Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Григорян, В. Г. Кротов, Теорема исправления Лу-
зина и коэффициенты разложений Фурье по системе
Фабера–Шаудера, *Матем. заметки*, 2013, том 93, вы-
пуск 2, 172–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:18:07

Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера–Шаудера

М. Г. Григорян, В. Г. Кротов

Пусть $b_n \downarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n/n) = +\infty$. В работе доказано, что любая измеримая почти всюду конечная функция на $[0, 1]$ может быть исправлена на множестве сколь угодно малой меры до непрерывной функции $\tilde{f}$ таким образом, что модули $|A_n(\tilde{f})|$ коэффициентов Фурье–Фабера–Шаудера измененной функции, отличные от нуля, равны b_n .

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10158

1. Введение. Классическая теорема Лузина об исправлении утверждает, что любая измеримая (например, на $[0, 1]$) функция с помощью исправления ее значений на множестве сколь угодно малой меры может быть сделана непрерывной.

Это утверждение, важное и само по себе, обобщалось многочисленными авторами. Суть этих обобщений состоит в том, что исправленная (корректирующая) функция обладает некоторыми дополнительными свойствами, связанными, как правило, с поведением тех или иных разложений Фурье. В частности, первое такое обобщение принадлежит Меньшову и состоит в том, что корректирующая функция имеет равномерно сходящийся ряд Фурье по тригонометрической системе [1] (см. также [2; гл. VI]).

Ряд работ [3]–[5] был посвящен теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье (по системам Хаара, Уолша, Фабера–Шаудера) корректирующей функции монотонно убывали.

Целью настоящей статьи является доказательство теоремы исправления, в которой корректирующая функция имеет заданные модули коэффициентов Фурье по системе Фабера–Шаудера.

Система функций Фабера–Шаудера $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется на $[0, 1]$ следующим образом: $\varphi_0(x) \equiv 1$, $\varphi_1(x) = x$, а если $2 \leq n = 2^k + i$, то $\varphi_n \in C[0, 1]$ и

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = x_n, \\ \text{линейна на каждом из интервалов } \Delta_{k+1}^{(2i-2)}, \Delta_{k+1}^{(2i-1)}, \\ 0 & \text{при } x \notin \Delta_k^{(i)}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь

$$\Delta_k^{(i)} = \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad i = 1, \dots, 2^k,$$

и $\mathcal{D}$ – множество всех таких интервалов (их обычно называют *двоичными*). Мы будем также использовать нумерацию двоичных интервалов с одним индексом, полагая $\Delta_n = \Delta_k^{(i)}$, если $n \geq 2$ представлено в виде $n = 2^k + i$, где $k \geq 0$ и $1 \leq i \leq 2^k$. Кроме того, $x_n = x_k^{(i)} = (2i-1)2^{-k-1}$ – середина интервала Δ_n . Через $C[0, 1]$ обозначаем, как обычно, класс непрерывных функций на $[0, 1]$,

$$\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Система Фабера–Шаудера является одной из самых популярных систем функций; ее изучению было посвящено много работ (основные свойства приведены, например, в [6; гл. 6, § 1]).

Одно из главных свойств этой системы состоит в том, что она образует базис в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. Это означает, что любая функция $f \in C[0, 1]$ может быть единственным образом представлена равномерно сходящимся рядом

$$f \stackrel{C}{=} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f) \varphi_n$$

по этой системе. Этот ряд будем называть *рядом Фурье–Фабера–Шаудера* функции f . Коэффициенты $A_n(f)$ в этом разложении определяются равенствами

$$A_0(f) = f(0), \quad A_1(f) = f(1) - f(0),$$

а при $n \geq 2$

$$A_n(f) = A_k^{(i)}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right) \right]. \quad (1.2)$$

Спектром Фабера–Шаудера функции $f \in C[0, 1]$ будем называть множество

$$\text{Spec}(f) = \{n : A_n(f) \neq 0\}.$$

Введем еще несколько обозначений, используемых ниже. Мету Лебега множества $E \subset [0, 1]$ будем обозначать $\text{mes } E$, $\text{supp } f$ – носитель функции f (множество точек, в которых ее значения отличны от нуля), $\mathcal{M}$ – класс измеримых, почти всюду конечных на $[0, 1]$ функций, $\mathcal{B}$ – класс убывающих последовательностей $\{b_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = +\infty. \quad (1.3)$$

Основным результатом нашей работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{b_n\} \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $\tilde{f} \in C[0, 1]$ со следующими свойствами:

- 1) $\text{mes}\{x \in [0, 1] : f(x) \neq \tilde{f}(x)\} < \varepsilon$;
- 2) $|A_n(\tilde{f})| = b_n$ при всех $n \in \text{Spec}(\tilde{f})$.

