Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Баштанов, Типичное перемешивание имеет ранг 1,
Матем. заметки, 2013, том 93, выпуск 2, 163–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:39:58

Типичное перемешивание имеет ранг 1

А. И. Баштанов

Полная метрика на множестве перемешивающих преобразованиях, задающая поводок-топологию, введена С. В. Тихоновым в 2007 г. Тихонов ставит вопрос: каким должно быть перемешивающее преобразование T , чтобы его класс сопряженности был плотен в пространстве перемешиваний, снабженном поводок-топологией? В статье будет показано, что это верно для любого перемешивающего T . В качестве следствия из этого факта мы получим, что типичное перемешивание имеет ранг 1.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10157

1. Плотность классов сопряженности

Необходимые сведения. Сохраняющее меру обратимое преобразование T , действующее на вероятностном пространстве Лебега¹ (X, Σ, μ) , называется *перемешивающим*, если для любых измеримых множеств A, B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Пусть $\{A_i\}$ – счетный набор множеств, порождающий σ -алгебру Σ . Каждая из метрик

$$d(T, S) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} (\mu(TA_i \triangle SA_i) + \mu(T^{-1}A_i \triangle S^{-1}A_i)),$$
$$a(T, S) = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{i+j}} |\mu(TA_i \cap A_j) - \mu(SA_i \cap A_j)|$$

порождает в пространстве $\mathcal{M}$ перемешивающих преобразований слабую топологию.

Ни одна из этих метрик не является полной на $\mathcal{M}$. Чтобы в $\mathcal{M}$ ввести структуру полного сепарабельного метрического пространства, Тихонов ввел в работе [1] метрику

$$\tau(T, S) = d(T, S) + \sup_{i \in \mathbb{Z}} a(T^n, S^n).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-5998.2012.1).

¹Вероятностное пространство Лебега – это пространство с вероятностной мерой, изоморфное mod 0 отрезку $[0, 1]$ с лебеговской мерой. Преобразования и другие соотношения множеств будем рассматривать с точностью до меры 0.

Эта метрика порождает другую топологию, называемую *поводок-топологией*. В качестве базы поводок-топологии можно взять семейство окрестностей вида

$$\mathcal{U}(T, q, \varepsilon) = \{S \in \mathcal{M} \mid \forall n \in \mathbb{Z} \forall A, B \in q \mid |\mu(T^n A \cap B) - \mu(S^n A \cap B)| < \varepsilon\}.$$

Каждая окрестность задается центром T , конечным набором множеств q и числом ε .

В пространстве $\mathcal{M}$, снабженном метрикой $\tau(T, S)$, можно использовать так называемые соображения типичности. Говорят, что подмножество метрического пространства имеет *тип* G_δ , если его можно представить в виде счетного пересечения открытых множеств. Множество, содержащее всюду плотное подмножество типа G_δ , называется *остаточным*. Если множество преобразований, обладающих некоторым свойством, остаточное, то это свойство называют *типичным*. Термин “типичный” оправдывает себя следующими фактами: пересечение счетного числа остаточных множеств – остаточное, надмножество остаточного множества – остаточное.

Основным результатом работы является

ТЕОРЕМА 1. *Класс сопряженности любого перемешивающего преобразования S плотен в $\mathcal{M}$.*

Преобразование Бернулли с энтропией 1. Определим *преобразование Бернулли с энтропией*² 1. Фазовым пространством X будет прямое произведение счетного числа копий пространства $\{0, 1\}$:

$$X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \quad \mu(\{0\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}.$$

Оно является вероятностным пространством Лебега. Элементами пространства являются бесконечные в обе стороны последовательности нулей и единиц, а преобразование действует на них сдвигом вправо. Точки пространства будем записывать в виде

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Множества $\{x \in X \mid x_0 = 0\}$ и $\{x \in X \mid x_0 = 1\}$ обозначим D_0 и D_1 соответственно, а разбиение $X = D_0 \sqcup D_1$ – через ξ . Это разбиение образующее: пересечение его образов

$$\bigvee_{i \in \mathbb{Z}} T^i \xi$$

есть разбиение на точки. Из этого следует, что любое измеримое множество $C \subset X$ можно приблизить множествами $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где C_k измеримо относительно

$$\bigvee_{|i| \leq k} T^i \xi.$$

Как показал Тихонов в работе [2], бернуллиевские преобразования с энтропией 1 всюду плотны в $\mathcal{M}$. Это следует из более общего утверждения Тихонова: преобразования, сопряженные любому декартовому произведению плотны в $\mathcal{M}$. Бернуллиевское преобразование всегда является декартовым произведением других бернуллиевских преобразований с меньшей энтропией.

