Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, Локальная конечно-гладкая эквивалентность вещественных автономных систем с двумя чисто мнимыми собственными числами, *Матем. заметки*, 2012, том 92, выпуск 6, 912–927

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:21:29

Локальная конечно-гладкая эквивалентность вещественных автономных систем с двумя чисто мнимыми собственными числами

В. С. Самовол

В статье рассматриваются вещественные автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности невырожденной особой точки, у которых матрица линейной части имеет два чисто мнимых собственных значения, а остальные собственные значения лежат вне мнимой оси. Доказывается, что для таких систем, имеющих фокус на центральном многообразии, задача о конечно-гладкой эквивалентности решается по конечным отрезкам рядов Тейлора их правых частей.

Библиография: 11 названий.

Введение. Настоящая работа является продолжением исследований, начатых в [1]–[3]. Мы изучим задачу локальной конечно-гладкой эквивалентности вещественных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя чисто мнимыми собственными числами матрицы линейной части, ряды Тейлора правых частей которых отличаются членами высокой степени (так называемая *задача о конечно-определенных ростках векторных полей*). В большинстве работ, посвященных данной тематике, исследуются системы с невырожденной особой точкой (эта проблематика в значительной мере отражена в книге [4]). По поводу частично вырожденных систем см. [5]. В работах [6], [7] исследована задача о бесконечно гладкой эквивалентности формально эквивалентных систем с одним нулевым корнем или двумя чисто мнимыми собственными числами. Наш подход к решению задачи конечно-гладкой эквивалентности базируется на приведении таких систем к некоторой специальной псевдонормальной форме (см. [3]). Хотя при этом используются преобразования с особенностями, тем не менее, предлагаемый метод позволяет установить критерий конечно-гладкой эквивалентности рассматриваемых систем.

Рассмотрим вещественную автономную систему

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $n > 0$, $Q(\xi)$ – функция класса C^∞ в некоторой окрестности начала координат, $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ имеет n собственных чисел, лежащих вне мнимой оси, и пару чисто мнимых (сопряженных) собственных чисел. Пусть

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы $\tilde{A}$ с ненулевой действительной частью, $\pm i\omega$ – пара чисто мнимых собственных чисел данной матрицы, $\omega > 0$, i – мнимая единица.

С помощью стандартного линейного преобразования приведем систему (1) к следующему виду, где матрица $\tilde{A}$ имеет жорданову форму:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= i\omega x_1 + f_1(x, y), \\ \dot{x}_2 &= -i\omega x_1 + f_2(x, y), \\ \dot{y}_j &= \varepsilon_j y_{j+1} + \lambda_j y_j + g_j(x, y), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь x, y – комплексные координаты, $x = (x_1, x_2)$, $x_2 = \bar{x}_1$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения (см., например, [8; с. 167–168]), ряды Тейлора функций f_1, f_2, g_j , $j = 1, \dots, n$ не содержат линейных членов. Переменные x мы будем называть *вырожденными*, а переменные y , соответственно, невырожденными. Важным является то обстоятельство, что при всех последующих преобразованиях комплексных систем будет соблюдаться принцип, согласно которому комплексно сопряженные переменные и соответствующие им уравнения будут преобразовываться в комплексно сопряженные. Каждому такому преобразованию будет соответствовать вещественное преобразование исходной системы. Этот принцип (условие) мы будем называть *принципом (условием) вещественности*.

Согласно теореме 1 из [3] будем считать, что ряд Тейлора правой части системы (2) является суммой резонансных мономов по всем переменным (как вырожденным, так и невырожденным).

Напомним некоторые понятия, введенные в [3]. Важной особенностью рассматриваемых систем являются резонансы, которые возникают в тех случаях, когда $(\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2})/i\omega$ – целое число для каких либо $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq n$. Такие собственные числа, а также соответствующие переменные и уравнения системы мы будем называть *эквивалентными*. В случае отсутствия указанных резонансов система (1) всегда может быть приведена к полиномиальной резонансной нормальной форме преобразованием конечного класса гладкости [9; теорема 3]. Среди указанных резонансов выделим такие, где числа $\lambda_{j_1} = \bar{\lambda}_{j_2}$. Это означает, что число $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_{j_1}$ целое. Переменные, соответствующие собственным числам λ , для которых число $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda$ нечетное, будем называть *особыми* переменными, а если это число не является нечетным (или оно не целое), будем называть *неособыми*.

Согласно рассуждениям, приведенным в [3], считаем, что в системе (2) имеется двумерное инвариантное центральное многообразие, определяемое уравнением $y = 0$, на котором в окрестности особой точки интегральные кривые либо замкнуты (случай центра), либо являются спиралями (случай фокуса). В данной статье исследуются системы (1), имеющие фокус на центральном многообразии. Рассмотрим такую систему, приведенную к виду (2). В соответствии с [3], [10] мы будем рассматривать систему, которая на данном центральном многообразии имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и ниже

$$\tilde{r} = x_1 x_2, \quad \varphi(\tilde{r}) = \sum_{j=1}^m \varphi_j \tilde{r}^j, \quad \tilde{b}(\tilde{r}) = b \tilde{r}^m + c \tilde{r}^{2m},$$

$m \geq 1$ – целое число, $\varphi_1, \dots, \varphi_m, b, c$ – вещественные числа, $b \neq 0$. Отметим, что переменная $\tilde{r}$ удовлетворяет уравнению $\dot{\tilde{r}} = 2\tilde{r}\tilde{b}(\tilde{r})$.

Системы (1), у которых $\tilde{b}(\tilde{r})$ – плоская функция, образуют *исключительное множество* (по терминологии [7]), имеющее коразмерность равную бесконечности. Мы рассматриваем системы, не входящие в это множество.

Рассмотрим линейную (по невырожденным координатам) часть системы (2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega - i\varphi(\tilde{r}) + \tilde{b}(\tilde{r})), \\ \dot{y} &= A(x)y. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что за счет невырожденного преобразования класса C^∞ и соответствующей нумерации переменных можно добиться того, что матрица $A(x)$ будет иметь блочно-диагональную форму, где в отдельные блоки будут входить только группы эквивалентных переменных (см. [3; введение]).