Для доказательства нам понадобится ряд лемм, которым посвящен следующий пункт работы.

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть заданы последовательность $\{b_n\} \in \mathcal{B}$, числа $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$, номер $m \in \mathbb{N}$ и интервал $\Delta \subset [0, 1]$. Тогда существует конечное множество $\omega \subset \mathbb{N}$ со следующими свойствами:

- 1) $\min \omega \geq m$;
- 2) $\sum_{n \in \omega} b_n \varphi_n(x) \leq |\gamma|$ при всех $x \in [0, 1]$;
- 3) $\text{supp}(\sum_{n \in \omega} b_n \varphi_n) \subset \Delta$;
- 4) $\text{mes}\{x \in \Delta : |\text{sign } \gamma \sum_{n \in \omega} b_n \varphi_n(x) - \gamma| > \delta\} < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно доказать лемму для $\gamma > 0$. В этом случае утверждение было доказано в [7; лемма 3.2] при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) = +\infty \quad \text{почти всюду на } [0, 1] \quad (2.1)$$

на последовательность $\{b_n\}$. Поэтому лемма будет доказана, если мы покажем, что из условия $\{b_n\} \in \mathcal{B}$ вытекает (2.1).

Предположим, что (2.1) не выполнено, тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2^{k+1}} \Phi_k(x), \quad \text{где} \quad \Phi_k(x) = \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \varphi_{2^k+i}(x), \quad (2.2)$$

сходится на множестве положительной меры.

С другой стороны, выполнено условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \Phi_k(x) dx > 0 \quad (2.3)$$

для любого множества $E \subset [0, 1]$ положительной меры (см. [8; лемма 2]). В силу (2.3) из сходимости ряда (2.2) должно следовать условие $\sum_{k=0}^{\infty} b_{2^{k+1}} < \infty$ (см. [9; лемма 5.1.7]). Это противоречит тому, что $\{b_n\} \in \mathcal{B}$. Итак, (2.1) выполнено и лемма доказана.

Пусть заданы $k \in \mathbb{N}$ и набор действительных чисел $\gamma_1, \dots, \gamma_{2^k}$. Эти параметры задают ступенчатую функцию вида

$$S(x) = \gamma_i \quad \text{при} \quad x \in \Delta_k^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 2^k. \quad (2.4)$$

Неважно, как определяются значения функции S в точках $i2^{-k}$, $i = 0, 1, \dots, 2^k$. Можно считать, например, что

$$S\left(\frac{i-1}{2^k}\right) = \gamma_i \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, 2^k \quad \text{и} \quad S(1) = \gamma_{2^k}.$$

ЛЕММА 2. Пусть $\{b_n\} \in \mathcal{B}$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть еще задана ступенчатая функция S вида (2.4). Тогда существуют конечное множество $\omega \subset \mathbb{N}$, набор знаков $\lambda_n = \pm 1$, $n \in \omega$, определяющие полином

$$Q = \sum_{n \in \omega} \lambda_n b_n \varphi_n \quad (2.5)$$

по системе Фабера–Шаудера, а также измеримое множество $E \subset [0, 1]$ и ограниченная функция g со следующими свойствами:

- 1) $\min \omega \geq m$;
- 2) $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$;
- 3) $g(x) = S(x)$ при всех $x \in E$;
- 4) $\|g\| = \|S\| = \max_{1 \leq i \leq 2^k} |\gamma_i|$;
- 5) $\|g - Q\| \leq \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $i = 1, \dots, 2^k$ применим лемму 1 с параметрами $\gamma_i, \varepsilon 2^{-k}, \varepsilon, m$ и $\Delta_k^{(i)}$, определяя множество индексов $\omega_i \subset \mathbb{N}$ таким образом, чтобы $\min \omega_i > m$ и выполнялись условия

$$Q_i(x) \equiv \sum_{n \in \omega_i} b_n \varphi_n(x) \leq |\gamma_i|, \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{supp } Q_i \subset \Delta_k^{(i)}, \quad (2.6)$$

$$\text{mes}\{x \in \Delta_k^{(i)} : |\text{sign } \gamma_i Q_i(x) - \gamma_i| > \varepsilon\} < \varepsilon 2^{-k}. \quad (2.7)$$

Отметим, что из (2.6) и определения системы Фабера–Шаудера (1.1) следует, что множества $\omega_i = \text{Spec } Q_i$ попарно не пересекаются. Поэтому если мы положим теперь

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{2^k} \omega_i, \quad \lambda_n = \text{sign } \gamma_i \quad \text{при всех } n \in \omega_i, \quad i = 1, \dots, 2^k,$$

то определен полином (2.5), причем

$$Q = \sum_{i=1}^{2^k} \text{sign } \gamma_i Q_i. \quad (2.8)$$

Обозначим также

$$E = \bigcup_{i=1}^{2^k} E_i, \quad E_i = \{x \in \Delta_k^{(i)} : |\text{sign } \gamma_i Q_i(x) - \gamma_i| \leq \varepsilon\},$$

$$g = \sum_{i=1}^{2^k} g_i, \quad g_i(x) = \begin{cases} \gamma_i, & x \in E_i, \\ \text{sign } \gamma_i Q_i(x), & x \in [0, 1] \setminus E_i, \end{cases}$$

и покажем, что найденные Q, E и g удовлетворяют нужным условиям.