²Для удобства мы используем двоичную энтропию. Если пользоваться натуральным логарифмом, энтропия этого преобразования будет равна $\ln 2$.

Таким образом, чтобы класс сопряженности любого перемешивающего преобразования был плотен в $\mathcal{M}$, достаточно показать, что в любой окрестности любого преобразования Бернулли с энтропией 1 есть элемент этого класса сопряженности.

Переходы к меньшим окрестностям. Зафиксируем T – преобразование Бернулли с энтропией 1, и его окрестность $\mathcal{U}(T, q, \varepsilon)$. Множества из набора q обозначим $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для каждого A_j рассмотрим его приближение $\tilde{A}_j$ с точностью до $\varepsilon/5$, измеримое относительно некоторого конечного пересечения

$$\bigvee_{|i| \leq k_j} T^i \xi.$$

Набор $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n\}$ обозначим через $\tilde{q}$, а максимальное из k_j – через k . Каждое $\tilde{A}_i$ измеримо относительно

$$\bigvee_{|i| \leq k} T^i \xi,$$

и для каждого j множества A_j и $\tilde{A}_j$ близки: $\mu(\tilde{A}_j \triangle A_j) < \varepsilon/5$.

Покажем, что

$$\mathcal{U}\left(T, \tilde{q}, \frac{\varepsilon}{5}\right) \subset \mathcal{U}(T, q, \varepsilon).$$

Действительно, если $P \in \mathcal{U}(T, \tilde{q}, \varepsilon/5)$, то для любых r, s и m

$$|\mu(P^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s) - \mu(T^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Из этого следует, что для любых r, s и m

$$\begin{aligned} & |\mu(P^m A_r \cap A_s) - \mu(T^m A_r \cap A_s)| \\ & \leq |\mu(P^m A_r \cap A_s) - \mu(P^m \tilde{A}_r \cap A_s)| + |\mu(P^m \tilde{A}_r \cap A_s) - \mu(P^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s)| \\ & \quad + |\mu(P^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s) - \mu(T^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s)| \\ & \quad + |\mu(T^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s) - \mu(T^m \tilde{A}_r \cap A_s)| + |\mu(T^m \tilde{A}_r \cap A_s) - \mu(T^m A_r \cap A_s)| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon, \end{aligned} \tag{1}$$

т.е. $P \in \mathcal{U}(T, q, \varepsilon)$.

Рассмотрим теперь набор множеств $\hat{q}$, состоящий из всех атомов разбиения

$$\bigvee_{|i| \leq k} T^i \xi.$$

Каждый атом имеет вид

$$B_{(b_{-k}, b_{-k+1}, \dots, b_k)} = \bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{b_i} = \{x \in X \mid (x_{-k} = b_{-k}, x_{-k+1} = b_{-k+1}, \dots, x_k = b_k)\}.$$

Покажем, что

$$\mathcal{U}\left(T, \hat{q}, \frac{\varepsilon}{5 \cdot 2^{4k+2}}\right) \subset \mathcal{U}\left(T, \tilde{q}, \frac{\varepsilon}{5}\right).$$

Действительно, пусть $P \in \mathcal{U}(T, \hat{q}, \varepsilon/(5 \cdot 2^{4k+2}))$, т.е. для всех u, v и m

$$|\mu(P^m B_u \cap B_v) - \mu(T^m B_u \cap B_v)| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot 2^{4k+2}}.$$