Преобразуем систему (4) с помощью так называемых срезающих и слабо вырожденных преобразований (см. [1]–[3], [11]). Приведем соответствующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Срезающими преобразованиями* называются преобразования вида

$$y = S(\tilde{r})z, \quad y = S_1(x_1)z, \quad y = S_2(x_2)z, \quad (5)$$

где $S(\eta) = \text{diag}(\eta^{\delta_1}, \eta^{\delta_2}, \dots, \eta^{\delta_n})$, δ_q – рациональные числа, $S_j(\eta) = \text{diag}(\eta^{h_{1j}}, \eta^{h_{2j}}, \dots, \eta^{h_{n_jj}})$, h_{qj} – целые числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Слабо вырожденным преобразованием* называется замена переменных вида

$$\tilde{r} = du^l, \quad y = T^*z = BVTz. \quad (6)$$

Здесь $B = S_1(x)S_2(x)$, $T = T(\tilde{r})$ является произведением конечного числа преобразований, одна часть которых является срезающими преобразованиями вида $S(\tilde{r})$, а другая часть – это близкие к тождественным преобразования класса C^∞ . Число l является натуральным числом, $d = \text{const} > 0$. Преобразование V имеет блочно-диагональную структуру, совпадающую со структурой матрицы $A(x)$, $V = \text{diag}(V_1, \dots, V_K)$. При этом для блоков, не включающих комплексно сопряженные уравнения (т.е. соответствующие числа $2\omega^{-1} \text{Im } \lambda_q$ не целые), V_j – тождественные преобразования, а для блоков, включающих комплексно сопряженные уравнения, преобразования V_j имеют вид

$$V_j = \text{diag}(e^{i\tilde{h}\alpha} E_1, e^{-i\tilde{h}\alpha} E_1, E_2), \quad \alpha = \arg x_1, \quad e^{i\alpha} = \frac{x_1}{\sqrt{\tilde{r}}},$$

$\tilde{h}$ – наименьшее из положительных чисел $h_q = \omega^{-1} \text{Im } \lambda_q$, относящихся к данному блоку. Здесь E_1, E_2 – единичные матрицы размеров, соответствующих группам комплексных и вещественных переменных рассматриваемого блока.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для блоков, состоящих из особых переменных, число $2\tilde{h}$ нечетное, следовательно, матрица $e^{i\tilde{h}\alpha}E_1$ из определения 2 может быть представлена в виде

$$e^{i\tilde{h}\alpha}E_1 = \sqrt{e^{i\alpha}}e^{ih_1\alpha}E_1,$$

$h_1 = \tilde{h} - 1/2$ – целое число. В этом случае преобразование (6) будет разрывным в точках, где x_1 – вещественное положительное число и невырожденным класса C^∞ во всех остальных точках, где $x \neq 0$.

Основным результатом относительно системы (4) является следующая теорема (теорема 2 из [3]).

ТЕОРЕМА 1. Существует слабо вырожденное преобразование (6), приводящее систему (4) к следующей псевдонормальной форме

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= u_1(i\omega + i\psi(u) + b_1u^p + c_1u^{2p}), \\ \dot{u}_2 &= u_2(-i\omega - i\psi(u) + b_1u^p + c_1u^{2p}), \\ \dot{z} &= (A_0 + uA_1 + \dots + u^{p-1}A_{p-1} + u^pA_p)z.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь $u = u_1u_2$, $\psi(u) = \sum_{j=1}^p \psi_j u^j$, $\psi_1, \dots, \psi_p$, b_1 , c_1 – вещественные числа, $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ – постоянные диагональные матрицы, A_p – постоянная жорданова матрица, $p = 2ml$. При этом матрица A_p такова, что если числа $\lambda_{j_1}^h$ и $\lambda_{j_2}^h$, стоящие на диагонали какой-либо матрицы A_h , $0 \leq h \leq p-1$, не равны друг другу, то соответствующие диагональные элементы жордановой матрицы A_p располагаются в ее разных жордановых клетках. Переменная $u = u_1u_2$ удовлетворяет уравнению $\dot{u} = 2(b_1u^{p+1} + c_1u^{2p+1})$.

Число $|b_1|$ можно сделать равным любому заданному положительному числу за счет выбора d в преобразовании (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конечные отрезки рядов Тейлора преобразований класса C^∞ , являющихся множителями T из теоремы 1, определяются конечными отрезками ряда Тейлора матрицы $A(x)$ системы (4). Общее количество множителей, составляющих преобразование T , также зависит только от конечного отрезка ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого зависит от m и n . Срезающие преобразования, входящие множителями в преобразование T , определяются отрезком ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого равна некоторому числу $m_1(m, n)$. Число l зависит только от n . Отметим также, что при $x \neq 0$ преобразование T из (6) является невырожденным класса C^∞ . Это же относится и к преобразованию V , если среди чисел $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_q$ нет нечетных (нет особых переменных). В случае, когда среди целых чисел $2\omega^{-1} \operatorname{Im} \lambda_q$ есть нечетные (есть особые переменные), преобразование V будет разрывным в точках, где x_1 – вещественное положительное число, и невырожденным класса C^∞ во всех остальных точках, где $x \neq 0$.

Перейдем теперь к задаче о конечно-гладкой эквивалентности систем уравнений. Рассмотрим две системы вида (1), у которых N -струи правых частей совпадают.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если две системы вида (1) отличаются членами порядка N , который выше числа $m_1 = m_1(m, n)$ (см. замечание 2), то система (7) из теоремы 1 будет для них совпадать. Кроме того, срезающие преобразования, входящие множителями в слабо вырожденные преобразования (6), приводящие линейные части данных

систем к виду (7), также будут совпадать. При этом множители класса C^∞ , входящие в (6), будут различаться для наших систем, однако отличаться они будут членами порядка выше некоторого числа $N_1 = N_1(N)$, причем $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1(N) = \infty$.