Свойство 1) очевидно, 2) вытекает из (2.7):

$$\text{mes } E = \sum_{i=1}^{2^k} \text{mes } E_i > \sum_{i=1}^{2^k} (\text{mes } \Delta_k^{(i)} - \varepsilon 2^{-k}) = 1 - \varepsilon,$$

3) и 4) выполнены по определению g (см. также (2.8)). Наконец, 5) следует из определений g и E :

$$\|g - Q\| = \max_{1 \leq i \leq 2^k} \sup_{x \in \Delta_k^{(i)}} |g_i(x) - \text{sign } \gamma_i Q_i(x)| \leq \varepsilon,$$

и лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, можно считать, что исходная функция f непрерывна на $[0, 1]$. Тогда существует последовательность ступенчатых функций $\{S_j\}_{j=1}^\infty$ вида (2.4), удовлетворяющая условиям

$$\|S_1\| \leq \|f\|, \quad \|S_j\| \leq 2^{-j-2}, \quad j \geq 2, \quad (3.1)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{l=1}^j S_l \right\| = 0. \quad (3.2)$$

Далее, по индукции с помощью леммы 2 построим последовательности конечных множеств $\{\omega_j\}$, $\omega_j \subset \mathbb{N}$, и наборов знаков $\{\lambda_n = \pm 1\}_{n \in \omega_j}$, определяющих полиномы

$$Q_j = \sum_{n \in \omega_j} \lambda_n b_n \varphi_n, \quad (3.3)$$

а также последовательности ограниченных функций $\{g_j\}$ и множеств $\{E_j\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\max \omega_j < \min \omega_{j+1}, \quad (3.4)$$

$$\text{mes } E_j > 1 - \varepsilon 2^{-j-1}, \quad (3.5)$$

$$g_j(x) = S_j(x) \quad \text{при } x \in E_j, \quad (3.6)$$

$$\left\| \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right\| < 2^{-j-2}, \quad (3.7)$$

$$\|g_1\| \leq \|f\|, \quad \|g_j\| < 2^{-j+1}, \quad j \geq 2. \quad (3.8)$$

На первом шаге к функции S_1 просто применим лемму 2, находя конечное множество $\omega_1 \subset \mathbb{N}$, знаки $\lambda_n = \pm 1$, $n \in \omega_1$, ограниченную функцию g_1 , полином Q_1 и множество E_1 таким образом, чтобы при $j = 1$ выполнялись условия (3.5)–(3.8).

Предположим теперь, что функции $g_1, \dots, g_j$, множества $E_1, \dots, E_j$ и полиномы $Q_1, \dots, Q_j$ уже построены. Покажем теперь, как следует строить g_{j+1} , E_{j+1} и Q_{j+1} . Это будет сделано несколько иначе, нежели на первом шаге.

Сначала подберем ступенчатую функцию $\tilde{S}_{j+1}$ вида (2.4) так, чтобы

$$\left\| \tilde{S}_{j+1} - \left(S_{j+1} - \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right) \right\| < 2^{-j-3}. \quad (3.9)$$

Тогда из неравенств (3.1), (3.7) и (3.9) вытекает, что

$$\|\tilde{S}_{j+1}\| \leq \left\| \tilde{S}_{j+1} - \left(S_{j+1} - \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right) \right\| + \|S_{j+1}\| + \left\| \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right\| < 2^{-j-1}. \quad (3.10)$$

Далее, по лемме 2 находим функцию $\tilde{g}_{j+1}$, полином Q_{j+1} вида (3.3) и измеримое множество $E_{j+1} \subset [0, 1]$ таким образом, чтобы выполнялись условия (3.4):

$$\tilde{g}_{j+1}(x) = \tilde{S}_{j+1}(x), \quad x \in E_{j+1}, \quad (3.11)$$

$$\|\tilde{g}_{j+1}\| = \|\tilde{S}_{j+1}\|, \quad (3.12)$$

$$\text{mes } E_{j+1} > 1 - \varepsilon 2^{-j-2}, \quad (3.13)$$

$$\|Q_{j+1} - \tilde{g}_{j+1}\| < 2^{-j-3}. \quad (3.14)$$

Положим теперь

$$g_{j+1} = S_{j+1} + \tilde{g}_{j+1} - \tilde{S}_{j+1} \quad (3.15)$$

и покажем, что условия (3.5)–(3.8) выполнены с $j+1$ на месте j .

