Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Чеботарев, А. Е. Теретенков, Операторные ОДУ
и формула Фейнмана, *Матем. заметки*, 2012, том 92,
выпуск 6, 943–948

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:31:19

Операторные ОДУ и формула Фейнмана

А. М. Чеботарев, А. Е. Теретенков

Дифференцирование функций от некоммутирующих операторов, зависящих от параметра, по которому производится дифференцирование, усложняется, если операторы и их производные не коммутируют. Для вычисления производной $\dot{G}_t$ операторозначной экспоненты e^{G_t} в случае $[G_t, \dot{G}_t] \neq 0$ Фейнман [1] использовал формулу, связывающую G_t с левой производной $\dot{G}_t^L$ этого семейства ($\dot{G}_t^L : G_t^L e^{G_t} = (d/(dt))e^{G_t}$ (см. [2]), а также обсуждение в [3; с. 275, формула (1.10)], и в [4]):

$$\dot{G}_t^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dt} e^{G_t} \right) e^{-G_t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^1 ds \frac{d}{ds} e^{s(G_t + \Delta t \dot{G}_t)} e^{-sG_t} = \int_0^1 ds e^{sG_t} \dot{G}_t e^{-sG_t}. \quad (1)$$

Аналогичный вид имеет правая производная

$$\dot{G}_t^R \stackrel{\text{def}}{=} e^{-G_t} \left(\frac{d}{dt} e^{G_t} \right) = \int_0^1 ds e^{-sG_t} \dot{G}_t e^{sG_t} = e^{-G_t} \dot{G}_t^L e^{G_t} = - \left(\frac{d}{dt} e^{-G_t} \right) e^{G_t}.$$

Последнее равенство вытекает из тождества $(d/dt)e^{-G_t}e^{G_t} = 0$.

Например, если $G_t = (a^\dagger, C_t a)$ и $[C_t, \dot{C}_t] \neq 0$, где C_t – семейство эрмитовых $(n \times n)$ -матриц и $a^\dagger = \{a_1^\dagger, \dots, a_n^\dagger\}$, $\{a_1, \dots, a_n\}$, то учитывая, что

$$a_t^\dagger(s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{sG_t} a^\dagger e^{-sG_t} = e^{sC_t^T} a^\dagger, \quad a_t(s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{sG_t} a e^{-sG_t} = e^{-sC_t} a, \\ e^{sG_t} \dot{G}_t e^{-sG_t} = e^{s(a^\dagger, C_t a)} (a^\dagger, \dot{C}_t a) e^{-s(a^\dagger, C_t a)} = (a_t^\dagger(s), \dot{C}_t a_t(s)) = (e^{sC_t^T} a^\dagger, \dot{C}_t e^{-sC_t} a),$$

получаем

$$\dot{G}_t^L = \int_0^1 ds e^{sG_t} \dot{G}_t e^{-sG_t} = \left(a^\dagger, \int_0^1 ds e^{sC_t} \dot{C}_t e^{-sC_t} a \right) = (a^\dagger, \dot{C}_t^L a).$$

Поэтому $\dot{G}_t^L = (a^\dagger, \dot{C}_t^L a)$ и

$$\int_0^1 ds e^{sC_t} \dot{C}_t e^{-sC_t} = \dot{C}_t^L. \quad (2)$$

Последнее соотношение можно рассматривать как неявное матричное ОДУ относительно C_t с известной правой частью $\dot{C}_t^L$. Именно такая задача возникает далее при выводе многомодового варианта формулы Киржница–Боголюбова.

В общем случае из формулы (1) следует, что для вычисления G_t нужно решить задачу Коши для неявной системы операторных ОДУ (ООДУ)

$$\int_0^1 ds e^{sG_t} \dot{G}_t e^{-sG_t} = \dot{G}_t^L, \quad G|_{t=0} = G_0. \quad (3)$$

Предполагается, что операторы G_t^L известны. В частном случае, если операторы G_t^L , $\dot{G}_t^L$ и G_0 коммутируют, решением задачи (3) является функция $G_t = G_t^L$ и остается открытым лишь вопрос о его единственности.

