Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Асимптотика собственного числа на непрерывном спектре двух квантовых волноводов, соединенных узкими окнами, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 227–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10160>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:54:54

Асимптотика собственного числа на непрерывном спектре двух квантовых волноводов, соединенных узкими окнами

С. А. Назаров

Найдены условия, при которых два плоских одинаковых волновода, соединенные узкими, шириной $\varepsilon \ll 1$, окнами, имеют собственное число на непрерывном спектре. Установлено, что собственное число появляется только при определенных значениях расстояния между окнами: для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеется последовательность $(2N - 1)/\sqrt{3} + O(\varepsilon)$ таких расстояний; здесь $N = 1, 2, 3, \dots$. Результат получен при помощи асимптотического анализа вспомогательного объекта – расширенной матрицы рассеяния.

Библиография: 26 названий.

1. Постановка задачи. Пусть Π – полуполоса $(0, +\infty) \times (0, 1)$, и пусть $\varpi^\varepsilon = \{x_1 : x_1 \in (a, a + \varepsilon)\}$ – отрезок на оси абсцисс с началом $a > 0$ и малой длиной $\varepsilon > 0$. Рассмотрим смешанную краевую задачу

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Pi, \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_D^\varepsilon = \Gamma_1 \cup (\Gamma_0 \setminus \overline{\varpi^\varepsilon}), \quad (2)$$

$$\partial_n u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_N^\varepsilon = \Gamma \cup \varpi^\varepsilon, \quad (3)$$

где $\Gamma = \{x = (x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\}$ – торец, а $\Gamma_p = \{x : x_1 > 0, x_2 = p\}$ – боковые стороны полуполосы; $p = 0, 1$. Кроме того, Δ_x – оператор Лапласа, записанный в декартовой системе координат x на плоскости $\mathbb{R}^2$, λ^ε – спектральный параметр, а ∂_n – производная вдоль внешней нормали, причем $\partial_n = -\partial_1$ на Γ и $\partial_n = -\partial_2$ на Γ_0 ; $\partial_j = \partial/\partial x_j$ при $j = 1, 2$. Непрерывный спектр задачи (1)–(3) совпадает с лучом $\sigma_c = [\pi^2, +\infty)$, а на отрезке $(0, \pi^2)$ располагается дискретный спектр σ_d^ε . Основная цель статьи – определить условия, при которых задача (1), (2) имеет собственное число $\lambda_1^\varepsilon \in (\pi^2, 4\pi^2)$. Такое собственное число вкраплено в непрерывный спектр и является неустойчивым, что и предопределяет трудности асимптотического анализа.

Искусственные краевые условия Неймана (3) возникают в результате сужения на полуполосу Π задачи Дирихле для двух одинаковых квантовых волноводов

$$\Pi_\pm = \{x : x_1 \in \mathbb{R}, \pm x_2 \in (0, 1)\},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00348).

соединенных окнами

$$\varpi_{\pm}^{\varepsilon} = \{x : \pm x_1 \in (a, a + \varepsilon), x_2 = 0\}$$

(см. рис. 1). Если λ_1^{ε} – собственное число задачи (1)–(3), то соответствующая собственная функция u_1^{ε} , продолженная по четности через оси абсцисс и ординат, оказывается решением задачи в описанном сочленении квантовых волноводов

$$-\Delta_x u_1^{\varepsilon}(x) = \lambda_1^{\varepsilon} u_1^{\varepsilon}(x), \quad x \in \Xi^{\varepsilon} = \bigcup_{\pm} (\Pi_{\pm} \cup \varpi_{\pm}^{\varepsilon}), \quad (4)$$

$$u_1^{\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in \partial \Xi^{\varepsilon}. \quad (5)$$

Отметим, что продолженная функция u_1^{ε} бесконечно дифференцируема внутри области Ξ^{ε} именно благодаря постановке искусственных условий Неймана, сохраняющих гладкость решения уравнения Гельмгольца при четном продолжении. Искусственные условия Дирихле требуют нечетного продолжения. В п. 8 будет установлено, что для всякого собственного числа $\lambda^{\varepsilon} \in (0, 4\pi^2]$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ соответствующая собственная функция задачи (4), (5) обязана быть четной по обоим переменным x_1 и x_2 , т.е. обсуждаемые спектральные задачи эквивалентны.

Исследованию дискретного спектра квантовых волноводов, соединенных через “окна”, посвящено большое количество публикаций. Сама модель двух волноводов с узким окном предложена в [1], [2], а ее физическая подоплека обсуждается в [3]. В [1] были установлены двусторонние оценки собственных чисел, показывающие, в частности, что дискретный спектр всегда не пуст (см. также [2]), а с увеличением ширины окна его полная кратность неограниченно возрастает. Для малого ε собственное число $\lambda_0^{\varepsilon} \in (0, \pi^2)$ единственно: в [4] проверены оценки, в [5] построена (но не обоснована) модель задачи, а в [6] доказана асимптотическая формула для собственного числа, которая в переложении для задачи (1)–(3) выглядит так (ср. конец п. 5):

$$\lambda_0^{\varepsilon} = \pi^2 - \frac{\pi^6}{16} \varepsilon^4 + O(\varepsilon^5), \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (6)$$

Задачи о сочленении волноводов в разнообразных постановках изучались в работах [7]–[12] и др. Задача (4), (5) рассматривалась в статье [10], но там строились асимптотики при фиксированном ε и большом a , причем, как обычно, исследовался только дискретный спектр.

Рис. 1

Автору неизвестны публикации асимптотических результатов о части точечного спектра σ_p^{ε} , попадающей на непрерывный спектр сочленения квантовых волноводов. Дело в том, что собственные числа из множества $\sigma_p^{\varepsilon} \setminus \sigma_d^{\varepsilon}$ неустойчивы по своей

природе и возмущение данных задачи обычно превращает их в точки комплексного резонанса (ср. [13]). Именно поэтому даже по формулировке основной результат данной статьи, относящийся к асимптотике собственного числа на непрерывном спектре, отличается от привычного.

ТЕОРЕМА 1. *Зафиксируем натуральное число $N \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Найдутся такие положительные величины ε_N и c_N , что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_N)$ существует размер*

$$a_N^\varepsilon \in \left(\frac{\sqrt{3}}{6}(2N-1) - c_N\varepsilon, \frac{\sqrt{3}}{6}(2N-1) + c_N\varepsilon \right), \quad (7)$$

при котором задача (1)–(3), а значит, и задача (4), (5) имеют единственное собственное число

$$\lambda_1^\varepsilon = 4\pi^2 - \frac{1}{4}\pi^4\varepsilon^4 + \tilde{\lambda}_1^\varepsilon, \quad |\tilde{\lambda}_1^\varepsilon| \leq c_N\varepsilon^5 \quad (8)$$

на сегменте $[\pi^2, 4\pi^2]$ непрерывного спектра σ_c .

Существование последовательности¹ $\{a_n^\varepsilon\}_{n \in \mathbb{N}}$ критических расстояний между окнами $\varpi_\pm^\varepsilon$, соединяющими волноводы $\Pi_\pm$, доказывается по разработанной в [14] схеме, которая основана на понятии расширенной матрицы рассеяния S^ε и достаточном условии [15] появления захваченной волны. Для реализации этой схемы помимо построения асимптотики элементов S_{jk}^ε матрицы S^ε требуются дополнительные сведения о разрешимости задачи (1)–(3) в весовых классах. В [14] изучались регулярные возмущения квантовых волноводов, для которых предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ осуществляется просто, при помощи подходящей почти тождественной замены координат (ср. [16; § 7.6.5]). В случае сингулярного возмущения краевого условия для такого предельного перехода нужны иные технические приемы – именно им и уделяется основное внимание в статье, а утверждения, проверка которых не отличается от [14], приводятся без комментариев.

Обрисует структуру статьи. В очередных трех пунктах представлены вычисления, необходимые для проверки теоремы 1. В п. 2 дано определение расширенной матрицы рассеяния S^ε и сформулировано достаточное условие захвата волны (предложение 1), превращающееся в критерий согласно лемме 3. Формальная асимптотика матрицы S^ε построена в п. 3, а в п. 4 продемонстрирована процедура поиска собственного числа на непрерывном спектре. В п. 5 дано объяснение аномалиям Вуда. В п. 6 собраны вспомогательные утверждения, позволившие, в частности, в п. 7 оправдать асимптотику расширенной матрицы рассеяния. Наконец, в п. 8 обсуждаются возможные обобщения, а также формулируются открытые вопросы и гипотезы.