Здесь u и v – любые последовательности длины $2k+1$, состоящие из нулей и единиц. Для того чтобы оценить разность $|\mu(P^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s) - \mu(T^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s)|$, заметим, что $\tilde{A}_r$ складывается из нескольких $C_{u_1}, C_{u_2}, \dots \in \hat{q}$, при этом количество этих составляющих не превосходит 2^{2k+1} . Аналогичным образом разложим $\tilde{A}_s$ на несколько $C_{v_1}, C_{v_2}, \dots \in \hat{q}$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mu(P^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s) - \mu(T^m \tilde{A}_r \cap \tilde{A}_s)| &= \left| \sum_{l,w} \mu(P^m C_{u_l} \cap C_{v_w}) - \sum_{l,w} \mu(T^m C_{u_l} \cap C_{v_w}) \right| \\ &\leq \sum_{l,w} |\mu(P^m C_{u_l} \cap C_{v_w}) - \mu(T^m C_{u_l} \cap C_{v_w})| \\ &< \sum_{l,w} \frac{\varepsilon}{5 \cdot 2^{4k+2}} \leq 2^{2k+1} \cdot 2^{2k+1} \cdot \frac{\varepsilon}{5 \cdot 2^{4k+2}} \leq \frac{\varepsilon}{5}. \quad (2) \end{aligned}$$

Почти независимость образов. Напомним, S – произвольное перемешивание. Пусть S действует на вероятностном пространстве Лебега Y . Покажем, что в окрестности $\mathcal{U}(T, \hat{q}, \varepsilon/(5 \cdot 2^{4k+2}))$ найдется преобразование V , действующее на X и сопряженное S . Согласно [3] для любого $\delta > 0$ существует такое подмножество $A \subset Y$ меры $1/2$, что множества $T^m A$, $m \in \mathbb{Z}$, являются δ -независимыми в совокупности. Условие δ -независимости множеств $E_1, E_2, \dots$ означает, что мера любого конечного пересечения вида

$$E_{m_1} \cap E_{m_2} \cap \dots \cap E_{m_p} \quad (3)$$

отличается от

$$\prod_{i=1}^p \mu(E_{m_i})$$

не более чем на δ в предположении, что m_i попарно различны. Построение такого множества в работе [3] происходит с помощью метода, предложенного Рыжиковым в [4]: строится аппроксимирующая последовательность крепостей, в достаточно большой крепости случайно независимо выбираются элементы, включающиеся в искомое множество. С ненулевой вероятностью полученное множество удовлетворяет запрашиваемым требованиям.

Будем говорить, что множества $E_1, E_2, \dots \subset Y$ *вполне δ -независимы в совокупности*, если мера любого конечного пересечения вида

$$E_{m_1} \cap E_{m_2} \cap \dots \cap E_{m_{p_0}} \cap (Y \setminus E_{n_1}) \cap (Y \setminus E_{n_2}) \cap \dots \cap (Y \setminus E_{n_{p_1}}) \quad (4)$$

отличается от

$$\prod_{i=1}^{p_0} \mu(E_{m_i}) \prod_{i=1}^{p_1} \mu(Y \setminus E_{n_i})$$

не более чем на δ , если среди m_i и n_i нет одинаковых чисел. Несложно показать, что если семейство множеств δ -независимо, то любое его подсемейство конечной мощности s будет вполне $s\delta$ -независимым. Это вытекает из того факта, что пересечение

вида (4) длины s можно выразить через s пересечений вида (3) с помощью операций дизъюнктивного объединения и разности. Заметим, что методами работ [4], [3] можно непосредственно доказать полную δ -независимость всех образов множества A .

Построение сопряженного преобразования. Возьмем

$$\delta = \frac{1}{4k+2} \cdot \frac{\varepsilon}{15 \cdot 2^{4k+2}}.$$

Тогда любые $4k+2$ образа множества A будут вполне $(\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2}))$ -независимы. Обозначим A через F_0 , $X \setminus A$ – через F_1 , а разбиение $Y = F_0 \sqcup F_1$ обозначим через η . Рассмотрим атомы разбиения

$$\eta_k = \bigvee_{|i| \leq k} T^i \eta.$$

Мера каждого из них отличается от $1/2^{2k+1}$ не более чем на $\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2})$. В X есть разбиение

$$\xi_k = \bigvee_{|i| \leq k} T^i \xi,$$

для которого мера каждого атома равна в точности $1/2^{2k+1}$. Искомое преобразование – $V = Q^{-1}SQ$, где $Q: X \rightarrow Y$ – произвольное сохраняющее меру обратимое преобразование, переводящее атомы разбиения ξ_k в соответствующие им атомы η_k с точностью до меры $\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2})$ для каждого из атомов.

