Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джун-И Чэнь, Юншионг Чжоу, О скорости сходимости
рекурсивно определенной последовательности, *Матем.
заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 195–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:50:57

О скорости сходимости одной рекурсивно определенной последовательности

Джун-И Чэнь, Юншионг Чжоу

Рассмотрим следующую рекурсивно определенную последовательность:

$$\tau_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sum_{s=j}^n \tau_s} = 1 \quad \text{для } n \geq 2,$$

которая возникает из проблемы теплопроводности, впервые изученной Мышкисом (1997). Чанг, Чжоу и Ван (2003) доказали, что

$$\tau_n = \log n + O(1) \quad \text{для больших } n.$$

В этой заметке этот результат улучшается

$$\tau_n = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

где γ – постоянная Эйлера.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10159

1. Введение. Пусть $u(\mathbf{x}, t)$ – температура в момент времени t в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ однородной среды, заполняющей все пространство $\mathbb{R}^2$. Предположим, что $u \equiv 0$ при $t = 0$ и тепловой импульс размера b применяется в $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. После этого, когда температура в начале координат убывает до заданного порога $u_0 > 0$ в момент времени t_1 , тепловой импульс того же самого размера применяется вновь в начале координат. Этот процесс повторяется неопределенно долго.

Обозначим через $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$, последовательные моменты времени, в которые тепловой импульс размера b применяется в $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Решая следующее уравнение теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \\ u(\mathbf{x}, t_{n-1}^+) = u(\mathbf{x}, t_{n-1}) + b \cdot \delta_0(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (1.1)$$

где a – коэффициент теплопроводности среды и $\delta_0(\mathbf{x})$ – функция Дирака в $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, легко показать, что при $n \geq 1$ и $t_{n-1} < t \leq t_n$, $u(\mathbf{x}, t)$ задается в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = b \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{x}, t - t_j). \quad (1.2)$$

Здесь

$$f(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{4\pi at} \right) \exp \left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{4at} \right)$$

– фундаментальное решение уравнения теплопроводности (1.1), приведенного выше. Применяя тепловые условия

$$u(\mathbf{0}, t_n) = u_0 \quad \text{для } n \geq 1 \quad (1.3)$$

к (1.2), получим

$$u_0 = b \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{0}, t_n - t_j) = b \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{4\pi a(t_n - t_j)}. \quad (1.4)$$

При $j \geq 1$ определим $\tau_j = 4\pi a(t_j - t_{j-1})u_0/b$ в виде нормализованного ожидаемого момента времени между двумя последовательными моментами подачи тепла t_{j-1} и t_j . После простого вычисления (1.4) может быть переписано в виде

$$\tau_1 = 1, \quad \sum_{j=1}^n \left(\sum_{s=j}^n \tau_s \right)^{-1} = 1 \quad \text{при } n \geq 2. \quad (1.5)$$

Требуется определить асимптотическое поведение $\{\tau_n\}$. Эта задача является аналогом одномерной проблемы, впервые изученной Мышкисом [1].

Более общий результат для $\{\tau_n\}$ состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.1 [2]. *Предположим, что $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – непрерывная и строго убывающая функция с $g(0^+) \geq 1$, и $g(\infty) = 0$. Пусть $\{\tau_n\}$ – последовательность чисел, рекурсивно определяемая соотношением*

$$\sum_{j=1}^n g \left(\sum_{s=j}^n \tau_s \right) = 1.$$

Если функция $(\log g)''$ является неотрицательной, то последовательность $\{\tau_n\}$ возрастающая.

Теорема 1.1 утверждает, что $\{\tau_n\}$, определяемая соотношением (1.5), является возрастающей, так как функция $\log(x^{-1})$ выпуклая на $\mathbb{R}^+$.

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{s=j}^n \tau_s \right)^{-1} = 1 \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j\tau_n}.$$

Следовательно,

$$\tau_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}. \quad (1.6)$$

Обозначим

$$g(x) = x^{-1}, \quad \tilde{I}_j^n = \tau_j + \dots + \tau_n \leq (n - j + 1)\tau_n \quad \text{при } 1 \leq j \leq n.$$

Так как $g(x)$ выпуклая на $\mathbb{R}^+$, то по (1.5) имеем

$$g(\tau_{n+1}) = \sum_{j=1}^n g(\tilde{T}_j^n) - g(\tau_{n+1} + \tilde{T}_j^n) \geq \sum_{j=1}^n g((n-j+1)\tau_n) - g(\tau_{n+1} + (n-j+1)\tau_n).$$

Это может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\tau_{n+1}} + \frac{1}{\tau_{n+1} + \tau_n} + \frac{1}{\tau_{n+1} + 2\tau_n} + \cdots + \frac{1}{\tau_{n+1} + n\tau_n} \geq \frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\tau_n}.$$

Введем

$$h(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{для } x > 0.$$

Предыдущее неравенство влечет, что $h(\tau_{n+1}/\tau_n) \geq 0$. Ясно, что $h(x)$ убывает при $x > 0$. Заметим также, что

$$h\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+1/n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1/n} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1+1/n} + \frac{1}{1+1/n} - 1 \leq 0.$$

Тогда имеем $\tau_{n+1}/\tau_n \leq 1 + 1/n$, что означает убывание $\{\tau_n/n\}$. Следовательно, $\tau_j \geq j\tau_n/n$ для $1 \leq j \leq n$.