???

2. Расширенная матрица рассеяния. При $\lambda^\varepsilon \in (\pi^2, 4\pi^2)$ в волноводе возникают две, уходящая (плюс) и приходящая (минус), осциллирующие волны

$$w_1^\pm(x) = (\lambda^\varepsilon - \pi^2)^{-1/4} \sin(\pi x_2) e^{\pm i x_1 \sqrt{\lambda^\varepsilon - \pi^2}}, \quad (9)$$

¹В [1], [12] уже возникали последовательности критических длин между соединительными окнами, однако их происхождение другое: при прохождении через критическую длину общая кратность дискретного спектра увеличивается на единицу.

а также бесконечный набор экспоненциальных волн, среди которых нам понадобятся следующие две:

$$v_2^\pm(x) = (4\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/4} \sin(2\pi x_2) e^{\pm x_1 \sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon}}. \quad (10)$$

Согласно [15] введем экспоненциально растущие на бесконечности волновые пакеты

$$w_2^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_2^+(x) \mp i v_2^-(x)) \quad (11)$$

и заметим, что функции (9) и (11) удовлетворяют соотношениям

$$Q(w_j^\pm, w_k^\pm) = \pm i \delta_{j,k}, \quad Q(w_j^\pm, w_j^\mp) = 0, \quad j, k = 1, 2. \quad (12)$$

Здесь Q – симплектическая форма,

$$Q(u, v) = \int_0^1 t(\overline{v(R, x_2)} \partial_1 u(R, x_2) - u(R, x_2) \overline{\partial_1 v(R, x_2)}) dx_2,$$

не зависящая от параметра $R > R_0 > a + \varepsilon$ для функций u и v , удовлетворяющих уравнению Гельмгольца в полуполосе $(R_0, +\infty) \times (0, 1)$ и обращающихся в нуль на ее боковых сторонах. Как показано в [15] (см. также [14; замечание 5]), условия (12) гарантируют наличие решений U_j^ε задачи (1)–(3) с таким поведением при $x_1 \rightarrow +\infty$:

$$U_j^\varepsilon(x) = w_j^-(x) + \sum_{k=1}^2 S_{kj}^\varepsilon w_k^+(x) + O(e^{-x_1 \sqrt{9\pi^2 - \lambda^\varepsilon}}), \quad x_1 > R_0. \quad (13)$$

Кроме того, коэффициенты S_{kj}^ε образуют матрицу размером 2×2 , которая оказывается унитарной, называется *расширенной матрицей рассеяния* и фигурирует в достаточном условии [15] существования захваченной волны (ср. [14; теорема 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1) Если $S_{22}^\varepsilon = -1$ при некотором $\lambda^\varepsilon \in (\pi^2, 4\pi^2)$, то решение U_2^ε принадлежит пространству Соболева $H^1(\Pi)$, экспоненциально затухает на бесконечности и является собственной функцией задачи (1)–(3), отвечающей ее собственному числу λ^ε .

2) Пусть $\lambda^\varepsilon \in (\pi^2, 4\pi^2)$ – собственное число задачи (1)–(3), и пусть, кроме того, отличен от нуля коэффициент K^ε в разложении

$$u^\varepsilon(x) = K^\varepsilon v_2^-(x) + O(e^{-x_1 \sqrt{9\pi^2 - \lambda^\varepsilon}}), \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

соответствующей собственной функции. Тогда $S_{22}^\varepsilon = -1$.

Для того чтобы достаточное условие из предложения 1 превратилось в критерий, нужно убедиться в отсутствии быстросзатухающих собственных функций, т.е. имеющих нулевой коэффициент K^ε в разложении (14) (ср. [14; следствие 6]). Этот факт установлен далее в лемме 2.

Понадобятся еще две формулы, проверенные в [14]. Во-первых,

$$S_{12}^\varepsilon = S_{21}^\varepsilon, \quad (15)$$

т.е. S^ε – симметричная (но, вообще говоря, не эрмитова) матрица, и, во-вторых, коэффициент отражения s^ε в решении

$$u^\varepsilon(x) = w_1^-(x) + s^\varepsilon w_1^+(x) + O(e^{-x_1 \sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon}}), \quad x_1 \rightarrow +\infty,$$

задачи (1)–(3), инициированной приходящей с бесконечности волной w_1^- , связан с расширенной матрицей рассеяния формулой

$$s^\varepsilon = S_{11}^\varepsilon - \frac{S_{12}^\varepsilon S_{21}^\varepsilon}{1 + S_{22}^\varepsilon}, \quad (16)$$

причем в случае $S_{22}^\varepsilon = -1$ (ср. предложение 1) вычитаемое равно нулю в согласии с равенством $S_{12}^\varepsilon = S_{21}^\varepsilon = 0$, вытекающим из первого соотношения

$$|S_{j1}^\varepsilon|^2 + |S_{j2}^\varepsilon|^2 = 1, \quad j = 1, 2, \quad S_{11}^\varepsilon \overline{S_{12}^\varepsilon} + S_{21}^\varepsilon \overline{S_{22}^\varepsilon} = 0. \quad (17)$$

Сами соотношения (17) выполнены в силу унитарности матрицы S^ε .

3. Формальный асимптотический анализ. Для собственного числа примем асимптотический анзац

$$\lambda_1^\varepsilon = 4\pi^2 - \varepsilon^4 \mu + \dots, \quad \mu > 0. \quad (18)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие члены, не существенные для предпринимаемого анализа. Понятно, что

$$\sqrt{4\pi^2 - \lambda_1^\varepsilon} = \varepsilon^2 \sqrt{\mu} + \dots, \quad \sqrt{\lambda_1^\varepsilon - \pi^2} = \sqrt{3}\pi + \dots. \quad (19)$$

Разложения элементов расширенной матрицы рассеяния возьмем такими:

$$S_{kk}^\varepsilon = S_{kk}^0 + \varepsilon^2 S'_{kk} + \dots, \quad k = 1, 2, \quad S_{21}^\varepsilon = \varepsilon S_{21}^0 + \varepsilon^3 S'_{21} + \dots. \quad (20)$$

При учете соотношений (19) и (20) перепишем представление (13) решения U_2^ε следующим образом:

$$\begin{aligned} U_2^\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-1} (4\mu)^{-1/4} \sin(2\pi x_2) \\ &\quad \times (1 + i + (1 - i)S_{22}^0 + \varepsilon^2 (S'_{22} + \sqrt{\mu} x_1 (1 - i + (1 + i)S_{22}^0)) + \dots) \\ &\quad \times \varepsilon (3\pi^2)^{-1/4} \sin(\pi x_2) S_{12}^0 + \dots. \end{aligned} \quad (21)$$

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [17], [18] и др.) в интерпретации [19], [14], рассматривая (21) как внешнее разложение и вводя внутреннее разложение

$$U_2^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} U_2^0(x) + \chi(x) W_2^0(\varepsilon^{-1}(x_1 - a), \varepsilon^{-1}x_2) + \varepsilon U_2'(x) + \dots. \quad (22)$$

Здесь χ – гладкая срезающая функция с малым носителем, равная единице в окрестности точки $(a, 0)$. Асимптотическая формула (21) приемлема на удалении от торца γ и от окна ϖ^ε , а в конечной части волновода Π справедлива формула (22), включающая помимо членов U_2^0 и U_2' регулярного типа пограничный слой W_2^0 , записанный при помощи “быстрых” переменных,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) = \varepsilon^{-1}(x_1 - a, x_2).$$

Отметим, что функция $\xi \mapsto W_2^0(\xi)$ затухает при $|\xi| \rightarrow +\infty$, т.е. для описания поведения волнового поля около окна ϖ^ε применяем метод составных асимптотических разложений (см. [20], [21] и др.).

