Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Ярмухаметов, Гигантская и мелкие компоненты
в случайных дистанционных графах специального вида,
Матем. заметки, 2012, том 92, выпуск 6, 949–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:36:27

Гигантская и мелкие компоненты в случайных дистанционных графах специального вида

А. Р. Ярмухаметов

1. Постановка задачи и формулировка результата

В работе [1] была доказана теорема о существовании гигантской компоненты в случайном дистанционном графе при вероятности ребра $p = c/N$, где $c > 1$. При этом также утверждалось, что “все остальные вершины содержатся в компонентах размера $o(N)$ ”. В данной работе удалось показать, что “все остальные вершины содержатся в компонентах размера $O(\ln N)$ ”. Этот результат является существенным продвижением, поскольку именно он является аналогом теоремы Эрдеша–Реньи для классической модели (см. [2]).

В данной работе рассматривается задача о пороговой вероятности существования гигантской компоненты для некоторой серии случайных дистанционных графов специального вида.

Положим $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$, $N = C_n^{n/2}$ и рассмотрим *полный дистанционный граф* $\mathcal{G}_N = (\mathcal{V}_N, \mathcal{E}_N)$, у которого

$$\mathcal{V}_N = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\}, x_1 + \dots + x_n = 2k = \frac{n}{2} \right\},$$

$$\mathcal{E}_N = \left\{ \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathcal{V}_N \times \mathcal{V}_N : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = k = \frac{n}{4} \right\}.$$

Таким образом, вершины полного дистанционного графа являются точками из $\{0, 1\}^n$ и этих вершин ровно N . При этом ребра графа $\mathcal{G}_N$ суть пары его вершин, удаленных друг от друга на расстояние $\sqrt{n/2}$. Именно этим и обусловлено название графа.

Определим вероятностное пространство – *пространство случайных дистанционных графов* –

$$\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p) = (\Omega_N^{\text{dist}}, \mathcal{F}_N^{\text{dist}}, \mathcal{P}_{N,p}^{\text{dist}}),$$

где Ω_N^{dist} – множество всех остовных подграфов $G = (\mathcal{V}_N, E)$ полного дистанционного графа $\mathcal{G}_N$, $\mathcal{F}_N^{\text{dist}} = 2^{\Omega_N^{\text{dist}}}$,

$$\mathcal{P}_{N,p}^{\text{dist}}(G) = p^{|E|} (1-p)^{|\mathcal{E}_N| - |E|}, \quad p \in (0, 1).$$

С одной стороны, рассмотрение графов, подобных полному дистанционному графу, глубоко мотивировано задачами комбинаторной геометрии (см. [3]–[5]). С другой стороны, данная модель является обобщением классической модели случайного графа Эрдеша–Реньи (см. [2], [6]–[9]).

Будем говорить, что случайный граф обладает некоторым свойством *асимптотически почти наверное* (кратко а.п.н.), если вероятностная мера множества графов, обладающих этим свойством, стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$. Отметим, что вероятность ребра p есть, вообще говоря, функция от N .

Заметим, что граф $\mathcal{G}_N$ регулярный. Обозначим через N_1 степень каждой из его вершин. В соответствии с формулой Стирлинга

$$N_1 = (C_{n/2}^{n/4})^2 = \frac{2\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \cdot (1 + o(1)).$$

Сформулируем теорему о существовании гигантской компоненты в случайном дистанционном графе.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p_* = 1/N_1$. Тогда выполнены следующие утверждения:

- а) если $c > 1$ и при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p = cr_*$, то случайный граф а.п.н. содержит “гигантскую компоненту” размера

$$N(1 - t_c)(1 + o(1)), \quad \text{где} \quad t_c = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} (ce^{-c})^k;$$

при этом все остальные вершины содержатся в компонентах размера $O(\ln N)$;

- б) если $c < 1$ и при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p = cr_*$, то случайный граф а.п.н. состоит из компонент, количество вершин в каждой из которых равно $O(\ln N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для величины t_c верны следующие соотношения:

$$t_c = 1 \quad \text{при} \quad c < 1, \quad t_c < 1 \quad \text{при} \quad c > 1.$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в [2].

Пункт б) теоремы доказан в [10]. Доказательству пункта а) теоремы 1 будет посвящен раздел 2.