Следующая теорема, решает проблему конечно-гладкой эквивалентности систем вида (1), имеющих фокус на центральном многообразии.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого целого числа $k > 0$ существует целое число N , обладающее следующим свойством: если ряды Тейлора правых частей двух систем вида (1), имеющих фокус на центральном многообразии и не относящихся к исключительному множеству, отличаются членами порядка выше N (совпадают N -струи), то эти системы локально C^k -эквивалентны, т.е. существует невырожденное (близкое к тождественному) преобразование класса C^k , приводящее одну систему к другой в малой окрестности начала координат. Число N зависит от чисел k, m, n , а также от коэффициентов отрезка ряда Тейлора матрицы $A(x)$, длина которого равна некоторому числу $m_1(m, n)$.*

Для невырожденных систем утверждение теоремы 2 принадлежит Стернбергу и Ченю (теорема 12.2 из [4; глава IX]). Некоторый общий результат для частично вырожденных систем получен в [5], где доказано соответствующее утверждение при условии совпадения участков рядов Тейлора при разложении правых частей систем по невырожденным координатам. Теорема 2 обобщает теорему Стернберга–Ченя на случай систем с двумя чисто мнимыми собственными числами. Аналогичная теорема для систем с одним нулевым собственным числом доказана в [2].

1. Примеры. В данном пункте мы на двух примерах проиллюстрируем доказательство теоремы 2 о конечно-гладкой эквивалентности.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2) + f_1(x, y), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2) + f_2(x, y), \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2 + g_1(x, y), \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2 + g_2(x, y).\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь переменные x_1 и x_2 , y_1 и y_2 попарно комплексно сопряжены, это же верно и для чисел λ_1 и λ_2 , при этом комплексно сопряженным переменным соответствуют комплексно сопряженные уравнения. Кроме того,

$$f_l(x, 0) = g_{lj}(0) = 0, \quad |g_l(x, y)| = o(\|y\|), \quad 1 \leq l, j \leq 2.$$

Пусть

$$\lambda_1 = a + bi, \quad \lambda_2 = a - bi, \quad a \neq 0, \quad b > 0, \quad \omega > 0.$$

В отличие от общего случая (см. систему (3)) мы считаем, что $\varphi(\tilde{r}) = 0$, $\tilde{b}(\tilde{r}) = \tilde{r}$. Отметим при этом, что все результаты остаются верными и в общем случае.

Без ограничения общности будем считать, что в данной системе ряды Тейлора функций в правых частях являются суммами резонансных мономов. Но резонансные мономы в последних двух уравнениях системы могут быть только линейными по невырожденным переменным, а в первых двух уравнениях таких резонансных

мономов, относящихся к функциям $f_j(x, y)$, $j = 1, 2$ нет совсем. Следовательно, все функции $f_j(x, y)$, $g_j(x, y)$ являются плоскими. Но тогда, поскольку, согласно [7], формальная эквивалентность систем вида (8) означает их C^∞ -эквивалентность, то можно считать указанные функции равными нулю. Итак, без ограничения общности будем полагать, что рассматриваемая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2), \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1y_1 + g_{11}(x)y_1 + g_{12}(x)y_2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2y_2 + g_{21}(x)y_1 + g_{22}(x)y_2.\end{aligned}\tag{9}$$

Рассмотрим еще одну систему, аналогичную (9):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(i\omega + x_1x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + x_1x_2), \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \lambda_1\tilde{y}_1 + \tilde{g}_{11}(x)\tilde{y}_1 + \tilde{g}_{12}(x)\tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \lambda_2\tilde{y}_2 + \tilde{g}_{21}(x)\tilde{y}_1 + \tilde{g}_{22}(x)\tilde{y}_2.\end{aligned}\tag{10}$$

Предположим, что соответствующие функции из правой части систем (9) и (10) имеют совпадающие N -струи.

Для монома $x_1^p x_2^q$, входящего в ряд Тейлора функции $g_{12}(x)$, выполняется резонансное равенство $(p - q)i\omega + \lambda_2 = \lambda_1$. Аналогичное равенство верно и для $g_{21}(x)$. Следовательно, если число $h = (\lambda_1 - \lambda_2)/(i\omega)$ не является целым, то функции $g_{12}(x)$, $g_{21}(x)$ будут плоскими и можно считать (см. выше), что они равны нулю. В этом случае система (9) преобразованием класса C^∞ приводится к нормальной форме в виде полинома третьей степени (см., например, лемму 2 из [9]). Все это верно и для системы (10). Отсюда следует, что если в рассматриваемом случае 3-струи систем (9) и (10) совпадают, то эти системы C^∞ -эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$h = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{i\omega} = \frac{2b}{\omega}$$

– целое. Функции $g_{lj}(x)$, $1 \leq l, j \leq 2$, можно представить в следующем виде:

$$g_{ll}(x) = d_{ll}(\tilde{r}), \quad g_{lj}(x) = x_l^h d_{lj}(\tilde{r}), \quad l \neq j, \quad \tilde{r} = x_1x_2,$$

$d_{ll}(\tilde{r})$, $d_{lj}(\tilde{r})$ – функции класса C^∞ . Отметим также, что $d_{22}(\tilde{r}) = \overline{d_{11}(\tilde{r})}$, $d_{21}(\tilde{r}) = \overline{d_{12}(\tilde{r})}$.

Сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}y &= V(x)z, \quad V(x) = \begin{pmatrix} e^{i\tilde{h}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\tilde{h}\alpha} \end{pmatrix}, \\ \tilde{h} &= \frac{h}{2}, \quad e^{i\alpha} = \frac{x_1}{r}, \quad \alpha = \arg x_1, \quad r = \sqrt{\tilde{r}}.\end{aligned}\tag{11}$$

В данном примере мы ограничимся случаем, когда число h четное и, следовательно, нет особых переменных. Уравнения для невырожденных переменных в системе (9) с добавлением к ним уравнения для $\tilde{r}$ примут вид

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= az_1 + d_{11}(\tilde{r})z_1 + \tilde{r}^{\tilde{h}}d_{12}(\tilde{r})z_2, \\ \dot{z}_2 &= az_2 + \tilde{r}^{\tilde{h}}d_{21}(\tilde{r})z_1 + d_{22}(\tilde{r})z_2, \quad a = \operatorname{Re} \lambda_1. \\ \dot{\tilde{r}} &= 2\tilde{r}^2,\end{aligned}\tag{12}$$

Полученную систему запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{z} &= aEz + \tilde{r}B_1z + o(\tilde{r})z, \\ \dot{\tilde{r}} &= 2\tilde{r}^2,\end{aligned}\tag{13}$$

E – единичная матрица.