Поскольку предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$ придает спектральному параметру (18) пороговое значение $\lambda^0 = 4\pi^2$ и устраняет краевое условие Неймана на отрезке ϖ^ε длиной ε , главный член U_2^0 асимптотики (22) должен удовлетворять однородной ($f = 0$) предельной задаче

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^0(x) - 4\pi^2 u^0(x) &= f(x), & x \in \Pi, \\ u^0(x_1, p) &= 0, & x_1 \in (0, +\infty), \quad p = 0, 1, \\ -\partial_1 u^0(0, x_2) &= 0, & x_2 \in (0, 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Однородная задача (23) имеет два линейно независимых ограниченных решения

$$u_1^0(x) = (e^{-ix_1\sqrt{3\pi}} + e^{+ix_1\sqrt{3\pi}}) \sin(\pi x_2), \quad u_2^0(x) = \sin(2\pi x_2). \quad (24)$$

Сращивая внутреннее (22) и внешнее (21) разложения, положим

$$U_2^0(x) = (4\mu)^{-1/4} (1 + i + (1 - i)S_{22}^0) \sin(2\pi x_2). \quad (25)$$

Функция $\varepsilon^{-1}U_2^0$ удовлетворяет условию Дирихле (2) и условию Неймана (3) на торце γ , но оставляет невязку

$$2\pi\varepsilon^{-1}(4\mu)^{-1/4}(1 + i + (1 - i)S_{22}^0) + \dots \quad (26)$$

в условии Неймана на отрезке ϖ^ε . Компенсируем главную часть невязки (26) при помощи решения типа пограничного слоя

$$W_2^0(\xi) = 2\pi(4\mu)^{-1/4}(1 + i + (1 - i)S_{22}^0)w(\xi), \quad (27)$$

где w – затухающее на бесконечности решение следующей смешанной краевой задачи в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{\xi : \xi_2 > 0\}$:

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi w(\xi) &= 0, & \xi \in \mathbb{R}_+^2, \\ w(\xi_1, 0) &= 0, & \xi_1 \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ -\frac{\partial w}{\partial \xi_2}(\xi_1, 0) &= 1, & \xi_1 \in (0, 1). \end{aligned}$$

Решение этой задачи² находится при помощи конформного отображения Жуковского (см. [22; гл. 11, § 3]). Далее понадобится только соотношение

$$w(\xi) = \frac{1}{4} \frac{\xi_2}{|\xi|^2} + O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right), \quad |\xi| \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

Заметим, что

$$W(\varepsilon^{-1}(x_1 - a), \varepsilon^{-1}x_2) = \varepsilon \frac{\pi}{4} (4\mu)^{-1/4} (1 + i + (1 - i)S_{22}^0 Y(x)) + \dots, \quad (29)$$

²Функция w , продолженная по нечетности на нижнюю полуплоскость $\mathbb{R}_-^2$, является решением внешней задачи Неймана для одномерного разреза-сегмента. Явные формулы, широко известные в теории трещин, написаны [22; гл. 11, § 3] в координатах с центром в середине сегмента, однако выбор системы координат не сказывается на используемом соотношении (28).

где

$$Y(x) = \frac{x_2}{(x_1 - a)^2 + x_2^2},$$

подставим разложения (18), (22) и (29) в задачу (1)–(3) и соберем множители при ε . В результате получим, что поправка U'_2 регулярного типа удовлетворяет предельной задаче (23) с правой частью

$$f(x) = \frac{\pi}{4}(4\mu)^{-1/4}(1+i+(1-i)S_{22}^0)([\Delta_x, \chi(x)] + 4\pi^2\chi(x))Y(x), \quad (30)$$

где $[\Delta_x, \chi]$ – коммутатор оператора Лапласа с оператором умножения на срезающую функцию χ . Поскольку коэффициенты дифференциально оператора $[\Delta_x, \chi]$ обращаются в нуль в окрестности точки $P = (a, 0)$, к которой стягивается отрезок ϖ^ε , функция (30) имеет особенность $O(|x - P|^{-1})$, а значит, функционал f принадлежит сопряженному пространству $H^1(\Pi; \Gamma_D^0)^*$; здесь $\Gamma_D^0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Таким образом, задача (23) с правой частью (30) имеет решение $U'_2 \in H_{\text{loc}}^1(\bar{\Pi})$, причем ввиду компактности носителя функции f метод Фурье доставляет разложение

$$U'_2(x) = C'_1 \sin(\pi x_2) e^{+ix_1 \sqrt{3\pi}} + (C'_{20} + x_1 C'_{21}) \sin(2\pi x_2) + O(e^{-x_1 \sqrt{8\pi}}), \quad x_1 \rightarrow +\infty. \quad (31)$$

Для вычисления коэффициентов C'_{21} или C'_1 (коэффициент C'_{20} произволен – ср. список (24) решений однородной задачи) подставим функции U'_2 и u_2^0 или u_1^0 в формулу Грина на прямоугольнике $\Pi(R) = (0, R) \times (0, 1)$ с круговым вырезом

$$\mathbb{B}_\delta^+ = \{x : (x_1 - a)^2 + x_2^2 < \delta^2, x_1 > 0\}$$

(рис. 2).

Рис. 2

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi(R) \setminus \mathbb{B}_\delta^+} \sin(2\pi x_2) (\Delta_x + 4\pi^2) U'_2(x) dx \\ &= -\frac{\pi}{4}(4\mu)^{-1/4}(1+i+(1-i)S_{22}^0) \int_{\Pi(R) \setminus \mathbb{B}_\delta^+} \sin(2\pi x_2) (\Delta_x + 4\pi^2) (\chi(x)Y(x)) dx. \end{aligned} \quad (32)$$

Проинтегрируем по частям и перейдем к пределу при $R \rightarrow +\infty$ и $\delta \rightarrow +0$. С точностью до бесконечно малых левый интеграл равен

$$\int_0^1 \sin(2\pi x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} (C'_1 \sin(\pi x_2) e^{+ix_1 \sqrt{3\pi}} + (C'_{20} + x_1 C'_{21}) \sin(2\pi x_2))|_{x_1=R} dx_2 = \frac{1}{2} C'_{21},$$

а правый равен

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4} \mu^{-1/4} (1+i+(1-i)S_{22}^0) \delta \int_0^\pi \left(\rho \sin \psi \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\sin \psi}{\rho} - \frac{\sin \psi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sin \psi) \right) \Big|_{\rho=\delta} d\psi \\ &= -\frac{1}{4} \pi^2 (4\mu)^{-1/4} (1+i+(1-i)S_{22}^0). \end{aligned}$$

Здесь (ρ, ψ) – система полярных координат с центром P , причем использованы соотношения $Y(x) = \rho^{-1} \sin \psi$ и $\sin(2\pi x_2) = 2\pi \rho \sin \psi + O(\rho^3)$. Таким образом,

$$C'_{21} = -\frac{1}{2} \pi^2 (4\mu)^{-1/4} (1+i+(1-i)S_{22}^0).$$

Сравнивая множители при εx_1 во внешнем разложении (21) и во внутреннем (22), уточненном формулами (25) и (31), видим, что

$$(4\mu)^{-1/4} \sqrt{\mu} (1-i+(1+S_{22}^0)) = C'_{21}, \quad (33)$$

а значит,

$$S_{22}^0 = -\frac{2\sqrt{\mu}(1-i) + \pi^2(1+i)}{2\sqrt{\mu}(1+i) + \pi^2(1-i)} = -\frac{4\pi^2 \sqrt{\mu} + i(\pi^4 - 4\mu)}{\pi^4 + 4\mu}. \quad (34)$$

Подчеркнем, что

$$S_{22}^0 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{4} \pi^4.$$

Вычисляя коэффициент C'_1 при помощи тех же приемов, получаем аналогичные (33) и (32) формулы

$$(3\pi^2)^{-1/4} S_{12}^0 = C'_1,$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi(R) \setminus \mathbb{B}_\delta^+} u_1^0(x) (\Delta_x + 4\pi^2) U_2'(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} (4\mu)^{-1/4} (1+i+(1-i)S_{22}^0) \int_{\Pi(R) \setminus \mathbb{B}_\delta^+} u_1^0(x) (\Delta_x + 4\pi^2) (\chi(x) Y(x)) dx, \end{aligned}$$

откуда выводим равенство

$$S_{12}^0 = \frac{\pi^3}{2} (3\pi^2)^{-1/4} (4\mu)^{-1/4} (1-i-(1+i)S_{22}^0) \cos(\sqrt{3}a\pi). \quad (35)$$

Отметим, что

$$S_{12}^0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{6} (2N-1), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (36)$$

Главный член асимптотики элемента S_{11}^ε расширенной матрицы рассеяния определяется по прежней схеме, но значительно проще. В самом деле, внешнее разложение (13) решения U_1^ε принимает вид

$$U_1^\varepsilon(x) = (3\pi^2)^{-1/4} \sin(\pi x_2) (e^{-ix_1 \sqrt{3}\pi} + S_{11}^0 e^{+ix_1 \sqrt{3}\pi}) + (4\mu)^{-1/4} \sin(2\pi x_2) S_{12}^0 + \dots$$