2. Схема доказательства пункта а) теоремы 1

2.1. Формулировки вспомогательных утверждений и лемм. Пусть $T_{k,N}$ – число различных k -вершинных деревьев в полном дистанционном графе $\mathcal{G}_N$. Следующее утверждение является уточнением части 2 утверждения 1 из [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $1 \leq k \leq N$. Тогда имеет место неравенство

$$T_{k,N} \leq N \cdot N_1^{k-1} \cdot \frac{k^{k-2}}{k!}.$$

Пусть случайная величина $U_{N,k}$ обозначает количество компонент связности размера k , $k \geq 2$, в случайном графе в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$. Пусть случайная величина $U_N(h)$ есть количество вершин в связных компонентах, размеры которых больше, чем $h \ln N$, и не превышают $N_1^{0,9}$. Иными словами,

$$U_N(h) = \sum_{k=[h \ln N]+1}^{[N_1^{0,9}]} k U_{N,k}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть $c \neq 1$ и $\delta(N)$ – произвольная функция такая, что $\delta(N) = O(N^{-1/3})$. Пусть при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p = c(1 + \delta(N))/N_1$. Тогда для $q = (ce^{-(c-1)})^{1/2}$ при $h_0 = -1/\ln q$ а.п.н. $U_N(h_0) = 0$.

Заметим, что утверждение 2 является уточнением утверждения 5 из [1].

Обозначим через $Y_{k,N}$, $3 \leq k \leq [h_0 \ln N]$, число различных k -вершинных компонент связности, не являющихся деревьями, в случайном графе G в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$. Обозначим также через Z_N число вершин, содержащихся в таких компонентах, т.е.

$$Z_N = \sum_{k=3}^{[h_0 \ln N]} k Y_{k,N}.$$

Имеет место следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $c \neq 1$ и $\delta(N)$ – произвольная функция такая, что $\delta(N) = O(N^{-1/3})$. Пусть при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p = c(1 + \delta(N))/N_1$. Тогда а.п.н. выполнено соотношение $Z_N = o(\ln N)$.

Утверждение 3 является уточнением утверждения 2 из [1].

Пусть случайная величина $X_{N,k}$ обозначает количество древесных компонент размера k , $k \geq 1$, в случайном графе в пространстве $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$. Пусть случайная величина X_N есть количество вершин в древесных компонентах, размеры которых не превышают $h_0 \ln N$, т.е.

$$X_N = \sum_{k=1}^{\lfloor h_0 \ln N \rfloor} k X_{N,k}.$$

Следующее утверждение является уточнением утверждения 3 из [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $c \neq 1$ и $\delta(N)$ – произвольная функция такая, что $\delta(N) = O(N^{-1/3})$. Пусть при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p = c(1 + \delta(N))/N_1$. Тогда имеет место равенство

$$EX_N = Nt_c + O(N^{0,8}).$$

Следующее утверждение является уточнением утверждения 4 из [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $c \neq 1$ и $\delta(N)$ – произвольная функция такая, что $\delta(N) = O(N^{-1/3})$. Пусть при всех $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $p = c(1 + \delta(N))/N_1$. Тогда имеет место равенство

$$X_N = Nt_c + O(N^{0,8}).$$

2.2. Завершение доказательства пункта а) теоремы 1. Проведем следующий трюк. Случайный выбор ребер при построении графов из пространства $\mathcal{G}^{\text{dist}}(N, p)$ с вероятностью $p = c/N_1$ (где $c > 1$) проведем в два этапа. Положим

$$p_2 = \frac{1}{N_1^{4/3}}, \quad p_1 = \frac{p - p_2}{1 - p_2}.$$

Заметим, что выполнены соотношения $p = p_1 + (1 - p_1)p_2$ и $p_1 = c(1 + O(N^{-1/3}))/N_1$, а начиная с некоторого N , выполнено неравенство $p_1 < p$. На первом этапе ребра дистанционного графа выбираем с вероятностью p_1 , а затем те ребра, которые не были выбраны на первом этапе, выбираем с вероятностью p_2 .

Проанализируем, что получается после первого этапа.

Из утверждений 3 и 5 мы знаем, что количество вершин графа в компонентах, размеры которых не превышают $h_0 \ln N$ (где $h_0 = h_0(c)$), а.п.н. равняется

$$Nt_c + O(N^{0,8}).$$

Следовательно, в соответствии с утверждением 2, $N(1 - t_c) + O(N^{0,8})$ вершин содержатся в компонентах, размеры которых превышают $[N_1^{0,9}]$. Если эти вершины содержатся в одной компоненте, то, очевидно, они останутся в одной компоненте и после второго этапа. Предположим, что эти вершины содержатся в разных компонентах. Назовем такие компоненты *плохими компонентами*.

Докажем, что в таком случае после второго этапа между двумя любыми плохими компонентами будет существовать путь из ребер. Для этого рассмотрим две произвольные плохие компоненты (обозначим их φ и χ). Оценим сверху вероятность того, что между этими компонентами после второго этапа не существует пути.

Пусть $|\varphi| = M$, $|\chi| = K$.