Если у матрицы B_1 нет собственных чисел, отличающихся на ненулевое целое число, то (см. [1]) система (13) приводится невырожденным удовлетворяющим условию вещественности преобразованием класса C^∞ к виду

$$\begin{aligned}\dot{w} &= aEw + \tilde{r}A_1w, \\ \dot{\tilde{r}} &= 2\tilde{r}^2,\end{aligned}\tag{14}$$

где A_1 – постоянная жорданова матрица. Отметим, что элементы матрицы A_1 в данной системе определяются числами $d_{ii}(0)$, $d_{ij}(0)$ из системы (12). Если же у матрицы B_1 собственные числа отличаются на ненулевое целое число, то с помощью определенных срезающих преобразований (см. [1]) можно добиться того, чтобы собственные числа матрицы B_1 стали равными друг другу, а затем с помощью невырожденного преобразования класса C^∞ можно привести систему к виду (14).

Отметим, что при четном h все указанные замены переменных зависят от струи исходной системы некоторой длины P , где P зависит от собственных чисел матрицы B_1 . Эти замены являются невырожденными при $x \neq 0$.

Итак, исходная система (9) с помощью замены переменных

$$y = V(x)T(\tilde{r})w\tag{15}$$

приводится к псевдонормальной форме (14), где $V(x)$ – преобразование (11), а $T(\tilde{r})$ – является произведением конечного числа множителей, одна часть которых является срезающими преобразованиями, а другая часть – это невырожденные преобразования класса C^∞ .

Отметим, что аналогичное преобразование $\tilde{y} = V(x)\tilde{T}(\tilde{r})w$ для системы (10) будет отличаться от (15) только указанными выше множителями класса C^∞ . При этом данные множители будут иметь совпадающие N -струи.

Рассмотрим теперь преобразование

$$y = R(x)\tilde{y} = VT\tilde{T}^{-1}V^{-1}\tilde{y}.\tag{16}$$

Очевидно, что данное преобразование приводит систему (9) к виду (10). Покажем теперь, что при достаточно большом N данное преобразование принадлежит классу C^k с заданным $k > 0$. Соответствующие множители класса C^∞ в преобразованиях T и $\tilde{T}$ имеют совпадающие N -струи, а все производные срезающих множителей

до порядка k в преобразованиях T и $\tilde{T}^{-1}$ не превосходят по норме величину $Dr^{-\tilde{L}}$, $D = \text{const}$, $\tilde{L} > 0$ – число, зависящее от k . Количество этих множителей не превосходит некоторого числа L_1 , которое зависит от собственных чисел матриц B_1 в системе (13), которые, в свою очередь, определяются числами $d'_{11}(0)$, $d_{12}(0)$ из системы (12). Нетрудно видеть, что производные до порядка k элементов матрицы $P(x) = T\tilde{T}^{-1} - E$ по модулю не превосходят величины

$$Dr^{N_1}, \quad N_1 = N_1(N, k, \tilde{L}, L_1) = N - L_2(k, \tilde{L}, L_1), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N_1 = \infty.$$

Заметим также, что матрица $V(x)$ при четном h является невырожденной при $x \neq 0$. Производные до порядка k элементов матриц V , V^{-1} (при четном h) по модулю не превосходят величины $Dr^{-(h+k)}$.

Из приведенных оценок следует, что при достаточно большом N преобразование (16) принадлежит классу C^k и, следовательно, утверждение о конечно-гладкой эквивалентности систем (9) и (10) доказано.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + \tilde{r}), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + \tilde{r}), \\ \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + x_1 y_2 + \tilde{r}^N y_3^2, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + x_2 y_1 + \tilde{r}^N y_4^2, \\ \dot{y}_3 &= \lambda_3 y_3, \\ \dot{y}_4 &= \lambda_4 y_4. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь переменные x_1 и x_2 , y_1 и y_2 , y_3 и y_4 попарно комплексно сопряжены, это же верно и для чисел λ_1 и λ_2 , λ_3 и λ_4 , $\lambda_1 = 2\lambda_3$, $\lambda_1 = a + bi$, $a \neq 0$, $b > 0$, $\omega = 2b$, $\tilde{r} = x_1 x_2$, $N > 0$ – некоторое целое число. Особыми переменными здесь являются y_1 и y_2 .

Рассмотрим одновременно соответствующую линейную по невырожденным переменным систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(i\omega + \tilde{r}), \\ \dot{x}_2 &= x_2(-i\omega + \tilde{r}), \\ \dot{\tilde{y}}_1 &= \lambda_1 \tilde{y}_1 + x_1 \tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 &= \lambda_2 \tilde{y}_2 + x_2 \tilde{y}_1, \\ \dot{\tilde{y}}_3 &= \lambda_3 \tilde{y}_3, \\ \dot{\tilde{y}}_4 &= \lambda_4 \tilde{y}_4. \end{aligned} \tag{18}$$

Наша цель состоит в доказательстве теоремы 2 для системы (17), т. е. в построении для заданного целого $k > 0$ обратимого преобразования класса C^k системы (17) к виду (18), при этом число N будет зависеть от k .

Построение такого преобразования разобьем на три этапа. На первом этапе мы построим линейное преобразование T , приводящее обе системы к псевдонормальной форме. Вследствие наличия особых переменных это преобразование будет разрывным в точках, где x_1 – вещественное положительное число, кроме того, оно будет

необратимым при $x = 0$. Во всех остальных точках оно будет невырожденным класса C^∞ . Отметим, что в точках разрыва данное преобразование остается обратимым. На втором этапе будет построено преобразование H , приводящее полученную в результате первого этапа псевдонормальную форму системы (17) к псевдонормальной форме системы (18). Третий этап состоит в применении к полученным таким образом системам преобразования T^{-1} (в точках, где $x \neq 0$). Далее мы покажем, что итоговое преобразование $R = T^{-1}HT$, доопределенное до тождественного при $x = 0$, будет близким к тождественному конечно-гладким преобразованием класса C^k (при $2N > k + 3$), приводящим систему (17) к виду (18). Отметим, что этот же план реализуется в доказательстве теоремы 2 в общем случае.

При следующих преобразованиях переменные $x_1, x_2, y_3, y_4, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4$ и соответствующие им уравнения меняться не будут, поэтому для простоты эти уравнения мы будем опускать. Приступим к реализации первого этапа намеченного плана.

Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} Y &= V(\alpha)Z, & \tilde{Y} &= V(\alpha)\tilde{Z}, & Y^T &= (y_1, y_2), & \tilde{Y}^T &= (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2), \\ Z^T &= (z_1, z_2), & \tilde{Z}^T &= (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2), \\ V(\alpha) &= \text{diag}(e^{i\beta}, e^{-i\beta}), & \beta &= \frac{\alpha}{2}, & \alpha &= \arg x_1. \end{aligned}$$

В данном примере T – знак транспонирования.

Соответствующие уравнения систем (17) и (18) примут вид

$$\dot{Z} = A_1 Z + Q, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a & \sqrt{\tilde{r}} \\ \sqrt{\tilde{r}} & a \end{pmatrix}, \quad Q = \tilde{r}^N F, \quad (19)$$

$$\dot{\tilde{Z}} = A_1 \tilde{Z}, \quad (20)$$

$$a = \text{Re } \lambda_1, \quad F^T = (F_1, F_2), \quad F_1 = e^{-i\beta} y_3^2, \quad F_2 = e^{i\beta} y_4^2.$$

Следующие преобразования

$$Z = BW, \quad \tilde{Z} = B\tilde{W}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \tilde{r} = r^2$$

приводят полученные системы к псевдонормальной форме

$$\dot{W} = A_2 W + G, \quad (21)$$

$$\dot{\tilde{W}} = A_2 \tilde{W}. \quad (22)$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} a + r & 0 \\ 0 & a - r \end{pmatrix}, \quad G = r^{2N} B^{-1} F,$$

Первый этап нашего плана завершен. Переходим ко второму этапу.

Прежде всего заметим, что с учетом того, что переменная β удовлетворяет уравнению $\dot{\beta} = \omega/2 = b$, $b = \text{Im } \lambda_1$, получаем, что производная $\dot{U}$ функции $U = (U_1, U_2)^T = B^{-1}F(\beta, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4)$ в силу системы $\dot{\beta} = \omega/2$, $\dot{\tilde{y}}_j = \lambda_j \tilde{y}_j$, $j = 3, 4$, удовлетворяет уравнению $\dot{U} = aU$.

Цель данного этапа состоит в построении преобразования, приводящего системе (21) к виду (22).

Прямая проверка показывает, что существуют такие функции

$$c_j(r) = o(r^{2N-2}), \quad j = 1, 2,$$

класса C^∞ , что в результате преобразования $W = W^1 + C(r)U$, $C(r) = \text{diag}(c_1(r), c_2(r))$ система (21) примет вид

$$\dot{W}^1 = A_2 W^1 + h(r)U,$$

где $h(r) = \text{diag}(h_1(r), h_2(r))$ – плоская матрица. Чтобы сделать эту матрицу равной нулю, надо провести еще одно дополнительное преобразование $W^1 = W^2 + g(r)U$, $g(r) = \text{diag}(g_1(r), g_2(r))$, где диагональные элементы матрицы $g(r)$ являются плоскими решениями уравнений $g'_j(r)r^3 = (-1)^{j+1}r g_j(r) + h_j(r)$, $j = 1, 2$. У данных уравнений есть искомые плоские решения (см., например, [6; с. 49–50]).

Таким образом, мы получили преобразование

$$W = \widetilde{W} + H^*, \quad H^* = C_1(r)U, \quad C_1(r) = C(r) + g(r) = o(r^{2N-2}),$$

приводящее систему (21) к виду (22).

В результате двух этапов мы построили следующие преобразования:

$$Y = V(\alpha)BW, \quad \tilde{Y} = V(\alpha)B\widetilde{W}, \quad W = \widetilde{W} + H^*.$$

Приступаем к третьему этапу. Из предыдущего следует, что преобразование

$$Y = \tilde{Y} + V(\alpha)BH^* \quad (23)$$

приводит систему (17) к виду (18). Покажем, что оно является обратимым и при $2N > k + 3$ принадлежит классу C^k . Верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} V(\alpha) &= \xi V_1(\alpha), \quad \xi = e^{i\beta}, \quad V_1 = \text{diag}(1, e^{-i\alpha}), \quad H^* = C_1(r)U, \\ U &= B^{-1}F, \quad F^T = (e^{-i\beta}\tilde{y}_3^2, e^{i\beta}\tilde{y}_4^2) = e^{-i\beta}(\tilde{y}_3^2, e^{i\alpha}\tilde{y}_4^2), \\ U &= \xi^{-1}B^{-1}F^*, \quad F^* = (\tilde{y}_3^2, e^{i\alpha}\tilde{y}_4^2)^T. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $H^* = \xi^{-1}C_1(r)B^{-1}F^*$ и $V(\alpha)BH^* = V_1(\alpha)BC_1(r)B^{-1}F^*$, из чего видно, что преобразование (23) обратимо и принадлежит классу C^k при $2N > k + 3$. Доказательство завершено.

2. Конечно-гладкая эквивалентность. Следующее определение аналогично определению 3 из [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $L \geq 0$ – целое число. Функцию $Q = Q(x, y)$ будем называть L -малой, если

$$Q = Q(x, y) = \|x\|^L h(x, y), \quad h \in C^L,$$

Матрицу будем называть L -малой, если все ее элементы являются L -малыми функциями. Если число L зависит от некоторого целочисленного параметра N , причем $\lim_{N \rightarrow \infty} L(N) = \infty$, то совокупность $L(N)$ -малых функций (матриц) будем обозначать символом Ω . Совокупность отображений Ψ , для которых разность $\Psi - E \in \Omega$ (где E – тождественное отображение), будем обозначать символом Ω_1 .

Следуя терминологии, использованной в [7], введем еще одно понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Отображение $T(w) = T(x, y)$, принадлежащее C^∞ при $x \neq 0$, называется *допустимым*, если существуют такие константы $d_I > 0$, α_I , что при $x \neq 0$

$$\left\| \frac{\partial^{|I|} T(w)}{\partial w^I} \right\| \leq d_I \|x\|^{\alpha_I}, \quad \left\| \frac{\partial^{|I|} T^{-1}(w)}{\partial w^I} \right\| \leq d_I \|x\|^{\alpha_I}.$$

Числа α_I могут быть и отрицательными. Здесь I – неотрицательные целочисленные наборы.