Снова по (1.5)

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^n g\left(\sum_{s=n-j+1}^n \tau_s\right) \leq \sum_{j=1}^n g\left(\tau_n + \frac{n-1}{n}\tau_n + \cdots + \frac{n-j+1}{n}\tau_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_n} \frac{2n}{j(2n-j+1)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tau_n \leq \sum_{j=1}^n \frac{2n}{j(2n-j+1)} \leq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \frac{1}{2n-j+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}. \quad (1.7)$$

Предыдущее неравенство вместе с (1.6) дает первую оценку $\{\tau_n\}$ [3]:

$$\tau_n = \log n + O(1).$$

Цель этой заметки улучшить ее. Получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\{\tau_n\}$ – последовательность, рекурсивно определенная по (1.5). Тогда имеем

$$\tau_n = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

где γ – постоянная Эйлера.

Так как $4\pi a u_0 t_n = b \sum_{s=1}^n \tau_s$, то немедленно имеем следующее.

ТЕОРЕМА 1.3. *Тепло-временная последовательность $\{t_n\}$, рекурсивно определяемая уравнением теплопроводности (1.1) и тепловым условием (1.3), удовлетворяет асимптотическому равенству*

$$t_n = \frac{b}{4\pi a u_0} (n \log n + (\gamma - 1)n) + O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Говоря языком физики, можно определить коэффициент теплопроводности среды

$$a = b(n \log n + (\gamma - 1)n) 4\pi u_0 t_n + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)$$

даже без выхода в точку подачи тепла, если нам известен размер импульса b , пороговая температура u_0 и моменты времени подачи тепла $t_0 = 0, t_1, t_2, t_3, \dots$. Однако, отметим, что нам пока не известны подобные результаты, если этот тепловой процесс имеет место в штыре или кубе, конечном или бесконечном [4]–[6].

2. Доказательство теоремы 1.2. Запишем

$$\tau_n = s_n + d_n, \quad \text{где} \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Хорошо известно, что

$$\log n \leq s_n \leq 1 + \log n, \quad s_n = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1)$$

где γ – постоянная Эйлера. Используя метод интегральных сумм, из неравенств (1.6) и (1.7) найдем, что

$$0 \leq d_n \leq \log 2 \leq 1 \quad \text{при} \quad n \geq 1. \quad (2.2)$$

Далее, утверждаем, что

$$0 \leq d_n \leq \frac{9}{\log n} \quad \text{при} \quad n \geq N_0, \quad (2.3)$$

где N_0 – некоторое положительное число (достаточно взять $N_0 = 100$). Тогда теорема 1.2 следует из (2.1) и (2.3).

Так как $\{\tau_n\}$ и $\{-\tau_n/n\}$ – возрастающие последовательности, то имеем

$$d_n \leq d_{n+1} + \frac{1}{n+1}, \quad \frac{s_{n+1} + d_{n+1}}{n+1} \leq \frac{s_n + d_n}{n}.$$

По (2.2) и после простой перестановки имеем

$$-\frac{s_{n+1}}{n+1} \leq -\frac{s_{n+1}}{n+1} + \frac{1 - d_{n+1}}{n+1} \leq d_n - d_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}. \quad (2.4)$$

Введем

$$D_j^n = d_j + d_{j+1} + \dots + d_n, \quad \delta_k^n = \frac{D_{n-k+1}^n}{k}, \quad E_k^n = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n - k + 1 + j}.$$

Заметим, что $E_1^n = 0$ по соглашению. По (2.2)

$$0 \leq \delta_k^n \leq \log 2 \leq 1 \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.5)$$

Простое вычисление показывает, что (1.5) можно переписать в виде

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sum_{s=n-k+1}^n \tau_s} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(s_n + \delta_k^n) - E_k^n} = A_n + B_n, \quad (2.6)$$

где

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(s_n + \delta_k^n)}, \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(s_n + \delta_k^n) - E_k^n} - \frac{1}{k(s_n + \delta_k^n)}. \quad (2.7)$$

Для того чтобы оценить B_n , сначала займемся E_k^n . Тривиально найдем, что

$$E_k^n = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n-k+1+j} \leq k-1 \leq k \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2.8)$$

Более хорошая оценка E_k^n может быть получена для некоторых k . Используя

$$\frac{j}{n-k+1+j} = 1 - \frac{n-k+1}{n-k+1+j}, \quad s_n - s_{n-k+1} = \frac{-1}{n-k+1} + (s_n - s_{n-k}),$$

имеем

$$E_k^n = k-1 - (n-k+1)(s_n - s_{n-k+1}) = k - (n-k+1)(s_n - s_{n-k}).$$

Так как $\log(1+x) \geq x - x^2/2$ при $x \in [0, 1]$, находим, что

$$s_n - s_{n-k} \geq \int_{n-k+1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log \left(1 + \frac{k}{n-k+1} \right) \geq \frac{k}{n-k+1} - \frac{k^2}{2(n-k+1)^2}$$