Для построения численных методов решения операторных ОДУ порядка точности выше первого требуются формулы для производных высших порядков, которые могут быть получены путем дифференцирования и повторного применения формул (1), (3):

$$\frac{d}{dt} e^{\pm sG_t} = \pm \int_0^s d\sigma e^{\pm \sigma G_t} \dot{G}_t e^{\pm (s-\sigma)G_t} = \pm \int_0^s d\sigma e^{\pm (s-\sigma)G_t} \dot{G}_t e^{\pm sG_t}, \quad (4)$$

$$\int_0^1 ds e^{sG_t} \ddot{G}_t e^{-sG_t} = \ddot{G}_t^L + \int_0^1 ds \int_0^s d\sigma [e^{sG_t} \dot{G}_t e^{-sG_t}, e^{\sigma G_t} \dot{G}_t e^{-\sigma G_t}]. \quad (5)$$

Неявные уравнения для высших производных выводятся аналогично, а для получения явных формул необходима конструкция решений X_t уравнений $\int_0^1 ds e^{sG_t} X_t e^{-sG_t} = A_t$.

Для этой цели удобно использовать представление, в котором операторы $e^{\pm sG_t}$ имеют наиболее простую форму. Если они эрмитовы или симметричны – их можно диагонализировать и в этом случае интегралы (1), (3), (4) вычисляются явно. Как будет показано ниже, единственность решения этих уравнений может нарушаться только при наличии у операторов G_t точек чисто мнимого спектра, совпадающих по mod $2k\pi$.

В общем случае можно воспользоваться жордановым представлением операторов G_t и соответствующим блочным представлением обкладок $e^{\pm sG_t}$, которое также позволяет явным образом вычислить интегралы и свести задачу к решению системы линейных уравнений размера $(\text{rank } G_t)^2$.

Обозначим через $J = J(\lambda_1, n_1, \dots, \lambda_K, n_K) \in \mathcal{M}(N)$ – жорданову матрицу, состоящую из K клеток J_α ранга n_α , $\sum_\alpha n_\alpha = N$. Известно, что $f(J_\alpha)$ вычисляется с помощью разложения f в ряд Тейлора:

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_\alpha \end{pmatrix},$$

$$f(J_\alpha) = \begin{pmatrix} f(\lambda_\alpha) & \frac{1}{1!} f^{(1)}(\lambda_\alpha) & \dots & \frac{1}{(n_\alpha - 1)!} f^{(n_\alpha - 1)}(\lambda_\alpha) \\ 0 & f(\lambda_\alpha) & \dots & \frac{1}{(n_\alpha - 2)!} f^{(n_\alpha - 2)}(\lambda_\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda_\alpha) \end{pmatrix}.$$

В частности, аналитическое выражение для экспоненты жордановой матрицы имеет вид

$$e^{sJ} = \begin{pmatrix} e^{sJ_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{sJ_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & e^{sJ_K} \end{pmatrix}, \quad e^{sJ_\alpha} = e^{s\lambda_\alpha} T_\alpha(s\lambda_\alpha),$$

$$T_\alpha(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & \frac{x^{k_\alpha - 1}}{(k_\alpha - 1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{x^{k_\alpha - 2}}{(k_\alpha - 2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

причем матричные элементы матрицы $T_\alpha(s)$ зависят от разности индексов и поэтому постоянны вдоль диагоналей.

Рассмотрим интеграл $X_J \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 (e^{sJ} X e^{-sJ}) ds$, в котором $(N \times N)$ -матрица $X = \{x_{ij}\}$ разбита по строкам и столбцам на K^2 прямоугольных блоков $X_{\alpha\beta}$, соответствующих размерам жордановых клеток T_α и T_β , где

$$X_{\alpha\beta} = \{x_{ij}\}, \quad N_\alpha \leq i \leq N_\alpha + n_\alpha, \quad N_\beta \leq j \leq N_\beta + n_\beta.$$