Примерами функций, принадлежащих Ω , являются функции $\|x\|^N$, $\|x\|^{\sqrt{N}}$ и т.п. В то же время функции $\|x\|^2$, $\|x\|^{100}$ и т.п. не принадлежат Ω . Примерами допустимых отображений являются срезающие преобразования.

Очевидно, что если отображение $\Phi \in \Omega$, а T – допустимое отображение, то ΦT и $T\Phi$ принадлежат Ω . Суперпозиция отображений, принадлежащих Ω (или Ω_1) также принадлежит Ω (Ω_1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Рассмотрим две системы вида (1) с совпадающими N -струями правых частей, где число N определим позже, а пока будем считать $N > m_1(m, n)$. Согласно [5] существует такое число $\tilde{N} = \tilde{N}(k, \Lambda)$, что если ряды разложения правых частей двух систем вида (1) по невырожденным переменным отличаются членами порядка выше $\tilde{N}$, то такие системы C^k -эквивалентны. Здесь Λ – невырожденная часть спектра матрицы $\tilde{A}$ линейной части системы (1). Согласно [5] правые части систем можно считать конечной суммой мономов по невырожденным переменным (степени этих мономов не превышают числа $\tilde{N}$), с коэффициентами, являющимися функциями от вырожденной переменной класса C^∞ , N -струи которых совпадают. Если $N > m_1(m, n)$, то согласно замечанию 2 слабо вырожденные преобразования T_1^* и T_2^* вида (6), приводящие линейные части обеих систем к одной системе вида (7), будут отличаться только множителями класса C^∞ , причем эти множители будут иметь совпадающие N_1 -струи, где $N_1 = N_1(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1(N) = \infty$.

Рассмотрим системы, которые получатся после применения к исходным системам преобразований T_1^* и T_2^* . В связи с тем, что полученные системы имеют сходный вид и их дальнейшие преобразования строятся аналогично, ограничимся рассмотрением одной из них.

Выделим две группы переменных. В первую группу отнесем особые переменные, а во вторую – неособые. Вектор из особых переменных будем обозначать Z_1 , а из неособых – Z_2 . Нелинейную систему, являющуюся результатом применения к системе (2) преобразования (6), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{r} &= b_1 r^{2p+1} + c_1 r^{4p+1} + f_1, \\ \dot{\alpha} &= \omega + \psi(r^2) + f_2, \\ \dot{Z}_l &= A_l(r) Z_l + H_l, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь и ниже мы пользуемся полярными координатами

$$r = \sqrt{u_1 u_2}, \quad \alpha = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{u_1}{u_2} \right).$$

Функции H_1 представляют собой суммы мономов вида

$$\xi^{|S_1|-1} Z_1^{S_1} Z_2^{S_2} \mu^K c_{S_1 S_2 K}(r), \quad (25)$$

а функции f_1, f_2, H_2 – это суммы мономов

$$\xi^{|S_1|} Z_1^{S_1} Z_2^{S_2} \mu^K c_{S_1 S_2 K}(r), \quad (26)$$

где $c_{S_1 S_2 K}(r)$ – функции класса C^∞ . Это следует из вида преобразования (6) и замечания 1. Здесь S_1, S_2 – неотрицательные целочисленные наборы, $Z_l^{S_l}$ – соответствующие мономы, K – целые числа, $\xi = \sqrt{e^{i\alpha}}$, $\mu = e^{i\alpha}$, $|S_1|$ – вес набора. Мы используем стандартные обозначения, принятые в [1]–[3]: $Z^S = z_1^{s_1} \cdots z_p^{s_p}$, $S = (s_1, \dots, s_p)$, $s_1, \dots, s_p$ – неотрицательные целые числа, $|S|$ – вес набора S , $|S| = s_1 + \dots + s_p$.

Рассмотрим ряды Тейлора $\hat{c}_{S_1 S_2 K}(r) = \sum_L c_{L S_1 S_2 K} r^L$ функций $c_{S_1 S_2 K}(r)$. Поскольку N -струи исходных систем совпадают, то можно считать, что соответствующие коэффициенты у обеих систем совпадают при

$$L \leq N_2, \quad N_2 = N_2(N), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N_2(N) = \infty.$$

Ниже нам будет удобно использовать в системе (24) вместо переменной α переменную $\mu = e^{i\alpha}$, в результате чего указанная система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= b_1 r^{2p+1} + c_1 r^{4p+1} + f_1, \\ \dot{\mu} &= i\mu(\omega + \psi(r^2) + f_2), \\ \dot{Z}_l &= A_l(r)Z_l + H_l, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Будем добиваться того, чтобы ряды Тейлора функций $c_{S_1 S_2 K}(r)$ стали полиномами степени N_2 . При этом будем последовательно рассматривать наборы (S_1, S_2) в порядке возрастания (см. [2; с. 286]). Уточним указанный принцип упорядочения наборов (и соответствующих мономов) следующим образом. Если вес двух различных наборов $\tilde{S} = (\tilde{S}_1, \tilde{S}_2)$, $S = (S_1, S_2)$ одинаков, то будем считать, что $\tilde{S} > S$, если $\tilde{S}_1 > S_1$ в смысле определения из [2].

Для наших целей используем замены переменных (см. [3])

$$\begin{aligned} z_j &= w_j + \sum d_{jSK} \xi_1^{|S_1|-1} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K r_1^{L-2(q+1)}, & 1 \leq j \leq n_1, \\ z_j &= w_j + \sum d_{jSK} \xi_1^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K r_1^{L-2(q+1)}, & n_1 + 1 \leq j \leq n, \\ \mu &= \mu_1 + \sum a_{1SK} \xi_1^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K r_1^{L-2(q+1)}, \\ r &= r_1 + \sum a_{2SK} \xi_1^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K r_1^{L-2(q+1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $L > N_2$, $n_1, n_2 = n - n_1$ – количество особых и неособых переменных соответственно, q – уровень соответствующего монома, $\xi_1 = \sqrt{\mu_1}$. Мономы $\xi^S Z_1^{S_1} Z_2^{S_2} \mu^K r^L$ при $L > N_2$, $s = |S_1| - 1$ и $s = |S_1|$, очевидно, являются устранимыми (определение см. в [3]), поэтому коэффициенты d_{jSK} , a_{1SK} , a_{2SK} находятся по соответствующим формулам (см. раздел 3 из [3]), $S = (S_1, S_2)$. В суммах присутствуют наборы, для которых $|S_1|$ и $|S_2|$ фиксированы.