Оценки для построенного преобразования. Докажем, что преобразование V лежит в окрестности $\mathcal{U}(T, \hat{q}, \varepsilon/(5 \cdot 2^{4k+2}))$. Для этого для любых u, v и m должно выполняться условие

$$|\mu(V^m B_u \cap B_v) - \mu(T^m B_u \cap B_v)| < \frac{\varepsilon}{5 \cdot 2^{4k+2}}.$$

Представим B_u и B_v в виде

$$B_u = \bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{u_i}, \quad B_v = \bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i}.$$

Тогда $T^m B_u \cap B_v$ и $V^m B_u \cap B_v$ будут иметь вид

$$\left(\bigcap_{|i| \leq k} T^{i+m} D_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \quad \text{и} \quad \left(\bigcap_{|i| \leq k} V^m T^i D_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right)$$

соответственно. Оценим разность мер:

$$\begin{aligned} & \left| \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} T^{i+m} D_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \right) - \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} V^m T^i D_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \right) \right| \\ & \leq \left| \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} T^{i+m} D_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \right) - \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} S^{i+m} F_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{v_i} \right) \right) \right| \\ & \quad + \left| \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} S^{i+m} F_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{v_i} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} V^m \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{u_i} \right) \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \right) \right|. \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое. Слева стоит некоторое пересечение D_0, D_1 и их образов под действием степеней T , всего пересекаются не более $4k + 2$ множеств. Они независимы в совокупности, или, что то же самое, вполне 0-независимы в совокупности. Справа – аналогичное пересечение F_0, F_1 и их образов под действием степеней S . Они вполне $(\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2}))$ -независимы в совокупности. Значит, разность левой и правой части по модулю не превосходит $\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2})$. Может так случиться, что слева некоторые множества совпадают. В этом случае совпадают и соответствующие множества справа, поэтому с обеих сторон будут стоять пересечения меньшего количества различных множеств. Также слева может оказаться пересечение вида

$$\dots \cap T^z D_0 \cap \dots \cap T^z D_1 \cap \dots$$

Тогда и справа будет аналогичное пересечение

$$\dots \cap S^z F_0 \cap \dots \cap S^z F_1 \cap \dots$$

В этом случае и слева и справа стоит 0.

Оценим теперь второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \left| \mu \left(\left(\bigcap_{|i| \leq k} S^{i+m} F_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{v_i} \right) \right) - \mu \left(V^m \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \right) \right| \\ &= \left| \mu \left(S^m \left(\bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{u_i} \right) \cap \left(\bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{v_i} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. - \mu \left(S^m Q \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{u_i} \right) \cap Q \left(\bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i} \right) \right) \right|. \end{aligned} \quad (5)$$

Каждое из множеств

$$\bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{u_i} \quad \text{и} \quad \bigcap_{|i| \leq k} S^i F_{v_i}$$

в левой части отличаются от соответствующего ему множества

$$Q \bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{u_i} \quad \text{или} \quad Q \bigcap_{|i| \leq k} T^i D_{v_i}$$

в правой на множество меры не более $\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2})$. Следовательно, левая часть отличается от правой не более чем на $2\varepsilon/(15 \cdot 2^{4k+2})$.

Сумма модулей не превосходит

$$\frac{\varepsilon}{15 \cdot 2^{4k+2}} + \frac{2\varepsilon}{15 \cdot 2^{4k+2}} = \frac{\varepsilon}{5 \cdot 2^{4k+2}},$$

что и требовалось.

Мы построили преобразование V , сопряженное S и лежащее в $\mathcal{U}(T, \hat{q}, \varepsilon/(5 \cdot 2^{4k+2}))$, а следовательно, и в $\mathcal{U}(T, q, \varepsilon)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Метрика Тихонова не только дала возможность изучать типичные свойства перемешиваний, но и сыграла важную роль при решении проблемы Рохлина о существовании перемешивающих преобразований однородного спектра заданной кратности (см. [5]). Свойство плотности классов сопряженности позволяет несколько упростить доказательство существования таких преобразований.

