Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Чебан, Аналог теоремы Камерона–Джонсона для линейных $\mathbb{C}$ -аналитических уравнений в гильбертовом пространстве, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 935–938

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 07:49:31

УДК 517.9

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ КАМЕРОНА–ДЖОНСОНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ $\mathcal{C}$ -АНАЛИТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Д. Н. Чебан

Известная теорема Камерона–Джонсона утверждает, что уравнение $\dot{x} = \mathcal{A}(t)x$ с рекуррентной (почти периодической по Бору) матрицей $\mathcal{A}(t)$ может быть приведено ляпуновским преобразованием к уравнению $\dot{y} = \mathcal{B}(t)y$ с кососимметрической матрицей $\mathcal{B}(t)$, если все решения уравнения $\dot{x} = \mathcal{A}(t)x$ и всех его предельных уравнений ограничены на всей прямой. В заметке дается обобщение этого результата на линейные $\mathcal{C}$ -аналитические уравнения в гильбертовом пространстве.

Библиография: 10 названий.

Известная теорема Камерона–Джонсона [1], [2] утверждает, что уравнение

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t)x \quad (1)$$

с рекуррентной (почти периодической по Бору) матрицей $\mathcal{A}(t)$ может быть приведено ляпуновским преобразованием к уравнению $\dot{y} = \mathcal{B}(t)y$ с кососимметрической матрицей $\mathcal{B}(t)$, если все решения уравнения (1) и всех его предельных уравнений ограничены на всей прямой. Целью настоящей заметки является обобщение этого результата на линейные $\mathcal{C}$ -аналитические уравнения в гильбертовом пространстве.

Пусть $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) – множество всех действительных (комплексных) чисел; $\mathbb{C}^m$ – m -мерное комплексное евклидово пространство; G – область из $\mathbb{C}^m$; H – вещественное или комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $|\cdot|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$; H_w – пространство H , снабженное слабой топологией; $[H]$ (соответственно $[H_w]$) – множество всех линейных непрерывных операторов, действующих в H (соответственно H_w), и снабженное операторной нормой (соответственно слабой топологией); $\mathcal{H}(G, [H])$ (соответственно $\mathcal{H}(G, \mathbb{C}^m)$, $\mathcal{H}(G, [H_w])$) – множество всех голоморфных функций $h: G \rightarrow [H]$ (соответственно $h: G \rightarrow \mathbb{C}^m$, $h: G \rightarrow [H_w]$), наделенное открыто-компактной топологией.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{A}(z)x; \\ \dot{z} = \Phi(z), \end{cases} \quad (2)$$

где $\Phi \in \mathcal{H}(G, \mathbb{C}^m)$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(G, [H])$. Будем предполагать, что второе уравнение системы (2) порождает динамическую систему $(G, \mathbb{R}, \sigma)$ на области G . Обозначим через $U(t, z)$ оператор Коши уравнения

$$\dot{x} = \mathcal{A}(z \cdot t)x \quad (z \in G), \quad (3)$$

где $z \cdot t = \sigma(z, t)$. Из общих решений дифференциальных уравнений (см., например, [3]–[5]) следует, что операторы $\{U(t, z) \mid t \in \mathbb{R}, z \in G\}$ удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $U(0, z) = I$ для всех $z \in G$, где I – единичный оператор в H ;
- 2) $U(t + \tau, z) = U(t, z \cdot \tau)U(\tau, z)$ для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$ и $z \in G$;
- 3) отображение $U: \mathbb{R} \times G \rightarrow [H]$ ($U: (t, z) \rightarrow U(t, z)$) непрерывно и при каждом $t \in \mathbb{R}$ отображение $U(t, \cdot): G \rightarrow [H]$ голоморфно.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть существует $C > 0$ такое, что

$$\|U(t, z)\| \leq C \quad (4)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Тогда существует $P \in \mathcal{H}(G, [H])$ такое, что