Обратимое преобразование $\{a, j; b, k\} \leftrightarrow \{a + (j - 1)N_\alpha, k + (b - 1)N_\alpha\}$ четверки индексов $a, b \in \{1, \dots, K\}$, $k, j \in \{1, \dots, N\}$ в пару $\{a + (j - 1)N_\alpha, k + (b - 1)N_\alpha\} \in \{1, \dots, KN\}^2$, будем называть преобразованием $\mathfrak{D}_{42} = (D4 \rightarrow D2)$. Оно состоит из двух преобразований $\mathfrak{D}_{21} = (D2 \leftrightarrow D1)$: $\{a, j\} \rightarrow m = a + (j - 1)N_\alpha$. При этом $m \rightarrow \{a = m \pmod{N_\alpha}, j = 1 + \text{целая часть дробы } m/N_\alpha\}$ является обратным преобразованием $\mathfrak{D}_{12} = (D1 \rightarrow D2)$.

Нетрудно видеть, что структура жордановых обкладок обеспечивает отображение каждого блока $X_{\alpha\beta}$ в аналогичный блок матрицы X_J . Поэтому записывая матрицы X и X_J как векторы $\vec{X} = \mathfrak{D}_{21}X$ и $\vec{X}_J = \mathfrak{D}_{21}X_J$, компоненты которых собираются последовательно из строк каждого $n_\alpha \times n_\beta$ блока так, чтобы матричные элементы, входящие в один блок, следовали один за другим, получаем матричное блочно-диагональное представление четырехиндексного отображения $M_J: \vec{X} \rightarrow \vec{X}_J$:

$$M_J \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 M_J(s) ds, \quad M_J(s): \mathfrak{D}_{21}(e^{sJ} X e^{-sJ}) = \mathfrak{D}_{42}(e^{sJ} \times e^{-sJ^T}) \mathfrak{D}_{21} X \stackrel{\text{def}}{=} M_J(s) \vec{X}. \quad (6)$$

Имеет место следующий замечательный факт.

ТЕОРЕМА 1. 1. *Имеем*

$$\det M_J(s) = 1, \quad \det M_J = \prod_{\alpha, \beta=1}^K \left(\frac{e^{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} - 1}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} \right)^{n_\alpha n_\beta}.$$

Более точно, матрицы $M_J(s)$ и M_J – верхние треугольные с диагоналями, содержащими по $n_\alpha n_\beta$ элементов $\{e^{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)s}\}$ и $\{(e^{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} - 1)/(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)\}$ соответственно.

2. *Решение уравнения $\int_0^1 (e^{sJ} X e^{-sJ}) ds = Y$ при условии*

$$\lambda_\alpha - \lambda_\beta \neq 0 \pmod{2\pi i} \quad (7)$$

сводится к обратимому преобразованию $\mathfrak{D}_{42} = (D4 \rightarrow D2)$ четырехиндексной матрицы $e^{sJ} \times e^{-sJ^T}$ в двухиндексную невырожденную треугольную матрицу M_J , обращению M_J и преобразованию $\mathfrak{D}_{21} = (D1 \rightarrow D2)$ вектора в матрицу

$$X = \mathfrak{D}_{12}(M_J^{-1}(\mathfrak{D}_{21}Y)). \quad (8)$$

3. *Если условие невырожденности (7) нарушено, то необходимым условием разрешимости уравнения $\int_0^1 (e^{sJ} X e^{-sJ}) ds = Y$ является равенство нулю тех блоков $n_\alpha \times n_\beta$ и $n_\beta \times n_\alpha$ матрицы Y , для которых $\lambda_\alpha - \lambda_\beta = 0 \pmod{2\pi i}$. В этом случае соответствующие блоки решения X могут быть выбраны произвольным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения теоремы о треугольном виде M_J была замечена в процессе аналитических вычислений на компьютере. Рассмотрим аналитическое доказательство теоремы.

Поскольку переход от четырехиндексного отображения к обычному матричному представлению блоки $X_{\alpha\beta}$ отображаются в блоки $(X_J)_{\alpha\beta}$ такого же размера, достаточно рассмотреть преобразование произвольного блока.