Как было доказано в утверждении 2 из [10], число общих соседних вершин для двух любых различных вершин графа $\mathcal{G}_N$ при достаточно больших N не меньше, чем

$$N_2 = 10^{-4} \frac{N}{\ln N}.$$

Обозначим через $\omega_{A,B}$ множество общих соседних вершин для вершин A и B , где $A \in \varphi$, $B \in \chi$. Пусть также

$$\Omega = \bigcup_{A \in \varphi, B \in \chi} \omega_{A,B}.$$

Пусть $\Omega = \{A_1, \dots, A_s\}$. Пусть, наконец, $A_1, \dots, A_h \in \varphi$, $A_{h+1}, \dots, A_g \in \chi$, $A_{g+1}, \dots, A_s \notin \varphi \cup \chi$.

Для каждой вершины $A_i \in \Omega$ введем α_i и β_i , обозначающие количество ребер, связывающих вершину A_i с вершинами множеств φ и χ соответственно. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i \beta_i \geqslant MKN_2.$$

Тогда имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\sum_{i=1}^g \alpha_i \beta_i \geqslant \frac{MKN_2}{2} \quad (1)$$

или

$$\sum_{i=g+1}^s \alpha_i \beta_i \geqslant \frac{MKN_2}{2}. \quad (2)$$

Если имеет место (1), то либо $\sum_{i=1}^h \alpha_i \beta_i \geqslant MKN_2/4$, в таком случае

$$\sum_{i=1}^h \beta_i \geqslant \frac{KN_2}{4},$$

либо $\sum_{i=h+1}^g \alpha_i \beta_i \geqslant MKN_2/4$, в таком случае

$$\sum_{i=h+1}^g \alpha_i \geqslant \frac{MN_2}{4}.$$

Таким образом, при достаточно больших N количество ребер между вершинами множеств φ и χ оценивается следующим образом:

$$\text{edge}(\varphi, \chi) \geqslant \min(M, K) \frac{N_2}{4} \geqslant N^{1,8}.$$

Значит, вероятность того, что компоненты φ и χ останутся несвязными после второго этапа, — это

$$p_1(\varphi, \chi) \leqslant (1 - p_2)^{\text{edge}(\varphi, \chi)} \leqslant \exp(-N^{0,4}).$$

Пусть теперь имеет место (2). Оценим вероятность того, что компоненты φ и χ останутся несвязными после второго этапа следующим образом:

$$p_2(\varphi, \chi) \leqslant \prod_{i=g+1}^s ((1 - p_2)^{\alpha_i} + (1 - p_2)^{\beta_i} - (1 - p_2)^{\alpha_i + \beta_i}).$$

Так как для любого i выполнено $(\alpha_i + \beta_i) \leqslant N_1$, а $p_2 < 1/N_1$, то $(\alpha_i + \beta_i)p_2 < 1$. Значит, можно воспользоваться утверждением 6 из [1]. Следовательно,

$$\begin{aligned} p_2(\varphi, \chi) &\leqslant \prod_{i=g+1}^s (1 - p_2^2)^{\alpha_i \beta_i / 3} = (1 - p_2^2)^{\sum_{i=g+1}^s \alpha_i \beta_i / 3} \\ &\leqslant (1 - p_2^2)^{MKN_2/6} \leqslant (1 - 1/N_1^{8/3})^{N^{2,78}} \leqslant \exp(-N^{0,1}). \end{aligned}$$

Общее количество плохих компонент при достаточно больших N не больше, чем $N/N_1^{0,9} \leqslant N^{0,2}$. Следовательно, вероятность того, что после второго этапа останется пара компонент, между которыми нет пути, оценивается так:

$$p(2) \leqslant N^{0,4} \exp(-N^{0,1}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, доказано, что после второго этапа по меньшей мере $N(1 - t_c) + O(N^{0,8})$ вершин содержатся в одной компоненте, назовем ее *гигантской компонентой*. Кроме того, из утверждений 2, 4 и 5 имеем, что $Nt_c + O(N^{0,8})$ вершин содержатся в компонентах, размеры которых не превышают $h_0 \ln N$. Обозначим размер самой крупной, после гигантской, компоненты через D . Из вышесказанного следует, что $D \leq O(N^{0,8})$. Следовательно, в соответствии с утверждением 2, $D = O(\ln N)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Р. Ярмухаметов, *Матем. заметки*, **92:3** (2012), 463–480. [2] В. Bollobás, *Random Graphs*, Acad. Press, New York, 1985. [3] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007. [4] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146. [5] А. М. Райгородский, *Модели случайных графов*, МЦНМО, М., 2011. [6] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007. [7] P. Erdős, A. Rényi, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959), 290–297. [8] P. Erdős, A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, **5** (1960), 17–61. [9] P. Erdős, A. Rényi, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **12** (1961), 261–267. [10] А. Р. Ярмухаметов, “О связности случайных дистанционных графов специального вида”, *Чебышевский сб.*, **10:1**(29) (2009), 95–108.

А. Р. Ярмухаметов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ayarmuhametov@yandex.ru

Поступило

29.12.2011