- а) отображение P биголоморфно, т. е. при каждом $z \in G$ оператор $P(z)$ обратим и отображение $P^{-1}: G \rightarrow [H]$ ($P^{-1}: z \rightarrow P^{-1}(z)$) голоморфно;
- б) $P^*(z) = P(z)$ при всех $z \in G$, где $P^*(z)$ – оператор, сопряженный к $P(z)$;
- в) при каждом $z \in G$ оператор $P(z)$ является положительно определенным;
- г) имеет место оценка $C^{-1}|x| \leq |P(z)x| \leq C|x|$ при всех $z \in G$ и $x \in H$;
- д) заменой $x = P(z \cdot t)y$ уравнение (3) приводится к уравнению

$$\dot{y} = B(z \cdot t)y \quad (5)$$

с косозермитовым оператором $B \in \mathcal{H}(G, [H])$, т. е. $B^*(z) = -B(z)$ при всех $z \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $t \in \mathbb{R}$ определим оператор S^t равенством

$$(S^t f)(z) = U^*(t, z)f(z \cdot t)U(t, z)$$

для всех $z \in G$ и $f \in \mathcal{H}(G, [H])$ (или $\mathcal{H}(G, [H_w])$). Легко проверить, что операторы $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$ удовлетворяют следующим условиям:

- 4) оператор S^t отображает $\mathcal{H}(G, [H])$ (или $\mathcal{H}(G, [H_w])$) в себя при каждом $t \in \mathbb{R}$;
- 5) $S^0 = I$, где I – единичный оператор в $\mathcal{H}(G, [H])$ (или $\mathcal{H}(G, [H_w])$);
- 6) $S^t S^\tau = S^{t+\tau}$ при всех $t, \tau \in \mathbb{R}$;
- 7) отображение S^t ($t \in \mathbb{R}$) линейно и непрерывно в топологии $\mathcal{H}(G, [H])$ (или $\mathcal{H}(G, [H_w])$).

Из условий 4)–7) следует, что семейство $\{S^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ – коммутативная группа линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}(G, [H])$ (или $\mathcal{H}(G, [H_w])$).

Положим $K = \{A \in [H] \mid \|A\| \leq C^2\}$ и заметим, что множество K слабо замкнуто. Так как любое ограниченное и замкнутое в H множество слабо компактно, то согласно теореме Тихонова множество K слабо компактно. Обозначим через

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{H}(G, [H]) \mid \|\gamma(z)\| \leq C^2\}.$$

Из интегральной формулы Коши [6, с. 339] и теоремы Асколи [6] следует, что Γ компактно в $\mathcal{H}(G, [H_w])$. Пусть

$$V = \overline{\text{conv}}\{S^t Q \mid t \in \mathbb{R}\},$$

где $Q(z) = I$ при всех $z \in G$ и I – единичный оператор в H , а $\overline{\text{con}V}$ – слабое замыкание выпуклой оболочки $\{S^t Q \mid t \in \mathbb{R}\}$. В силу линейности и непрерывности в топологии $\mathcal{H}(G, [H_w])$ операторов $\{S^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ множество V инвариантно, т.е. $S^t V \subseteq V$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$(S^t Q(z)x, x) = (U^*(t, z)U(t, z)x, x) = |U(t, z)x|^2 \quad (6)$$

при всех $z \in G$, $t \in \mathbb{R}$ и $x \in H$. Из (4) и (6) следует, что

$$C^{-2}|x|^2 \leq (S^t Q(z)x, x) \leq C^2|x|^2 \quad (7)$$

и, следовательно,

$$C^{-2}|x|^2 \leq (\mathcal{R}(z)x, x) \leq C^2|x|^2 \quad (8)$$

при всех $\mathcal{R} \in V$, $z \in G$ и $x \in H$. Кроме того, $\mathcal{R}^*(z) = \mathcal{R}(z)$ при всех $z \in G$ и $\mathcal{R} \in V$. Из неравенства (8) следует, что $\|\mathcal{R}(z)\| \leq C^2$ при всех $z \in G$ и, следовательно, $V \subseteq \Gamma$. Согласно теореме Маркова–Какутани [7] группа $\{S^t\}$ имеет в V общую неподвижную точку $\mathcal{R}$, т.е. $U^*(t, z)\mathcal{R}(z \cdot t)U(t, z) = \mathcal{R}(z)$ при всех $z \in G$ и $t \in \mathbb{R}$. Согласно (8) оператор $\mathcal{R}(z)$ является положительно определенным, и так как $\mathcal{R}^*(z) = \mathcal{R}(z)$, то согласно [8, теорема 12.33] (см. также [9, с. 65]) существует единственный обратимый, самосопряженный и положительно определенный оператор $\mathcal{M}(z)$ такой, что $\mathcal{M}^2(z) = \mathcal{R}(z)$ при всех $z \in G$. Из (8) следует, что $C^{-1}|x| \leq |\mathcal{M}(z)x| \leq C|x|$ при всех $z \in G$ и $x \in H$. Наконец, из равенства

$$\mathcal{R}^\alpha(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_L \lambda^\alpha (\mathcal{R}(z) - \lambda \cdot I)^{-1} d\lambda$$