справедлива при $2k < n+1$. Комбинируем эти два уравнения

$$E_k^n \leq \frac{k^2}{2(n-k+1)} \leq \frac{k^2}{2(n-k)} \quad \text{при} \quad 2k < n+1. \quad (2.9)$$

Оба равенства (2.8) и (2.9) будут использованы для оценки B_n . Разложим B_n как

$$B_n = \left(\sum_{k=1}^{[n/2]} + \sum_{k=[n/2]+1}^n \right) \left(\frac{1}{k(s_n + \delta_k^n) - E_k^n} - \frac{1}{k(s_n + \delta_k^n)} \right) = B'_n + B''_n.$$

По (2.8) слагаемые в B''_n ограничены

$$\frac{1}{k(s_n + \delta_k^n) - k} - \frac{1}{k(s_n + \delta_k^n)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{(s_n + \delta_k^n - 1)(s_n + \delta_k^n)}.$$

Используя (2.1) и (2.5), находим

$$B''_n \leq \frac{\int_{[n/2]}^n (1/x) dx}{(\log n - 1) \log n} = \frac{\log n / [n/2]}{(\log n - 1) \log n} \leq \frac{1}{\log^2 n} \quad \text{при} \quad n > N_0, \quad (2.10)$$

Аналогично, (2.9) влечет, что слагаемое в B'_n ограничено

$$\begin{aligned} & \frac{k^2/(2(n-k))}{(k(s_n + \delta_k^n) - k^2/(2(n-k)))(k(s_n + \delta_k^n))} \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{1}{2((s_n + \delta_k^n) - k/(2(n-k)))(s_n + \delta_k^n)}. \end{aligned}$$

Заметим, что $k \leq n-k$ при $k \leq [n/2]$. Используя (2.1) и (2.5) вновь, получим

$$B'_n \leq \frac{\int_{n-[n/2]-1}^n (1/x) dx}{2(\log n - 1/2) \log n} \leq \frac{1}{2 \log^2 n} \quad \text{при } n > N_0. \quad (2.11)$$

Добавляя (2.10) и (2.11), имеем

$$0 \leq B_n \leq \frac{2}{\log^2 n} \quad \text{при } n > N_0. \quad (2.12)$$

Теперь, рассуждая от противного, мы готовы показать (2.3). Предположим, существует $m > N_0$ такое, что

$$d_m > \frac{9}{\log m}.$$

Используя (2.4) вместе с телескопическим сокращением, имеем, что при $k \leq [\sqrt{m}]$

$$d_{m-k} > \frac{9}{\log m} - \frac{s_m}{m} - \dots - \frac{s_{m-[\sqrt{m}]+1}}{m - [\sqrt{m}] + 1} \geq \frac{9}{\log m} - s_m(s_m - s_{m-[\sqrt{m}]}) \geq \frac{8}{\log m}.$$

Здесь мы использовали следующую оценку:

$$s_m - s_{m-[\sqrt{m}]} \approx \log \frac{m}{m - [\sqrt{m}]} \approx \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Тогда нижняя граница в (2.5) уточняется следующим образом:

$$\delta_k^m \geq \frac{8}{\log m} \quad \text{при } k \leq [\sqrt{m}]. \quad (2.13)$$

Заметим, что

$$B_m = 1 - A_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{ks_m} - \frac{1}{k(s_m + \delta_k^m)}.$$

Оценка (2.13) дает

$$B_m \geq \sum_{k=1}^{[\sqrt{m}]} \frac{1}{ks_m} - \frac{1}{k(s_m + 8/\log m)} = \frac{8s_{[\sqrt{m}]}}{(\log m)s_m(s_m + 8/\log m)} \geq \frac{3}{\log^2 m}.$$

Это противоречит (2.12) и, тем самым, завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. D. Myshkis, “On a recurrently defined sequence”, *J. Difference Equ. Appl.*, **3**:1 (1997), 89–91.
- [2] J.-Y. Chen, “On a difference equation motivated by a heat conduction problem”, *Taiwanese J. Math.*, **12**:8 (2008), 2001–2007.
- [3] C.-H. Chang, Y. S. Chow, Z. Wang, “On the asymptotic behaviour of heating times”, *Anal. Appl. (Singap.)*, **1**:4 (2003), 429–432.
- [4] J. Y. Chen, Y. Chow, “An inequality with application to a difference equation”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **69**:3 (2004), 519–528.
- [5] J. Y. Chen, Y. Chow, J. Hsieh, “Some results on a heat conduction problem by Myshkis”, *J. Comput. Appl. Math.*, **190**:1-2 (2006), 190–199.
- [6] Y. M. J. Chen, Y. Chow, J. Hsieh, “On a heat conduction problem by Myshkis”, *J. Difference Equ. Appl.*, **6**:3 (2000), 309–318.

Джун-И Чэнь

National Dong Hwa University, Taiwan

E-mail: jongyi@mail.ndhu.edu.tw

Поступило

29.08.2011

Юншионг Чжоу

Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan

E-mail: chow@math.sinica.edu.tw