Проводя индукцию по L , получаем существование преобразований вида (28), где d_{jSK} , a_{1SK} , a_{2SK} – функции от r класса C^∞ , в результате которых во всех уравнениях системы коэффициенты при мономах

$$\xi^{|S_1|-1} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K, \quad \xi^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K$$

станут суммами многочленов степени N_2 и плоских функций. Чтобы сделать эти плоские коэффициенты равными нулю, проведем дополнительное преобразование вида (28), где коэффициенты d_{jSK} , a_{1SK} , a_{2SK} будут искомыми функциями от r . Чтобы достигнуть указанной цели, эти функции должны удовлетворять уравнениям вида

$$g'(r)(br^l + c^{l+h}) = g(r)(a_0 + a_1 r + \dots + a_{l-1} r^{l-1}) + a(r).$$

Здесь $g(r)$ – искомая функция, $l \geq 1$, $h > 0$ – целые числа, b, c, a_j – постоянные величины, $b \neq 0$, $a(r)$ – плоская функция. У данного уравнения имеется плоское решение (см., например, [6; с. 49–50]). Таким образом, искомое преобразование нами построено. Его можно записать так

$$\begin{aligned} Z_1 &= W_1 + \sum g_{1SK}(r_1) \xi^{|S_1|-1} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K, \\ Z_2 &= W_2 + \sum g_{2SK}(r_1) \xi^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K, \\ \mu &= \mu_1 + \sum f_{1SK}(r_1) \xi_1^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K, \\ r &= r_1 + \sum f_{2SK}(r_1) \xi_1^{|S_1|} W_1^{S_1} W_2^{S_2} \mu_1^K. \end{aligned} \quad (29)$$

Все суммы здесь конечны, $S = (S_1, S_2)$. Коэффициенты $g_{lSK}(r)$, $f_{lSK}(r)$, $l = 1, 2$ представляют собой зависящие от r функции класса C^∞ порядка $o(r^{N_3})$, $N_3 = N_3(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_3(N) = \infty$.

Обозначим построенные преобразования для наших систем $H_{11} = H_{11}(\xi, Z, \mu, r)$ и $H_{21} = H_{21}(\xi, Z, \mu, r)$. К полученным в результате этих преобразований системам вновь применим эту же процедуру. В итоге получим конечную последовательность преобразований

$$H_{q1}, H_{q2}, \dots, H_{qJ}, \quad g = 1, 2,$$

в результате которых правые части обеих систем будут представлять собой суммы двух слагаемых. Первое слагаемое будет одинаковым для обеих систем и представляет собой сумму мономов вида (25) и (26), у которых $|S| \leq \tilde{N}$, $\tilde{N} = \tilde{N}(k, \Lambda)$ – число, о котором упоминалось в начале доказательства нашей теоремы, функции $c_{S_1 S_2 K}(r)$ одинаковы для обеих систем и являются многочленами степени N_2 . Второе слагаемое – это сходящиеся ряды мономов того же вида, но где $|S| > \tilde{N}$ (здесь функции $c_{S_1 S_2 K}(r)$ различны для разных систем и, вообще говоря, не являются многочленами, но принадлежат C^∞). Обозначим итоговые преобразования наших систем

$$H_q = \prod_{0 \leq l \leq J-1} H_{qJ-l}, \quad q = 1, 2.$$

Применим теперь к полученным в результате этих преобразований системам преобразование $(T_1^*)^{-1}$ и рассмотрим следующие итоговые преобразования исходных двух систем:

$$R_1 = (T_1^*)^{-1} H_1 T_1^*, \quad R_2 = (T_1^*)^{-1} H_2 T_2^*.$$

Эти преобразования можно представить в виде следующих произведений:

$$\begin{aligned} R_1 &= \tilde{H}_{1J} \cdots \tilde{H}_{11}, & \tilde{H}_{1l} &= (T_1^*)^{-1} H_{1l} T_1^*, & 1 \leq l \leq J, \\ R_2 &= \tilde{H}_{2J} \cdots \tilde{H}_{21}, & \tilde{H}_{2l} &= (T_2^*)^{-1} H_{2l} T_2^*, & 1 \leq l \leq J-1, & \tilde{H}_{2J} = (T_1^*)^{-1} H_{2J} T_2^*. \end{aligned}$$

Следующее утверждение состоит в том, что отображения $R_{1,2} \in \Omega_1$. Для этого достаточно показать, что $\tilde{H}_{1l}, \tilde{H}_{2l} \in \Omega_1$, $1 \leq l \leq J$. Мы ограничимся обоснованием того, что $\tilde{H}_{11} \in \Omega_1$. Для других отображений доказательство аналогично. Указанное обоснование приведем ниже, а сейчас приведем заключительную часть доказательства теоремы.

Поскольку преобразование $(T_1^*)^{-1}$ линейно по невырожденным переменным, то правые части полученных систем будут суммой двух слагаемых, первое из которых, одинаковое для обеих систем, является полиномом по невырожденным переменным степени $\tilde{N}$, а вторые слагаемые будут представлять собой функции класса C^∞ по невырожденным переменным, ряды Тейлора которых начинаются с членов степени большей $\tilde{N}$. Так как итоговые преобразования принадлежат классу C^{N_4} , где $N_4 = N_4(N)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} N_4(N) = \infty$, то при достаточно большом N можно считать, что и первые и вторые слагаемые принадлежат классу C^M , где $M \geq \tilde{N}$. При этом правые части систем отличаются только членами, имеющими порядок по невырожденным переменным выше $\tilde{N}$. Но тогда согласно [5] полученные системы будут C^k -эквивалентны. Тем самым, доказательство теоремы будет завершено.