($\alpha = \pm 1/2$), где L – простой контур, окружающий спектр оператора $\mathcal{R}(z)$, вытекает биголоморфность оператора $\mathcal{M}: G \rightarrow [H]$. Так как $U^*(t, z)\mathcal{M}^2(z \cdot t)U(t, z) = \mathcal{M}^2(z)$, то

$$\mathcal{M}(z \cdot t)U(t, z)\mathcal{M}^{-1}(z) = \mathcal{M}^{-1}(z \cdot t)U^{*-1}(t, z)\mathcal{M}(z)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Положим

$$\mathcal{V}(t, z) = \mathcal{M}(z \cdot t)U(t, z)\mathcal{M}^{-1}(z)$$

и заметим, что операторы $\{\mathcal{V}(t, z) \mid t \in \mathbb{R}, z \in G\}$ удовлетворяют условиям 1)–3) и, кроме того

$$8) \mathcal{V}^*(t, z) = \mathcal{V}^{-1}(t, z) \text{ при всех } t \in \mathbb{R} \text{ и } z \in G;$$

$$9) U(t, z)P(z) = P(z \cdot t)\mathcal{V}(t, z) \text{ при всех } t \in \mathbb{R} \text{ и } z \in G, \text{ где } P(z) = \mathcal{M}^{-1}(z).$$

Положим

$$\mathcal{B}(z) = \frac{d}{dt}\mathcal{V}(t, z)|_{t=0} = [\dot{\mathcal{M}}(z) + \mathcal{M}(z)\mathcal{A}(z)]P(z), \quad (9)$$

где

$$\dot{\mathcal{M}}(z) = \frac{d}{dt}\mathcal{M}(z \cdot t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathcal{M}(z)\Phi(z),$$

тогда $\mathcal{B} \in \mathcal{H}(G, [H])$ и

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t, z) = \mathcal{B}(z \cdot t)\mathcal{V}(t, z) \quad (10)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Таким образом, $\mathcal{V}(t, z)$ является оператором Коши уравнения (5). С другой стороны, согласно условию 8) имеем

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{V}}^{*-1}(t, z) = -\mathcal{B}^*(z \cdot t)\mathcal{V}^{*-1}(t, z), \\ \mathcal{V}^{*-1}(0, z) = I \end{cases} \quad (11)$$

при всех $t \in \mathbb{R}$ и $z \in G$. Из равенств (10), (11) и условия 8) следует, что $\mathcal{B}^*(z) = -\mathcal{B}(z)$ при всех $z \in G$. Наконец, для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что заменой $x = P(z \cdot t)y$ согласно условию 9) уравнение (3) приводится к уравнению (5). Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если точка $z \in G$ является стационарной (ω -периодической, квазипериодической и т. д.), то согласно [10] оператор-функция $P(z \cdot t)$ будет также стационарной (ω -периодической, квазипериодической и т. д.).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 имеет место и для систем разностных уравнений вида

$$\begin{cases} x(k+1) = \mathcal{A}(z \cdot k)x(k) \\ z(k+1) = \Phi(z(k)) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(G, [H])$ и $\Phi \in \mathcal{H}(G, \mathbb{C}^m)$, а также для систем дифференциальных и разностных уравнений с многомерным временем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cameron R. H. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients // J. Math. Phys. 1936. V. 15. P. 73–81.
- [2] Johnson R. A. On a Floquet theory for almost periodic, two-dimensional linear systems // J. Differential Equations. 1980. V. 37. P. 184–205.
- [3] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1958.
- [4] Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
- [5] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
- [6] Шварц Л. Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1973.
- [7] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1959.
- [8] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- [9] Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
- [10] Щербаков Б. А. Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1985.