Из определения жордановых блоков имеем следующие равенства:

$$\int_0^1 (e^{sJ_\alpha} X_{\alpha\beta} e^{-sJ_\beta})_{kj} ds = \sum_{a=k}^{N_\alpha + n_\alpha} \sum_{b=N_\beta}^j \int_0^1 ds e^{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)s} \Lambda_{kj}^{ab}(s) x_{ab}, \quad (9)$$

$$\Lambda_{kj}^{ab}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (-1)^{j-b} \frac{s^{a-k}}{(a-k)!} \frac{s^{j-b}}{(j-b)!}, & N_\alpha \leq k \leq a \leq N_\alpha + n_\alpha, \quad N_\beta \leq b \leq j \leq N_\beta + n_\beta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

С помощью замены индексов $\{a, j; b, k\} \leftrightarrow \{a + (j-1)N_\alpha, k + (b-1)N_\alpha\}$ преобразуем четырехиндексную матрицу $\Lambda_{kj}^{ab}(s)$ в верхнюю треугольную:

$$M_{k+(b-1)N_\beta, a+(j-1)N_\beta}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{D}_{42} e^{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)s} \Lambda_{kj}^{ab}(s).$$

Из (10) следует, что в области $a + (j-1)N_\beta < k + (b-1)N_\beta$ матрица $M_{k+(b-1)N_\beta, a+(j-1)N_\beta}(s)$ равна нулю и $e^{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)s}$ на диагонали. Поэтому произведение диагональных элементов равно $e^{\sum_{\alpha, \beta=1}^K (\lambda_\alpha - \lambda_\beta)s} = 1$.

Для получения M_J нужно умножить каждый блок на интеграл по s от $e^{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)s} \Lambda_{kj}^{ab}(s)$, который равен $(e^{\lambda_\alpha - \lambda_\beta} - 1)/(\lambda_\alpha - \lambda_\beta)$ и встречается $n_\alpha n_\beta$ раз на диагонали.

Если выполнены условия второго утверждения теоремы, то треугольная матрица M_J обратима. Если $\lambda_\alpha - \lambda_\beta = 0 \pmod{2\pi i}$ и соответствующие блоки матрицы $(X_J)_{\alpha\beta}$ (правой части уравнения) должны также быть равны нулю, а элементы блока решения $X_{\alpha,\beta}$ можно задать произвольно.

Если семейство G_t имеет спектральные разложения, типичные для эрмитовых либо симметричных операторов, то в этом простейшем случае

$$G_t = \sum_n \lambda_n(t) \begin{cases} |\xi_n(t)\rangle \langle \xi_n(t)|, & \langle \xi_j, \xi_k \rangle = \delta_{jk}, \\ |\xi_n(t)\rangle (\xi_n(t)|, & (\xi_j, \xi_k) = \delta_{jk}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\lambda_n(t) \in \mathbb{C}$, $\langle \xi_j, \xi_k \rangle$ – полуторалинейное скалярное произведение, либо (ξ_j, ξ_k) – билинейная квадратичная форма (являющаяся скалярным произведением на множестве векторов с вещественными компонентами), а $\{\xi_n(t)\}$ – система векторов ортонормированная относительно соответствующей полуторалинейной либо квадратичной формы, то система (3) может быть разрешена относительно $\dot{G}_t$ и записана в виде системы операторных ОДУ, которую можно стандартными методами диагонализировать численно и в некоторых частных случаях – аналитически.

Предположим, что матрица G допускает диагонализацию с помощью обратимого преобразования $U: G \rightarrow G_U = UGU^{-1} = \{\lambda_k \delta_{kj}\}_{1 \leq j, k \leq K}$ и рассмотрим сравнительно простую конструкцию решения уравнения относительно матрицы X :

$$\int_0^1 ds e^{sG} X e^{-sG} = F. \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2. 1) Если оператор X является решением уравнения (12), то он также удовлетворяет уравнению

$$e^G X e^{-G} - X = [G, F]. \quad (13)$$

Если X – решение уравнения (12), то $X + \phi$ также является решением (13) с любой матрицей ϕ , коммутирующей с G .