Поэтому главный член внутреннего разложения задан формулой

$$U_1^0(x) = (3\pi^2)^{-1/4} u_1^0(x) + (4\mu)^{-1/4} S_{12}^0 u_2^0(x),$$

и по необходимости

$$S_{11}^0 = 1. \quad (37)$$

4. Идентификация собственного числа. При условии

$$\lambda^\varepsilon \in (4\pi^2 - C\varepsilon^4, 4\pi^2 - c\varepsilon^4), \quad C > c > 0,$$

в п. 7 будут установлены следующие оценки остатков:

$$\tilde{S}_{kk}^\varepsilon = S_{kk}^\varepsilon - S_{kk}^0 \quad \text{и} \quad \tilde{S}_{21}^\varepsilon = S_{21}^\varepsilon - \varepsilon S_{21}^\varepsilon$$

в представлениях (20) элементов расширенной матрицы рассеяния:

$$\tilde{S}_{kk}^\varepsilon \leq c\varepsilon |\ln \varepsilon|^{3/2}, \quad k = 1, 2, \quad |\tilde{S}_{21}^\varepsilon| \leq c\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^{3/2}. \quad (38)$$

От логарифмов в мажорантах из оценок (38) можно избавиться, однако они не мешают дальнейшим рассуждениям, но их устранение требует дополнительных длинных преобразований.

В соответствии с формулами (35) и (36) положим

$$\mu = \frac{1}{4}\pi^2 + \tau, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{6}(2N - 1) + \kappa, \quad (39)$$

где τ и κ – дополнительные малые параметры. Заметим, что при малых $\varepsilon > 0$ и τ эквивалентными оказываются такие равенства:

$$\operatorname{Im} S_{22}^\varepsilon = 0, \quad \operatorname{Re} S_{21}^\varepsilon = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad S_{22}^\varepsilon = -1. \quad (40)$$

Нужно лишь убедиться в справедливости импликации $\Rightarrow$. Пользуясь вытекающим из посылки и равенства (15) соотношением $S_{12}^\varepsilon = S_{21}^\varepsilon = it_\varepsilon$, $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$, а также асимптотическими формулами (20), (38) и (34), (37), обнаруживаем, что последнее равенство (17) принимает вид

$$-2it_\varepsilon + O((\varepsilon + |\tau|)|t_\varepsilon|) = 0.$$

Таким образом, $t_\varepsilon = 0$ и $S_{21}^\varepsilon = 0$ при малых ε и $|\tau|$, а значит, $|S_{22}^\varepsilon| = 1$ в силу первого равенства (17). Поскольку число S_{22}^ε вещественно и расположено близко к -1 в силу соотношений (34) и (39), (38), приходим к нужному выводу.

Для того чтобы соблюсти необходимое и достаточное условие захвата волны, указанное в предложении 1 (см. также лемму 2), решим систему двух уравнений, указанных первыми в формулах (40). При помощи соотношений (34) и (35) перепишем их следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau &= -(\pi^4 + 4\mu)^{-1} \operatorname{Im} \tilde{S}_{22}^\varepsilon, \\ \kappa &= \frac{(-1)^N}{\sqrt{3}\pi} \arcsin \left(\frac{2}{\pi^3} \left(\frac{3\pi^2}{4\mu} \right)^{1/4} \frac{\pi^4 + 4\mu}{\pi^2 \sqrt{\mu} + 2\mu} \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \tilde{S}_{21}^\varepsilon \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Правые части (41) порождают непрерывный оператор T , который при малом $\varepsilon > 0$ и некотором $c_N > 0$ переводит круг

$$\mathbb{B}_{c_N \varepsilon} = \{(\tau, \kappa) \in \mathbb{R}^2 : |\tau|^2 + |\kappa|^2 \leq c_N^2 \varepsilon^2\}$$

в часть этого круга. В итоге принцип Шаудера (теорема о неподвижной точке) устанавливает существование малого решения (τ, κ) системы уравнений (41), т.е. теорема 1 доказана в части существования.

Для проверки единственности сначала заметим, что в случае

$$\lambda^0 \in (\pi^2 + \delta, 4\pi^2 - \delta),$$

где $\delta > 0$ – малое, но фиксированное число, построение асимптотики элементов расширенной матрицы рассеяния значительно упрощается. Дело в том, что предельная задача

$$\begin{aligned} -\Delta_x u(x) &= \lambda^0 u(x), & x \in \Pi, \\ u(x_1, p) &= 0, & x_1 > 0, \quad p = 0, 1, \\ -\partial_1 u(0, x_2) &= 0, & x_2 \in (0, 1), \end{aligned} \quad (42)$$

имеет решения

$$\sin(\pi x_2)(e^{-ix_1\sqrt{\lambda^0-\pi^2}} + e^{+ix_1\sqrt{\lambda^0-\pi^2}}), \quad \sin(2\pi x_2)(e^{x_1\sqrt{4\pi^2-\lambda^0}} + e^{-x_1\sqrt{4\pi^2-\lambda^0}}),$$

а значит, в соответствии с формулами (13)

$$S^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Посредством малых возмущений такой матрицы нельзя обеспечить выполнение необходимого условия захвата волны, т.е. число (42) не может быть собственным.

Осталось исключить две ситуации: имеется собственное число $\lambda_2^{\varepsilon_k}$, сходящееся к $\pi^2 + 0$ вдоль бесконечно малой подпоследовательности $\{\varepsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, или пара собственных чисел $\lambda_1^{\varepsilon_k}, \lambda_2^{\varepsilon_k} \rightarrow 4\pi^2 - 0$ при $\varepsilon_k \rightarrow +0$. Это сделано в работе [14], причем предложенные приемы безразличны к способу возмущения ограниченной части волновода. Единственное требование – оценка (49) с не зависящей от ε постоянной, которая доказана в лемме 1.

5. Аномалии Вуда. В силу формул (38) и (20), (34), (37) собственные числа расширенной матрицы рассеяния принимают вид

$$\varsigma_1^\varepsilon(\mu) = 1 + O(\varepsilon), \quad \varsigma_2^\varepsilon(\mu) = -\frac{4\pi^2\sqrt{\mu} - i(\pi^4 - 4\mu)}{\pi^4 + 4\mu} + O(\varepsilon). \quad (44)$$

Найдется такое $\delta > 0$, что $\pm \operatorname{Im} \varsigma_2^\varepsilon((1/4)\pi^4 \pm \delta\varepsilon) > 0$, а значит, $\varsigma_2^\varepsilon(\mu^*(\varepsilon)) = -1$ при некотором значении $\mu^*(\varepsilon) = (1/4)\pi^4 + O(\varepsilon)$, так как числа (44) лежат на единичной окружности $\mathbb{S}^1$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и непрерывно зависят от параметра μ . Если $a = a_N^\varepsilon$ в согласии с теоремой 1, то $4\pi^2 - \varepsilon^4\mu^*(\varepsilon)$ – собственное число задачи (1)–(3), и в силу предложения 1 собственному числу $\varsigma_2^\varepsilon(\mu^*(\varepsilon))$ матрицы S^ε отвечает собственный вектор $(0, 1)$, порождающий захваченную волну.