Рассмотрим преобразование $\tilde{H}_{11}$. Напомним, что $T_1^* = BVT_1$, где B , V и $T_1 = T_1(\sqrt{r})$ – преобразования, описанные в определении 2. Отметим, что преобразования B , V и T_1 являются блочно диагональными $B = \text{diag}(B_1, B_2)$, $V = \text{diag}(D_1, D_2)$, $T_1 = \text{diag}(T_{11}, T_{12})$, квадратные матрицы B_1 , D_1 , T_{11} имеют размер n_1 , а матрицы B_2 , D_2 , T_{12} – размер n_2 . Матрицы B_q , D_q , $q = 1, 2$, можно записать в виде $B_q = B_q(r, \mu) = B_{q1}(r)B_{q2}(\mu)$, $q = 1, 2$, $D_2 = D_2(\mu)$, $D_1 = \xi C(\mu)$, где B_{q1} , C , D_2 – диагональные матрицы, на диагоналях которых стоят их аргументы в целых степенях.

Обозначим

$$\begin{aligned} G_q(r_1, \mu_1) &= B_q(r_1, \mu_1) D_q(\mu_1) T_{1q}(r_1), & \tilde{Y}_q &= G_q(r_1, \mu_1) W_q, & q = 1, 2, \\ \tilde{G}_1(r, \mu) &= B_1(r, \mu) C(\mu) T_{11}(r). \end{aligned}$$

Учитывая, что $Y_q = G_q(r, \mu) Z_q$, $q = 1, 2$, из (29) получаем

$$\begin{aligned} Y_1 &= G_1(r, \mu) G_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1 \\ &\quad + G_1(r, \mu) \sum g_{1SK}(r_1) \xi_1^{|S_1|-1} (G_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K, \\ Y_2 &= G_2(r, \mu) G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2 \\ &\quad + G_2(r, \mu) \sum g_{2SK}(r_1) \xi_1^{|S_1|} (G_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K, \\ \mu &= \mu_1 + \sum f_{1SK}(r_1) \xi_1^{|S_1|} (G_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K, \\ r &= r_1 + \sum f_{2SK}(r_1) \xi_1^{|S_1|} (G_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K. \end{aligned}$$

Учитывая, что $G_1(r, \mu) = \xi \tilde{G}_1(r, \mu)$, получаем

$$\begin{aligned} Y_1 &= \xi \xi_1^{-1} \tilde{G}_1(r, \mu) \tilde{G}_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1 \\ &\quad + \xi \xi_1^{-1} \tilde{G}_1(r, \mu) \sum g_{1SK}(r_1) (\tilde{G}_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K, \\ Y_2 &= G_2(r, \mu) G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2 \\ &\quad + G_2(r, \mu) \sum g_{2SK}(r_1) (\tilde{G}_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K, \\ \mu &= \mu_1 + \sum f_{1SK}(r_1) (\tilde{G}_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K, \\ r &= r_1 + \sum f_{2SK}(r_1) (\tilde{G}_1^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_1)^{S_1} (G_2^{-1}(r_1, \mu_1) \tilde{Y}_2)^{S_2} \mu_1^K. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что из приведенных формул следует, что $\mu \mu_1^{-1} \in \Omega_1$, $\xi \xi_1^{-1} \in \Omega_1$.

Кроме того, если допустимое преобразование Q имеет вид $(x, y) \rightarrow (x, P(x)y)$ и преобразование $H \in \Omega_1$, то $QHQ^{-1} \in \Omega_1$. Следствием этого являются следующие утверждения:

- 1) если $S(\eta) = \text{diag}(\eta^{\delta_1}, \eta^{\delta_2}, \dots, \eta^{\delta_n})$, δ_j – рациональные числа, $H \in \Omega_1$, то $S(r)HS^{-1}(r_1) \in \Omega_1$;
- 2) если $S(r) = r + B(r)$, $B(r) \in C^\infty$, $\|B(r)\| = o(r)$, $H \in \Omega_1$, то $S(r)HS^{-1}(r_1) \in \Omega_1$;
- 3) если $H \in \Omega_1$, то $C(\mu)HC^{-1}(\mu_1) \in \Omega_1$.

Кроме того, если допустимое преобразование Q имеет вид (в полярных координатах) $(\alpha, r, y) \rightarrow (\alpha, \sqrt[l]{r}, y)$, $l > 0$ – целое число, и преобразование $H \in \Omega_1$, то $QHQ^{-1} \in \Omega_1$.

Из этих утверждений, учитывая также, что произведение допустимого преобразования и преобразования из множества Ω также принадлежит Ω , получаем, что построенное преобразование имеет вид

$$x = \tilde{x} + H_1(\tilde{x}, \tilde{Y}), \quad Y = \tilde{Y} + H_2(\tilde{x}, \tilde{Y}), \quad H_{1,2} \in \Omega.$$

Здесь

$$Y = (Y_1, Y_2), \quad \tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2), \quad x = (r\mu, r\mu^{-1}), \quad \tilde{x} = (r_1\mu_1, r_1\mu_1^{-1}).$$

Итак, доказано, что отображение $\tilde{H}_{11} \in \Omega_1$. Теорема 2 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения данной работы и ряд ценных замечаний, способствующих улучшению ее изложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Самовол, “О новых резонансах и нормальной форме автономных систем с одним нулевым корнем”, *Матем. заметки*, **88**:1 (2010), 63–77.
- [2] В. С. Самовол, “Конечно-гладкая локальная эквивалентность автономных систем с одним нулевым корнем”, *Матем. заметки*, **88**:2 (2010), 275–287.
- [3] В. С. Самовол, “О псевдонормальной форме вещественных автономных систем с двумя чисто мнимыми собственными числами”, *Матем. заметки*, **92**:5, 731–746.
- [4] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [5] В. С. Самовол, “Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки”, *Тр. ММО*, **44**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 213–234.

- [6] А. Н. Кузнецов, “Дифференцируемые решения вырождающихся систем обыкновенных уравнений”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:2 (1972), 41–51.
- [7] Г. Р. Белицкий, “Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 1–8.
- [8] А. Д. Брюно, *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1979.
- [9] В. С. Самовол, “Конечно-гладкая нормальная форма автономной системы с двумя чисто мнимыми корнями”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 270–281.
- [10] А. Д. Брюно, В. Ю. Петрович, *Нормальные формы системы ОДУ*, Препринт № 18, Ин-т прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, М., 2000.
- [11] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1968.

В. С. Самовол

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва

E-mail: 555svs@mail.ru

Поступило

06.10.2011