2. Типичность ранга 1

Необходимые сведения. Пусть преобразование T действует на пространстве (X, Σ, μ) . Башней Рохлина–Халмоша высоты n называется разбиение ξ вида

$$X = E \sqcup TE \sqcup \dots \sqcup T^{n-1}E \sqcup D.$$

Множества $E, TE, \dots, T^{n-1}E$ называются *этажами башни*, а D – остатком. Будем говорить, что *башня приближает* множество A с точностью $\varepsilon > 0$, если существует такое объединение ее этажей B , что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Будем говорить, что *последовательность башен приближает* множество A с точностью $\varepsilon > 0$, если все башни последовательности, начиная с некоторой, приближают это множество с этой точностью. Если существует такая последовательность башен $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что каковы бы ни были измеримое множество A и число $\varepsilon > 0$, последовательность ξ_i приближает A с точностью ε , то говорят, что T имеет ранг 1. Понятие преобразования ранга 1 было впервые введено Орнштейном в [6].

Массивность множества. Докажем типичность перемешиваний ранга 1.

ТЕОРЕМА 2. *Множество перемешиваний ранга 1 имеет тип G_δ и плотно в $\mathcal{M}$.*

Зафиксируем счетное семейство $\{A_j\}$ подмножеств X , элементами которого можно приблизить любое подмножество $A \subset X$ (такое существует в силу свойств пространства Лебега). Если некоторой последовательностью башен каждое A_j можно приблизить с любой точностью, то преобразование имеет ранг 1. Обозначим множество перемешиваний, имеющих башню Рохлина–Халмоша, приближающую множества $A_1, A_2, \dots, A_j$ с точностью a , где $a < 1/k$, через $\mathcal{R}(j, k)$. Тогда пересечение

$$\bigcap_{j,k} \mathcal{R}(j, k)$$

есть множество преобразований ранга 1.

Покажем теперь, что каждое $\mathcal{R}(j, k)$ открыто. Пусть $S \in \mathcal{R}(j, k)$. Это означает, что существует такая башня Рохлина–Халмоша ξ , что для любого $i \in \{1, 2, \dots, j\}$ множество A_i отличается от некоторого объединения B_i этажей этой башни на множества меры $a < 1/k$. Пусть E – нижний этаж башни ξ , n – ее высота. Обозначим

$$b = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{k} - a \right).$$

Пусть перемешивание V лежит в окрестности $\mathcal{U}(S, \{E, SE, \dots, S^{n-1}E\}, b)$.

Рассмотрим множество

$$\tilde{E} = E \setminus (VE \cup V^2E \cup \dots \cup V^{n-1}E).$$

Оно отличается от E не более чем на $(n-2)b$. В силу определения $\tilde{E}$ является нижним этажом некоторой башни η :

$$X = \tilde{E} \sqcup V\tilde{E} \sqcup \dots \sqcup V^{n-1}\tilde{E} \sqcup \tilde{D}.$$

Поскольку нижний этаж башни η отличается от нижнего этажа башни ξ не более чем на меру $(n-2)b$, то остальные соответствующие этажи этих башен отличаются

друг от друга не более чем на меру $b + (n - 2)b = (n - 1)b$, а соответствующие объединения этажей – не более чем на $n(n - 1)b$. Объединение этажей башни η , соответствующее некоторому B_i в ξ , отличается от B_i не более чем на $n(n - 1)b$, поэтому от A_i оно отличается не более чем на $n(n - 1)b + a < 1/k$.

Мы получили, что произвольное преобразование S входит в $\mathcal{R}(j, k)$ вместе с некоторой своей окрестностью. Значит, $\mathcal{R}(j, k)$ открыто, поэтому множество перемешиваний ранга 1 имеет тип G_δ . Класс сопряженности произвольного перемешивания ранга 1 плотен в $\mathcal{M}$, следовательно, множество перемешиваний, имеющих ранг 1, массивно (остаточное и имеет тип G_δ).