В случае $a \in ((\sqrt{3}/6)(2N-1), (\sqrt{3}/6)(2N+1))$ равенство $\cos(\sqrt{3}a\pi) = 0$ невозможно, т.е. $S_{12}^\varepsilon \neq 0$ в силу соотношений (20), (35) и (38). Поскольку $S_{22}^\varepsilon \neq -1$ в точке $\mu^*(\varepsilon)$, а предложение 1 совместно с леммой 2 предоставляют критерий захвата волны, собственный вектор $(a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon)$ матрицы S^ε , отвечающий ее собственному числу $\varsigma_2^\varepsilon(\mu^*(\varepsilon)) = -1$, имеет ненулевую компоненту a_1^ε . Исключая a_2^ε из системы уравнений

$$S_{11}^\varepsilon a_1^\varepsilon + S_{12}^\varepsilon a_2^\varepsilon = -a_1^\varepsilon, \quad S_{21}^\varepsilon a_1^\varepsilon + S_{22}^\varepsilon a_2^\varepsilon = -a_2^\varepsilon,$$

находим, что

$$(S_{11}^\varepsilon - S_{12}^\varepsilon(1 + S_{22}^\varepsilon)^{-1}S_{22}^\varepsilon)a_1^\varepsilon = -a_1^\varepsilon.$$

Теперь соотношение (16) показывает, что $s^\varepsilon = -1$ в точке $\mu^*(\varepsilon)$. Итак, на удалении от порога имеем $s^\varepsilon = 1 + O(\varepsilon)$ в силу формулы (43), однако при приближении спектрального параметра к порогу на расстояние $O(\varepsilon^4)$ происходит быстрое изменение коэффициента отражения, и он становится равным -1 в точке $\lambda^\varepsilon = 4\pi^2 - \varepsilon^4 \mu^*(\varepsilon)$. Моментальная околопороговая перестройка дифракционной картины, известная как аномалия Вуда (см. [23], [24] и др.), прослеживается и в вытекающей из представлений (20) и (16) асимптотической формуле³

$$s^\varepsilon = S_{11}^0 + \varepsilon^2 S_{11}' + \frac{\varepsilon^2 S_{12}^0 + \dots}{1 + S_{22}^0 + \varepsilon^2 S_{12}' + \dots} + \dots \quad (45)$$

Дело в том, что в случае $S_{12}^0 \neq 0$ при малом $1 + S_{22}^0$, т.е. для близких к $\pi^4/4$ значений μ дробь из правой части (45) перестает быть возмущением порядка ε^2 , и асимптотическая формула $s^\varepsilon = S_{11}^0 + \dots = 1 + \dots$ разрушается. Единственное исключение – обращение в нуль диагональных элементов (15) расширенной матрицы рассеяния, которое, как установлено в п. 4, приводит к образованию собственного числа (8) задачи (1)–(3).

Итак, асимптотический анализ показывает, что при $\lambda^\varepsilon \rightarrow 4\pi^2 - 0$ аномалии Вуда отсутствуют исключительно при образовании собственного числа (8), – коэффициент отражения s^ε меняется плавно потому, что в критической точке $\mu^*(\varepsilon)$ дробь полностью исчезает из формулы (16). Если собственное число отсутствует, превратившись в точку комплексного резонанса, то скорость изменения коэффициента s^ε в непосредственной близости от порога (ниже него) становится очень большой, порядка ε^{-4} . Таким образом, бытующее мнение о захваченной волне как о причине аномалии Вуда ошибочно.

Подчеркнем, что вне непрерывного спектра, т.е. для спектрального параметра $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$, аналогичные (11) волновые пакеты

$$2^{-1/2}(\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/4} \sin(\pi x_2) (e^{+x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}} \mp i e^{-x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}})$$

порождают скалярную характеристику $S^\varepsilon \in \mathbb{S}^1$, вполне аналогичную расширенной матрице рассеяния. В частности, равенство $S^\varepsilon = -1$ идентифицирует собственное число (6), принадлежащее дискретному спектру задачи (1)–(3). Такое собственное число устойчиво по отношению к малым вариациям данных задачи (размеров a и ε), что можно объяснить, в частности, упрощенным поведением скаляра по сравнению с унитарной матрицей. Эту характеристику можно использовать для нахождения и обоснования асимптотики собственных чисел ниже порога непрерывного спектра. Ранее для этих целей обычно применялись принцип Бирмана–Швингера, анализ полюсов функции Грина или аппарат теории спектральной меры (ср. [2], [6], [19] соответственно).

6. Дополнительные сведения. Приведем обобщенную постановку неоднородной (с правой частью f в уравнении Гельмгольца) задачи (1)–(3) с параметром $\lambda^\varepsilon \in [\pi^2, 4\pi^2]$ в пространстве $W_\beta^1(\Pi)$, состоящем из функций $u^\varepsilon \in H_{\text{loc}}^1(\bar{\Pi})$, для которых конечна весовая норма

$$\|u^\varepsilon; W_\beta^1(\Pi)\| = (\|e^{\beta x_1} \nabla u^\varepsilon; L_2(\Pi)\|^2 + \|e^{\beta x_1} u^\varepsilon; L_2(\Pi)\|^2)^{1/2}.$$

³Оценки (38) не дают ее оправдания, но после вычисления поправок S'_{pq} она может быть обоснована по схеме из п. 7.

Здесь $\beta \in \mathbb{R}$ – весовой показатель, $\nabla = \text{grad}$, и $L_2(\Pi)$ – пространство Лебега, скалярное произведение в котором обозначаем $(\cdot, \cdot)_\Pi$. Если $\beta > 0$, то в $W_\beta^1(\Pi)$ содержатся экспоненциально затухающие функции, но в случае $\beta < 0$ допустим определенный экспоненциальный рост. Подпространство $\dot{W}_\beta^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$ выделено из $W_\beta^1(\Pi)$ краевым условием Дирихле (2). Ясно, что $W_0^1(\Pi) = H^1(\Pi)$ – пространство Соболева.

Определим обобщенное решение неоднородной задачи (1)–(3) как элемент u^ε пространства $\dot{W}_\beta^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$, удовлетворяющий интегральному тождеству [25]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_\Pi - \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi = (f^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi, \quad v^\varepsilon \in \dot{W}_{-\beta}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon). \quad (46)$$

При этом $(\cdot, \cdot)_\Pi$ – расширение скалярного произведения в $L_2(\Pi)$ до двойственности между подходящими весовыми пространствами, а $f^\varepsilon \in \dot{W}_{-\beta}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$ – линейный непрерывный функционал на $\dot{W}_\beta^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$. Задаче (46) поставим в соответствие непрерывное отображение

$$\dot{W}_\beta^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon) \ni u^\varepsilon \mapsto A_\beta^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)u^\varepsilon = f^\varepsilon \in \dot{W}_{-\beta}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*. \quad (47)$$

Как пояснено в статье [14], взаимно сопряженные операторы $A_{+\beta}(\lambda^\varepsilon)$ и $A_{-\beta}(\lambda^\varepsilon)$ оказываются фредгольмовыми, например, в случае

$$\gamma \in (\sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon}, \sqrt{9\pi^2 - \lambda^\varepsilon}), \quad (48)$$

но заведомо теряют это свойство при $\gamma = 0$ и $\gamma = |n^2\pi^2 - \lambda^2|^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$. Далее весовой показатель (48) зафиксирован не зависящим от параметра ε ; в частности, можно положить $\gamma = 2\pi$.

Аналогичными (46) и (47) формулами определяется оператор $A_\beta^0(\lambda^0)$ предельной задачи (42). При помощи метода Фурье нетрудно убедиться в том, что эта задача не имеет экспоненциально затухающих решений, т.е. $A_\gamma^0(\lambda^0)$ – фредгольмов мономорфизм.

Для того чтобы применить схему [14] оправдания асимптотических разложений, необходимо убедиться в справедливости трех фактов. Во-первых, установить априорные оценки

$$\|u^\varepsilon; W_{\pm\gamma}^1(\Pi)\| \leq c(\|f^\varepsilon; \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\| + \|u^\varepsilon; L_2(\Pi(2R))\|) \quad (49)$$

решений задачи (49) с весовым показателем $\beta = \pm\gamma$; здесь $\Pi(2R)$ – прямоугольник $(0, 2R) \times (0, 1)$. Во-вторых, проверить отсутствие нетривиальных решений у однородной задачи (46) с $\beta = \gamma$. Наконец, построить какой-либо обратный для оператора $A_{-\gamma}^\varepsilon(4\pi^2)$ при пороговом значении спектрального параметра. Разумеется, постоянные во всех возникающих оценках должны не зависеть от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Перечисленные факты будут доказаны в следующих трех леммах.