2) Если оператор G допускает разложение (11) и матрица Λ ,

$$\Lambda_{jk} = \int_0^1 ds e^{s(\lambda_j - \lambda_k)} = \frac{e^{\lambda_j - \lambda_k} - 1}{\lambda_j - \lambda_k}, \quad (14)$$

не имеет нулевых элементов, то единственное решение уравнения (12) имеет вид

$$X = U^{-1}(V \circ F_U)U, \quad V_{jk} = \Lambda_{jk}^{-1}, \quad F_U \stackrel{\text{def}}{=} U F U^{-1}, \quad (15)$$

где $A \circ B$ – поэлементное произведение матриц (произведение Адамара), не зависящее от порядка сомножителей, сохраняющее эрмитовость, симметричность и положительную определенность сомножителей.

3) Если выполнены условия п.2, то уравнения (12) и (13) имеют общее решение (15), которое выделено условием равенства диагоналей матриц $X_U = U X U^{-1}$ и F_U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть X – решение (12). Из (12) следует уравнение (13):

$$\begin{aligned} e^G X e^{-G} - X &= \int_0^1 ds \frac{d}{ds} (e^{sG} X e^{-sG}) \\ &= G \int_0^1 ds e^{sG} X e^{-sG} - \int_0^1 ds e^{sG} X e^{-sG} G = GF - FG, \end{aligned}$$

обе части которого на меняются при сдвигах X на матрицу, коммутирующую с G .

2) Для дальнейшего анализа задачи удобно перейти к представлению $X \rightarrow X_U = UXU^{-1}$, в котором диагонализуются операторы $e^{\pm sG}$:

$$UFU^{-1} = F_U = \int_0^1 ds e^{s\lambda} X_U e^{-s\lambda} = X_U \circ \int_0^1 ds E(s), \quad E_{jk}(s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{s(\lambda_j - \lambda_k)},$$

где $e^{s\lambda}$ – диагональная матрица с диагональными элементами $e^{s\lambda_k}$ и $E(s)$ – матрица ранга 1 с элементами $E_{jk}(s)$. Зависимость от s каждого элемента матрицы $E(s)$ явно задана, поэтому после интегрирования с учетом (14) получаем равенство $(F_U)_{jk} = (X_U)_{jk} \Lambda_{jk}$. Отсюда следует (15).

Решение (15) можно получить путем диагонализации тождества

$$UFU^{-1} = F_U = \int_0^1 ds e^{s\lambda} X_U e^{-s\lambda} = X_U \circ \int_0^1 ds E(s), \quad E_{jk}(s) \stackrel{\text{def}}{=} e^{s(\lambda_j - \lambda_k)}, \quad (16)$$

Поскольку $E_{jj}(s) = \Lambda_{jj} = V_{jj} = 1$, диагональные элементы F_U и X_U совпадают.

Доказательство сходных утверждений можно найти в [4], где также использовалось коммутативное поэлементное произведение Адамара $A \circ B$ матриц A и B .

3) В представлении, диагонализующем G , уравнение (13) имеет вид

$$(X_U)_{jk}(e^{\lambda_j - \lambda_k} - 1) = (F_U)_{jk}(\lambda_j - \lambda_k),$$

причем сдвиг X_U на любую диагональную матрицу не нарушает равенство. В этом же представлении обращаем обкладку U , U^{-1} и получаем требуемый результат:

$$(X_U)_{jk} = (F_U)_{jk} \frac{\lambda_j - \lambda_k}{e^{\lambda_j - \lambda_k} - 1} = (F_U)_{jk} V_{jk}, \quad X = U^{-1}(V \circ F_U)U.$$

который совпадает с (15) и обеспечивает равенство диагоналей F_U и X_U . Таким образом, если выполнены условия п. 2, то уравнение (12) эквивалентно задаче (13) с “краевым” условием $\text{diag}(F - X)_U = 0$.