Сначала заметим, что из (3.11), (3.15) вытекает, что $g_{j+1}(x) = S_{j+1}(x)$ при $x \in E_{j+1}$.

Далее, из (3.15), (3.9) и (3.14) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l=1}^{j+1} [Q_l - g_l] \right\| &= \left\| \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] + (Q_{j+1} - S_{j+1} - \tilde{g}_{j+1} + \tilde{S}_{j+1}) \right\| \\ &\leq \left\| \tilde{S}_{j+1} - \left(S_{j+1} - \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right) \right\| + \|Q_{j+1} - \tilde{g}_{j+1}\| < 2^{-j-2} \end{aligned}$$

и (3.7) выполнено для $j+1$.

С помощью (3.15), (3.9), (3.12), (3.10) и (3.7) проверяем (3.8) для $j+1$:

$$\begin{aligned} \|g_{j+1}\| &= \|\tilde{S}_{j+1} - \tilde{g}_{j+1} - S_{j+1}\| \\ &\leq \left\| \tilde{S}_{j+1} - \left(S_{j+1} - \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right) \right\| + \|\tilde{g}_{j+1}\| + \left\| \sum_{l=1}^j [Q_l - g_l] \right\| < 2^{-j}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j, \quad \tilde{f} = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \quad (3.16)$$

и покажем, что для E и $\tilde{f}$ выполняется утверждение теоремы.

В силу (3.8) ряд (3.16) сходится равномерно к $\tilde{f}$, а в силу (3.7) ряд $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j$ также равномерно сходится к $\tilde{f}$. Так как система Фабера–Шаудера является базисом в $C[0, 1]$, то (см. (3.3)) ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n \in \omega_j} \lambda_n b_n \varphi_n$$

(с раскрытыми скобками – из (3.4) следует, что спектры $\omega_j = \text{Spres } Q_j$ попарно не пересекаются) сходится равномерно к $\tilde{f}$ и является ее рядом Фурье–Фабера–Шаудера. Из (3.2), (3.6) и (3.16) вытекает, что $f(x) = \tilde{f}(x)$ при $x \in E$. Оценка $\text{mes } E > 1 - \varepsilon$ следует из неравенств (3.5). Теорема 1 доказана.

4. Необходимое условие в теореме 1. Естественно спросить, является ли условие (1.3) на последовательность необходимым в теореме 1. Следующее утверждение показывает, что без этого условия теорема 1 теряет силу.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{b_n\}$ – положительная убывающая последовательность, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} < +\infty.$$

Тогда существует такая функция $f \in C[0, 1]$, что для любой функции $\tilde{f} \in C[0, 1]$, совпадающей с f хотя бы в одной точке, найдется $n \in \mathbb{N}$, для которого $|A_n(\tilde{f})| > b_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При наших условиях сходится ряд

$$b = b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2^k} < +\infty.$$

Положим $f(x) = 3b$ при всех $x \in [0, 1]$, и пусть функция $\tilde{f} \in C[0, 1]$ такова, что

$$|A_n(\tilde{f})| \leq b_n \quad \text{для всех } n \geq 0,$$

и совпадает с f в некоторой точке $x_0 \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} 3b = f(x_0) = \tilde{f}(x_0) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n(\tilde{f})| \varphi_n(x_0) \\ &\leq b_0 + b_1 + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2^k} \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \varphi_n(x_0) \leq b_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} b_{2^k} < 2b, \end{aligned}$$

ЧТО НЕВОЗМОЖНО.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Menchoff, “Sur la représentation des fonctions mesurables par des séries trigonométriques”, *Матем. сб.*, **9(51)**:3 (1941), 667–692.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [3] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, *Anal. Math.*, **32**:1 (2006), 49–80.
- [4] M. G. Grigorian, “On the Fourier–Walsh coefficients”, *Real Anal. Exchange*, **35**:1 (2010), 157–166.
- [5] M. G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, “On the coefficients of expansion of elements from $C[0, 1]$ space by the Faber–Schauder system”, *J. Funct. Spaces Appl.*, **9**:2 (2011), 191–203.
- [6] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [7] В. Г. Кротов, “Представление измеримых функций рядами по системе Фабера–Шаудера и универсальные ряды”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:1 (1977), 215–229.
- [8] В. Г. Кротов, “Об универсальных рядах по системе Фабера–Шаудера”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1975, № 4, 53–58.
- [9] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958.

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет

E-mail: gmarting@ysu.am

Поступило

02.12.2011

В. Г. Кротов

Белорусский государственный университет, г. Минск

E-mail: krotov@bsu.by