ЛЕММА 1. Для решения $u^\varepsilon \in \dot{W}_{\pm\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$ задачи (46) с показателем $\beta = \pm\gamma$ и правой частью $f^\varepsilon \in \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$ справедлива оценка (49) с постоянной c , не зависящей от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сама оценка (51) – следствие фредгольмовости оператора $A_{\pm\gamma}^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$, и нужно только установить указанное свойство независимости постоянной c . Пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция, равная единице при $x_1 < R$ и нулю

при $x_1 < 2R$. Подставив $v^\varepsilon = \chi^2 u^\varepsilon$ в тождество (46), после несложных преобразований получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|\nabla u^\varepsilon; L_2(\Pi(R))\|^2 &\leq \|\nabla(\chi u^\varepsilon); L_2(\Pi(2R))\|^2 \\ &= \lambda^\varepsilon \|\chi u^\varepsilon; L_2(\Pi(2R))\|^2 + \|u^\varepsilon \nabla \chi; L_2(\Pi(2R))\|^2 \\ &\leq (4\pi^2 + c_\chi) \|u^\varepsilon; L_2(\Pi(2R))\|^2. \end{aligned} \quad (50)$$

Вместе с тем, u^ε – решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в полосе $\Pi_R^\infty = (R, +\infty) \times (-1/2, 1/2)$ (напоминаем, что размер R выбран так, чтобы $\varpi^\varepsilon \subset (0, R)$). Рассматривая след $u^\varepsilon|_{x_1=R} \in H^{1/2}(-1/2, 1/2)$ (пространство Соболева–Слободецкого) как данные Дирихле на торце этой полуполосы, замечаем, что оператор новой задачи остается фредгольмовым, т.е. выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon; W_{\pm\gamma}^1(\Pi_R^\infty)\| &\leq c(\|f^\varepsilon; \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi_R^\infty; \partial\Pi_R^\infty)\| + \|u^\varepsilon|_{x_1=R}; H^{1/2}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\| + \|u^\varepsilon; L_2(\Pi(2R) \setminus \Pi(R))\|) \\ &\leq c(\|f^\varepsilon; \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\| + \|u^\varepsilon; H^1(\Pi(R))\| + \|u^\varepsilon; L_2(\Pi(2R))\|) \\ &\leq c(\|f^\varepsilon; \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\| + \|u^\varepsilon; L_2(\Pi(2R))\|). \end{aligned} \quad (51)$$

Отметим, что, во-первых, фредгольмовость оператора гарантирует априорную оценку решения с мажорантой, содержащей нормы правых частей задачи и слабую L_2 -норму самого решения на любом непустом компакте в Π_R^∞ (см. [26; гл. 3]); во-вторых, постоянная c не зависит от малого параметра ε ввиду его отсутствия в задаче на Π_R^∞ ; в-третьих, $\dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi_R^\infty; \partial\Pi_R^\infty) \subset \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$, т.е.

$$\|f^\varepsilon; \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi_R^\infty; \partial\Pi_R^\infty)^*\| \leq \|f^\varepsilon; \dot{W}_{\mp\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\|;$$

и наконец, при обработке нормы $\|u^\varepsilon|_{x_1=R}; H^{1/2}(0, 1)\|$ сначала воспользовались следовым неравенством, а затем – проверенным соотношением (50).

Совмещая неравенства (50) и (51), делаем нужный вывод о постоянной c в оценке (49).

ЛЕММА 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\lambda^\varepsilon \in [\pi^2, 4\pi^2]$ оператор $A_\gamma^\varepsilon(\lambda^\varepsilon)$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение неверно и нашлись собственные функции $u^{\varepsilon_k} \in \dot{W}_\gamma^1(\Pi; \Gamma_D^{\varepsilon_k})$ задачи (1)–(3), отвечающие собственным числам λ^{ε_k} ; здесь $\{\varepsilon_k\}$ – бесконечно малая последовательность. Нормируем собственные функции условием

$$\|u^{\varepsilon_k}; L_2(\Pi(2R))\| = 1 \quad (52)$$

и извлечем подпоследовательность (сохраняем за ней прежнее обозначение), для которой

$$\lambda^{\varepsilon_k} \rightarrow \lambda^0 \in [\pi^2, 4\pi^2].$$

Поскольку u^{ε_k} – решение задачи (46) с показателем $\beta = \gamma$ и правой частью $f^{\varepsilon_k} = 0$, неравенство (49) устанавливает равномерную ограниченность норм $\|u^{\varepsilon_k}; W_\gamma^1(\Pi)\|$. Таким образом, может быть, вдоль подпоследовательности

$$u^{\varepsilon_k} \rightarrow u^0 \quad \text{слабо в } W_\gamma^1(\Pi) \quad \text{и} \quad \text{сильно в } L_2(\Pi(2R)). \quad (53)$$

Теперь предельный переход в интегральном тождестве (46) с ингредиентами u^{ε_k} , λ^{ε_k} и $f^{\varepsilon_k} = 0$, а также $v^0 \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^0) \subset \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$ обеспечивает соотношение

$$(\nabla u^0, \nabla v^0)_\Pi = \lambda^0(u^0, v^0)_\Pi, \quad v^0 \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^0).$$

Поскольку $\|u^0; L_2(\Pi(2R))\| = 1$ в соответствии с формулами (52) и (53), нетривиальная функция $u^0 \in \dot{W}_\gamma^1(\Gamma_D^0)$ оказывается собственной для задачи (42). Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

ЛЕММА 3. *Найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ задача (46) с весовым показателем $\beta = -\gamma$, правой частью $f^\varepsilon \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^* \subset \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$ и параметром $\lambda^\varepsilon = 4\pi^2$ имеет решение $u^\varepsilon \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$, допускающее представление*

$$u^\varepsilon(x) = \tilde{u}^\varepsilon(x) + b_1^\varepsilon e^{ix\sqrt{3\pi}} \sin(\pi x_2) + b_2^\varepsilon x_1 \sin(2\pi x_2). \quad (54)$$

Для остатка $\tilde{u}^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Pi)$ и коэффициентов b_j^ε верна оценка

$$\|\tilde{u}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\| + |b_1^\varepsilon| + |b_2^\varepsilon| \leq c \|f^\varepsilon; \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\|$$

с постоянной c , не зависящей от функционала f^ε и параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что при $\Lambda > \gamma^2$ вспомогательная задача

$$(\nabla u_1^\varepsilon, \nabla v_1^\varepsilon)_\Pi + \Lambda(u_1^\varepsilon, v_1^\varepsilon)_\Pi = (f^\varepsilon, v_1^\varepsilon), \quad v_1^\varepsilon \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon),$$

имеет единственное решение $u_1^\varepsilon \in \dot{W}_\gamma^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$ и справедливо неравенство

$$\|u_1^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\| \leq c_1 \|f^\varepsilon; \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)\|.$$

Сделаем замены

$$u_1^\varepsilon \mapsto \mathcal{U}_1^\varepsilon = e^{\gamma x_1} u_1^\varepsilon \quad \text{и} \quad v_1^\varepsilon \mapsto \mathcal{V}_1^\varepsilon = e^{-\gamma x_1} v_1^\varepsilon.$$

Функции $\mathcal{U}_1^\varepsilon$ и $\mathcal{V}_1^\varepsilon$ принадлежат пространству Соболева $\dot{H}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$. После несложных преобразований получаем новое интегральное тождество

$$\begin{aligned} & (\nabla \mathcal{U}_1^\varepsilon, \nabla \mathcal{V}_1^\varepsilon)_\Pi + \gamma(\partial_1 \mathcal{U}_1^\varepsilon, \mathcal{V}_1^\varepsilon)_\Pi - \gamma(\mathcal{U}_1^\varepsilon, \partial_1 \mathcal{V}_1^\varepsilon)_\Pi + (\Lambda - \gamma^2)(\mathcal{U}_1^\varepsilon, \mathcal{V}_1^\varepsilon)_\Pi \\ & = (\mathcal{F}_1^\varepsilon, \mathcal{V}_1^\varepsilon)_\Pi, \quad \mathcal{V}_1^\varepsilon \in \dot{H}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon), \end{aligned} \quad (55)$$

где $\mathcal{F}_1^\varepsilon = e^{\gamma x_1} f^\varepsilon \in \dot{H}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$. Поскольку при $\mathcal{V}_1^\varepsilon = \mathcal{U}_1^\varepsilon$ левая часть (55) дает норму

$$(\|\nabla \mathcal{U}_1^\varepsilon; L_2(\Pi)\|^2 + (\Lambda - \gamma^2)\|\mathcal{U}_1^\varepsilon; L_2(\Pi)\|^2)^{1/2}$$

в пространстве $\dot{H}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$, задача (55) однозначно разрешима в $\dot{H}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$ согласно лемме Лакса–Мильграма и выполнено неравенство

$$\|\mathcal{U}_1^\varepsilon; H^1(\Pi)\| \leq c \|\mathcal{F}_1^\varepsilon; \dot{H}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\|,$$

которое без труда переделывается в такое:

$$\|\mathcal{U}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\| \leq c \|f^\varepsilon; \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\|.$$

Итак, осталось найти решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u_2^\varepsilon(x) - 4\pi^2 u_2^\varepsilon(x) &= f_2^\varepsilon(x) := (4\pi^2 + \Lambda)u_1^\varepsilon(x), & x \in \Pi, \\ u_2^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \Gamma_D^\varepsilon, \\ \partial_n u_2^\varepsilon(x) &= 0, & x \in \Gamma_N^\varepsilon. \end{aligned} \quad (56)$$