Следствия. Поскольку ранг 1 типичен для перемешивания, то и все свойства перемешивающих преобразований ранга 1 оказываются типичными.

А именно минимальные самоприсоединения всех порядков (вытекает из результатов [7]–[9]) и его следствия: тривиальность централизатора, отсутствие корней, отсутствие нетривиальных факторов.

Заметим, что эти свойства типичного перемешивания резко отличаются от свойств типичного эргодического преобразования: наличия обширного централизатора [10], корней всех степеней [11], [12], возможности включения в потоки и групповые действия [10], [12], [13], наличия нетривиального фактора [14].

3. Замечания

Приближение сопряжениями неперемешивающего преобразования.

В работе [3] используется более слабое свойство, чем перемешивание, – отсутствие частичной жесткости. Преобразование T называется *частично жестким* с коэффициентом $a > 0$, если для любого измеримого множества $A \subset X$

$$\limsup_i \mu(A \cap T^i A) \geq a\mu(A).$$

Расширим пространство $\mathcal{M}$ перемешиваний до пространства $\mathcal{A}$ всех сохраняющих меру обратимых преобразований. Будем пользоваться той же метрикой $\tau(T, S)$. Интересно, что в полученном пространстве существует следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Зафиксируем преобразование S , не обладающее частичной жесткостью. В любой окрестности любого перемешивания $T \in \mathcal{A}$ найдется преобразование, сопряженное S .*

Доказательство полностью аналогично.

Заметим, что верно и обратное: класс сопряженности преобразования S не может приближать перемешивания, если S частично жесткое.

Непосредственное доказательство плотности преобразований ранга 1.

Рыжиков сообщил автору, что располагает непосредственным доказательством того, что преобразования ранга 1 плотны в $\mathcal{M}$. Это доказательство не использует теорему Тихонова о плотности сопряженных декартовому произведению и результаты [3] и [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Тихонов, “Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований”, *УМН*, **62**:1 (2007), 209–210.
- [2] С. В. Тихонов, “Полная метрика на множестве перемешивающих преобразований”, *Матем. сб.*, **198**:4 (2007), 135–158.
- [3] А. И. Баштанов, “Свойство почти независимости образов для эргодических преобразований без частичной жесткости”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 29–39.
- [4] В. В. Рыжиков, “Попарная ε -независимость множеств $T^i A$ для перемешивающего преобразования T ”, *Функц. анализ и его прил.*, **43**:2 (2009), 88–91.
- [5] С. В. Тихонов, “Перемешивающие преобразования с однородным спектром”, *Матем. сб.*, **202**:8 (2011), 139–160.
- [6] D. S. Ornstein, “On the root problem in ergodic theory”, *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Vol. II. *Probability theory*, Univ. California Press, Berkeley, CA, 1972, 347–356.
- [7] В. В. Рыжиков, “Перемешивание, ранг и минимальное самоприсоединение действий с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **183**:3 (1992), 133–160.
- [8] J. L. King, “Joinings-rank and the structure of finite rank mixing transformation”, *J. Analyse Math.*, **51** (1988), 182–227.
- [9] S. A. Kalikow, “Twofold mixing implies threefold mixing for rank one transformations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **4**:2 (1984), 237–259.
- [10] А. М. Степин, А. М. Еременко, “Неединственность включения в поток и обширность централизатора для типичного сохраняющего меру преобразования”, *Матем. сб.*, **195**:12 (2004), 95–108.
- [11] J. L. F. King, “The generic transformation has roots of all orders”, *Colloq. Math.*, **84–85**, Part 2 (2000), 521–547.
- [12] О. Н. Агеев, “О типичности некоторых неасимптотических динамических свойств”, *УМН*, **58**:1 (2003), 177–178.
- [13] T. de la Rue, J. de Sam Lazaro, “Une transformation générique peut être insérée dans un flot”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **39**:1 (2003), 121–134.
- [14] О. Н. Агеев, “Типичный автоморфизм пространства Лебега сопряжен с G -расширением для любой конечной абелевой группы G ”, *ДАН*, **374**:4 (2000), 439–442.

А. И. Баштанов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: bashtanov@imap.cc

Поступило

13.06.2012

Исправленный вариант

09.10.2012