравнения теплопроводности с малым параметром // Матем. сб. 1984. Т. 124. № 3. С. 320–334.
- [17] Вуслаев В. С. Континуальные интегралы и асимптотика решений при $t \downarrow 0$. Приложение к дифракции // Проблемы математической физики. № 2. Л.: ЛГУ, 1967. С. 85–107.
- [18] Данилов В. Г., Фроловичев С. М. Метод отражения для конструирования асимптотики функции Грина для параболических уравнений с переменными коэффициентами // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 3. С. 467–420.
- [19] Маслов В. П., Чеботарев А. М. О втором члене логарифмической асимптотики функциональных интегралов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 19. М.: ВИНТИ, 1982. С. 127–154.
- [20] Khametov V. M. Global asymptotics of the inverse Kolmogorov equation for diffusion processes with small diffusion // Fifth International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Abstracts of Communications. V. 1. Vilnius, 1989. P. 252–253.
- [21] Khametov V. M. Asymptotic solution of the inverse Kolmogorov equation for diffusion processes with small diffusion // Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings of the Fifth Vilnius Conference. V. 1. Vilnius, 1990. P. 590–601.
- [22] Мазья В. Б. Пространства Соболева. Л.: ЛГУ, 1985.
- [23] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- [24] Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986.