Подчеркнем, что новая правая часть f_2^ε уравнения Гельмгольца принадлежит пространству $W_\gamma^1(\Pi)$. Вместо задачи (56) решим задачу (23) с той же правой частью и согласно общим результатам (см., например, [26; § 2.2 и § 5.3]) получим решение u_3^ε , для которого верны соотношения

$$\begin{aligned} u_3^\varepsilon(x) &= \tilde{u}_3^\varepsilon(x) + b_{31}^\varepsilon e^{+ix_1\sqrt{3}\pi} \sin(\pi x_2) + b_{32}^\varepsilon x_1 \sin(2\pi x_2), \\ \sum_{p=0}^3 \|e^{\gamma x_1} \nabla^p \tilde{u}_3^\varepsilon; L_2(\Pi)\| &+ |b_{31}^\varepsilon| + |b_{32}^\varepsilon| \leq c \|u_1^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\|. \end{aligned}$$

Сумма $u_1^\varepsilon + u_3^\varepsilon$, которую обозначим $R^\varepsilon f^\varepsilon$, оставляет невязку только в краевом условии Неймана на отрезке ϖ^ε , т.е.

$$(\nabla R^\varepsilon f^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_\Pi - \pi^2 (R^\varepsilon f^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi = (f, v^\varepsilon)_\Pi - (\partial_2 u_3^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}, \quad v^\varepsilon \in \dot{W}_\gamma^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon).$$

Покажем, что оператор K^ε в пространстве $\dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$, заданный формулой

$$(K^\varepsilon f^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi = (\partial_2 u_3^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon},$$

имеет норму $O(\varepsilon^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|))$. Тогда оператор $1 - K^\varepsilon$ в $\dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$ обратим, а $u^\varepsilon = R^\varepsilon(1 - K^\varepsilon)^{-1}f^\varepsilon$ – искомое решение (54) рассматриваемой задачи.

Одномерное неравенство Харди с логарифмом

$$\int_0^1 \rho^{-1} |\ln \rho|^{-2} |V(\rho)|^2 d\rho \leq 4 \int_0^1 \rho \left| \frac{dV}{d\rho}(\rho) \right|^2 d\rho, \quad V \in C^1(0, 1], \quad V(1) = 0,$$

приводит к соотношению

$$\|\rho^{-1}(1 + |\ln \rho|)^{-1} v^\varepsilon; L_2(\Pi(R))\| \leq c \|v^\varepsilon; H^1(\Pi(R))\| \leq c \|v^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\|, \quad (57)$$

а значит, согласно следовому неравенству имеем

$$\|\rho^{-1/2}(1 + |\ln \rho|)^{-1} v^\varepsilon|_{x_2=0}; L_2(0, R)\| \leq c \|v^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\|.$$

Здесь $\rho(x) = (|x_1 - a|^2 + x_2^2)^{1/2}$ – расстояние до точки $P = (a, 0)$. Осталось заметить, что, во-первых,

$$\rho(x)^{-1/2}(1 + |\ln \rho|)^{-1} \geq \varepsilon^{-1/2}(1 + |\ln \varepsilon|)^{-1/2} \quad \text{при } x \in \varpi^\varepsilon$$

и, во-вторых, по теореме Соболева о вложении $H^2 \subset C$ справедливо неравенство

$$|\partial_2 u_3^\varepsilon(x)| \leq c \|u_3^\varepsilon; H^3(\Pi(R))\| \quad \text{при } x \in \varpi^\varepsilon,$$

и следовательно,

$$|(\partial_2 u_3^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\varpi^\varepsilon}| \leq c \varepsilon^{1/2}(1 + |\ln \varepsilon|) \|u_3^\varepsilon; H^3(\Pi(R))\| \|v^\varepsilon; W_\gamma^1(\Pi)\|.$$

7. Обоснование асимптотики расширенной матрицы рассеяния. Глобальное асимптотическое приближение к решению U_2^ε задачи (1)–(3) возьмем таким:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^\varepsilon(x) &= \mathcal{X}(x)(w_2^-(x) + S_{22}^0 w_2^+(x) + \varepsilon S_{12}^0 w_1^+(x)) \\ &\quad + \varepsilon^{-1} \tilde{U}_2^0(x) + \chi(x) W_2^0(\varepsilon^{-1}(x_1 - a), \varepsilon^{-1} x_2) + \varepsilon \tilde{U}_2'(x). \end{aligned} \quad (58)$$

Конструкция (58) нуждается в пояснении. Волны w_2^+ и w_1^+ определены формулами (9)–(11) по спектральному параметру $\lambda^\varepsilon = 4\pi^2 - \varepsilon^4 \mu$, причем величина μ взята из (39), S_{22}^0 и S_{12}^0 – величины (34) и (35), а гладкая срезающая функция $\mathcal{X}$ зафиксирована так, что $\mathcal{X}(x) = 1$ при $x_1 > 3R$ и $\mathcal{X}(x) = 0$ при $x < 2R$, где $R > a + 1$. Кроме того, W_2^0 – пограничный слой (27) и

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2^0(x) &= 1 - \mathcal{X}(x)(4\mu)^{-1/4}(1 + i + (1 - i)S_{22}^0) \sin(2\pi x_2), \\ \tilde{U}_2'(x) &= U_2'(x) - \mathcal{X}(x)(C_1' \sin(\pi x_2) e^{+ix_1 \sqrt{3\pi}} + C_{21}' x_1 \sin(2\pi x_2)). \end{aligned} \quad (59)$$

Отметим, что выражения (59) можно интерпретировать как асимптотические остатки в представлениях (25) и (31) функций U_2^0 и U_2' на бесконечности. Наконец, считаем, что $S_{22}' = 0$ и $C_{20}' = 0$ во всех формулах из п. 4.

Линейная комбинация волн $w_2^\pm$ и $w_1^\pm$ в правой части (58) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и аннулируется на боковых сторонах полуполосы Π , т.е. невязка, порожденная внешним разложением, вызвана исключительно умножением волн на срезающую функцию $\mathcal{X}$. Благодаря проведенной процедуре сращивания, эта невязка

$$[\Delta_x, \mathcal{X}](w_2^- + S_{22}^0 w_2^+ + \varepsilon S_{12}^0 w_1^+),$$

взятая со знаком минус, лишь слагаемыми порядка ε^2 отличается от невязки, возникающей вследствие устранения из U_2^0 и U_2' незатухающих членов (см. определение (59)). Заметив еще, что функция $\tilde{U}_2^0$ имеет компактный носитель, а $\tilde{U}_2'$ исчезает при $x_1 \rightarrow +\infty$ со скоростью $O(e^{-x_1 \sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon}})$, видим, что отклонение спектрального параметра λ^ε от порогового значения $4\pi^2$ (напоминаем, что U_2^0 и U_2' найдены при решении предельной задачи (23)) привносит допустимую погрешность $O(\varepsilon^3)$. Все эти рассуждения были подробно изложены в работе [14]. Таким образом, для проверки оценки

$$\|\mathcal{F}^\varepsilon; \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\| \leq c\varepsilon^2(1 + |\ln \varepsilon|)^{3/2} \quad (60)$$

правой части интегрального тождества

$$(\nabla \mathcal{R}^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_\Pi - \lambda^\varepsilon(\mathcal{R}^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi = (\mathcal{F}^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi, \quad v^\varepsilon \in \dot{W}_\gamma^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon), \quad (61)$$

(ср. тождество (46)) для разности

$$\mathcal{R}^\varepsilon = U^\varepsilon - \mathcal{U}_2^\varepsilon \quad (62)$$

осталось обработать пограничный слой. Поскольку главный, порядка $|\xi|^{-1}$, асимптотический член функции (27) был учтен при формировании правой части (30) задачи (23) для поправки U_2' , оставшаяся невязка f^ε допускает оценку

$$|\tilde{f}^\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^2 \rho^{-1}(\rho + \varepsilon)^{-1},$$

вытекающую из формул (28) и (27). Поэтому, применяя весовое неравенство (57), получаем нужную оценку

$$\begin{aligned} |(\tilde{f}^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Pi| &\leq c \left(\int_{\Pi(R)} (\rho + \varepsilon)^{-2} (1 + |\ln \rho|)^2 dx \right)^{1/2} \|\rho^{-1} (1 + |\ln \rho|)^{-1} v^\varepsilon; L_2(\Pi(2R))\| \\ &\leq c \varepsilon^2 (1 + |\ln \varepsilon|)^{3/2} \|v^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)\|. \end{aligned}$$