С точки зрения численной реализации, формула (15) или уравнение (13) с “краевым” условием для X проще уравнения (3), так как они не требуют вычисления операторозначных интегралов и решения нелинейных ОДУ неразрешенных относительно производной и позволяют записать решение задачи (3) в виде

$$G_t = G_0 + \int_0^t d\tau U^{-1}(\tau)(V(\tau) \circ F_U(\tau))U(\tau),$$

$$\Lambda(\tau) = U(\tau) \frac{e^{\lambda_j(\tau) - \lambda_k(\tau)} - 1}{\lambda_j(\tau) - \lambda_k(\tau)} U^{-1}(\tau), \quad F_U(\tau) = U(\tau)F(\tau)U^{-1}(\tau), \quad V_{jk}(\tau) = \Lambda_{jk}^{-1}(\tau),$$

где $\Lambda(\tau)$ – диагональная матрица, а $U(\tau)$ – соответствующее диагонализующее преобразование, а V – матрица, состоящая из элементов Λ_{jk}^{-1} .

Матрицы Λ и V в (15) корректно определены при любых значениях $\{\lambda_k\}$ в случае вещественного спектра. Однако, если нарушается предположение $\Lambda_{jk} \neq 0$, т.е. если

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{(j,k)} \{(j,k) : \lambda_j \neq \lambda_k, \lambda_j - \lambda_k = 0 \pmod{2\pi i}\} \neq \emptyset,$$

где $\{\lambda_j\}$ – спектр оператора G_U , то необходимое условие разрешимости уравнения

$$\int_0^1 ds e^{sG} X e^{-sG} = F \quad (17)$$

состоит в том, что $F_U|_{\mathcal{K}} = 0$. При этом значения X_U в точках $\mathcal{K}$ могут быть заданы произвольным образом, так что их выбор имеет смысл задания граничного условия. Ограничения на $F_U|_{\mathcal{K}}$ зависят как от F , так и от G и поэтому могут характеризовать либо

класс корректности правых частей F , либо допустимое множество матриц G , играющих роль начального условия, определяющего последующие значения пар $\{\dot{G}_t, G_{t+\Delta t}\}$. Оба условия легко сформулировать в исходном базисе в терминах билинейных форм матриц F и G .

Будем говорить, что задача (17) имеет *тривиальную* границу, если $\mathcal{K} = \emptyset$, и что она *корректна*, если $F_U|_{\mathcal{K}} = 0$. Если граница нетривиальна, но задача поставлена корректно, то ее *минимальным решением* будем называть матрицу $X^{\min}$, удовлетворяющую уравнению (17) и граничному условию $X_U|_{\mathcal{K}} = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Общее решение задачи (17) можно представить в виде*

$$X = X^{\min} + \sum_{(j,k) \in \mathcal{K}} c_{jk} U^{-1} E_{jk} U, \quad (18)$$

где c_{jk} – произвольные константы, а E_{jk} – матрица с единственным ненулевым элементом в k -м столбце и j -й строке, равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что $\int_0^1 ds e^{sG} X^{\min} e^{-sG} = F$ в силу (15). Заметим, что

$$\Lambda_{jk} E_{jk} = \frac{e^{\lambda_j - \lambda_k} - 1}{\lambda_j - \lambda_k} E_{jk} \equiv 0$$

для любых j, k потому, что либо $E_{jk} = 0$, либо $e^{\lambda_j - \lambda_k} = 1$ при $\lambda_j \neq \lambda_k$. Следовательно, действие операторных обкладок U , U^{-1} не изменяет правую часть этого равенства. Поэтому $\int_0^1 e^{s\lambda} E_{jk} e^{-s\lambda} ds \equiv 0$ и

$$0 \equiv \int_0^1 U e^{s\lambda} E_{jk} e^{-s\lambda} U^{-1} ds = \sum_{j,k} \int_0^1 e^{sG} U E_{jk} U^{-1} e^{-sG} ds = \int_0^1 e^{sG} (X - X^{\min}) e^{-sG} ds.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* (2), **84**:1 (1951), 108–128. [2] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.*, **8**:4 (1967), 962–982. [3] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991. [4] I. Najfeld, T. F. Havel, *Adv. Appl. Math.*, **16**:3 (1995), 321–375.

А. М. Чеботарев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: chebotarev@phys.msu.ru

Поступило

24.05.2012

А. Е. Теретенков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: taemu@mail.ru