В силу представлений (13) и (58) функция (62) имеет в разложении на бесконечности только уходящие волны w_j^+ с коэффициентами $\tilde{S}_{j2}^\varepsilon$. В работе [14] объяснено, почему лемма 2 влечет за собой очередное утверждение, дающее нужные оценки (38) для названных коэффициентов.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{F}^\varepsilon \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*$. Тогда задача (61) имеет единственное решение $\mathcal{R}^\varepsilon \in \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)$, для которого верны соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\varepsilon &= \tilde{S}_{22}^\varepsilon w_2^+ + \tilde{S}_{22}^\varepsilon w_2^+ + \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon, \quad \tilde{\mathcal{R}}^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Pi), \\ |\tilde{S}_{12}^\varepsilon| + \varepsilon |\tilde{S}_{22}^\varepsilon| &\leq c \|\mathcal{F}^\varepsilon; \dot{W}_{-\gamma}^1(\Pi; \Gamma_D^\varepsilon)^*\|, \end{aligned} \quad (63)$$

причем постоянная c не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Обратим внимание на “лишний” множитель ε при $\tilde{S}_{22}^\varepsilon$ в левой части (63) – он учтен при выводе двух неравенств (38) из оценок (63) и (60). Говоря приблизительно (подробности см. в доказательстве теоремы 7 из [14]), этот множитель происходит от коэффициента $(4\pi^2 - \lambda^\varepsilon)^{-1/2}$, фигурирующего в определении (10) и подчиненного соотношению (19).

Оценка (38) для остатка $\tilde{S}_{11}^\varepsilon$ получается значительно проще.

8. Обсуждение. Единственность. Принцип Шаудера не позволяет установить единственность решения системы (41). Таким образом, остается невыясненным, может ли в малой окрестности точки $a_N = (\sqrt{3}/6)(2N - 1)$ быть два значения a_{N1}^ε и a_{N2}^ε , обеспечивающих появление собственного числа у задачи (1)–(3). В п. 4 было проверено лишь то, что при каждом размере a_N^ε из формулы (7) имеется в точности одно собственное число $\lambda_1^\varepsilon \in [\pi^2, 4\pi^2]$.

Поскольку у однородной задачи Дирихле в полосе $\mathbb{R} \times (0, 1)$ нет экспоненциально затухающих решений, постановка на окнах $\varpi_\pm^\varepsilon$ искусственных условий Дирихле не приводит к построению собственной функции, нечетной по переменной x_2 . Собственных функций, нечетных относительно переменной x_1 (на торце Γ выставлены искусственные условия Дирихле), не существует по другой причине: в [14] доказано, что если имеется бесконечно малая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, для которой $\lambda_1^{\varepsilon_k} \in [\pi^2, 4\pi^2]$ – собственное число и $\lambda_1^{\varepsilon_k} \rightarrow \lambda_1^0$, то $\lambda_1^0 = 4\pi^2$ и задача Дирихле для уравнения $\Delta u^0 + 4\pi^2 u^0 = 0$ в полуполосе Π обладает решением

$$u^0(x) = K \sin(2\pi x_2) + O(e^{-x_1 \sqrt{5}\pi}), \quad K \neq 0.$$

Понятно, что такого решения нет.

О потере симметрии. Если $\varpi_\pm^\varepsilon$ – отрезки с разным длинами $\varepsilon l_\pm$, то постановка на торце Γ искусственных условий Неймана невозможна и приходится изучать

смешанную краевую задачу в полосе $\mathbb{R} \times (0, 1)$. При этом размер расширенной матрицы рассеяния увеличивается до 4×4 (см. [15]), а однородная предельная задача Дирихле в полосе (ср. задачу (23)) приобретает четыре решения

$$e^{\pm i x_1 \sqrt{3}\pi} \sin(\pi x_2), \quad \sin(2\pi x_2), \quad x_1 \sin(2\pi x_2).$$

В результате вместо одного условия $\cos(\sqrt{3}a\pi) = 0$, приведшего в п. 4 ко второй формуле (39), возникают два условия

$$l_+^2 e^{\pm i a \sqrt{3}\pi} + l_-^2 e^{\mp i a \sqrt{3}\pi} = 0,$$

несовместные при $l_+ \neq l_-$. Весьма вероятно, что нужные требования можно соблюсти в случае трех окон. Эта ситуация, а также сочленение двух квантовых волноводов различной ширины не рассматривались.

О множественности собственных чисел. Согласно теореме 1 и результатам [1], [2] при $a = a_N^\varepsilon$ у задачи (1)–(3) имеется по крайней мере два собственных числа: одно на дискретном, а другое на непрерывном спектре. Остался открытым вопрос: можно ли за счет размещения нескольких окон разной ширины образовать три и более собственных чисел?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Exner, P. Šeba, M. Tater, D. Vaněk, “Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window”, *J. Math. Phys.*, **37**:10 (1996), 4867–4887.
- [2] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renner, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
- [3] Y. Hirayama, Y. Tokura, A. D. Wieck, S. Koch, R. J. Haug, K. von Klitzing, K. Ploog, “Transport characteristics of a window coupled in-plane-gated wire system”, *Phys. Rev. B*, **48**:11 (1993), 7991–7998.
- [4] P. Exner, S. A. Vugalter, “Asymptotics estimates for bound states in quantum waveguides coupled laterally through a narrow window”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **65**:1 (1996), 109–123.
- [5] I. Yu. Popov, “Asymptotics of bound states for laterally coupled waveguides”, *Rep. Math. Phys.*, **43**:3 (1997), 427–437.
- [6] R. R. Gadyl'shin, “On regular and singular perturbation of acoustic and quantum waveguides”, *C. R. Mecanique*, **332**:8 (2002), 647–652.
- [7] P. Exner, S. A. Vugalter, “Bound-state asymptotic estimate for window-coupled Dirichlet strips and layers”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30**:22 (1997), 7863–7878.
- [8] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl'shin, “Geometric coupling thresholds in a two-dimensional strip”, *J. Math. Phys.*, **43**:12 (2005), 6265–6278.
- [9] D. Borisov, T. Ekholm, H. Kovařík, “Spectrum of the magnetic Schrödinger operator in a waveguide with combined boundary conditions”, *Ann. Henri Poincaré*, **6**:2 (2005), 327–342.
- [10] D. Borisov, P. Exner, “Exponential splitting of bound states in a waveguide with a pair of distant windows”, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**:10 (2004), 3411–3428.
- [11] D. Borisov, P. Exner, “Distant perturbation asymptotics in window-coupled waveguides. I. The nonthreshold case”, *J. Math. Phys.*, **47**:11 (2006), 113502.
- [12] Д. И. Борисов, “Дискретный спектр пары несимметричных волноводов, соединенных окном”, *Матем. сб.*, **197**:4 (2006), 3–32.

- [13] A. Aslanyan, L. Parnovski, D. Vassiliev, “Complex resonances in acoustic waveguides”, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **53**:3 (2000), 429–447.
- [14] С. А. Назаров, “Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода”, *ТМФ*, **167**:2 (2011), 239–263.
- [15] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области”, *Математические вопросы теории распространения волн*. 29, Зап. научн. сем. ПОМИ, **264**, ПОМИ, СПб., 2000, 66–82.
- [16] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [17] М. Д. Ван Дайк, *Методы возмущений в механике жидкостей*, Мир, М., 1967.
- [18] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, Наука, М., 1989.
- [19] С. А. Назаров, “Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:5 (2010), 1086–1101.
- [20] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5(77) (1957), 3–122.
- [21] W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. 1. *Störungen isolierter Randsingularitäten*, Math. Lehrbücher und Monogr. II. Abteilung: Math. Monogr., **82**, Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
- [22] Л. И. Седов, *Механика сплошных сред*, Т. 2, 3-е изд., Наука, М., 1976.
- [23] R. W. Wood, “On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum”, *Philos. Mag. Ser. 6*, **4**:21 (1902), 396–402.
- [24] A. Hessel, A. A. Oliner, “A new theory of Wood’s anomalies on optical gratings”, *Appl. Optics*, **4**:10 (1965), 1275–1297.
- [25] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [26] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*, Наука, М., 1991.

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило

10.09.2011