Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Федоров, О количестве делителей чисел сочетаний,
Матем. заметки, 2013, том 93, выпуск 2, 276–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 03:46:12

О количестве делителей чисел сочетаний

Г. В. Федоров

В статье рассматриваются задачи о верхнем и нижнем порядках роста отношений функций делителей от «соседних» биномиальных коэффициентов, т.е. чисел сочетаний вида C_n^k и C_{n+1}^{k+1} или C_n^k и C_{n+1}^k . Найдены точные верхние и нижние грани соответствующих отношений.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10161

1. Введение. В 1996 г. в статье [1] Эрдеш, Грам, Ивич и Померанс получили асимптотическую формулу

$$\log \tau(n!) = \frac{n}{\log n} \sum_{k=0}^K \frac{c_k}{\log^k n} + O\left(\frac{n}{\log^{K+2} n}\right)$$

при $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном целом $K \geq 0$, причем коэффициенты имеют вид

$$c_k = \int_1^\infty \frac{\log([t] + 1)}{t^2} \log^k t \, dt.$$

Кроме этого, для любого $n \geq 1$ были доказаны неравенства

$$1 + \frac{S(n)}{2n} \leq \frac{\tau(n!)}{\tau((n-1)!)} \leq 1 + \frac{2S(n)}{n},$$

где функция $S(n)$ определена как сумма простых делителей n с учетом кратности. В этой же работе при $n \rightarrow \infty$ получена асимптотическая формула

$$\frac{\tau(n!)}{\tau((n-1)!)} = 1 + \frac{P(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right),$$

где $P(n)$ – это наибольший простой делитель n .

Для биномиальных коэффициентов (чисел сочетаний) будем использовать следующую запись:

$$\binom{n}{k} = C_n^k.$$

В данной статье мы рассмотрим порядок роста отношений функций делителей от «соседних» биномиальных коэффициентов

$$\frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_n^{k+1})}, \quad \frac{\tau(C_n^{k+1})}{\tau(C_n^k)}, \quad \frac{\tau(C_{n+1}^k)}{\tau(C_n^k)}, \quad \frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_{n+1}^k)}. \quad (1)$$

Для первого отношения в (1) имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны целые числа

$$k \geq 1 \quad \text{и} \quad n > \prod_{p \leq k+1} p^{\lfloor \log_p k \rfloor} + k.$$

Тогда выполнено неравенство

$$T_k(n) = \frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_n^{k+1})} \leq \frac{\tau(k+1)}{2}, \quad (2)$$

причем для каждого $k \geq 1$ найдется бесконечное количество целых положительных n таких, что в (2) выполнено равенство.

В частности, из теоремы 1 следует существование верхнего предела

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_k(n) = \frac{\tau(k+1)}{2}.$$

В 1907 г. Виджерт [2] показал, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(n) \log \log n}{\log n} = \log 2, \quad (3)$$

а Рамануджан [3] в 1915 г. упростил доказательство этого соотношения. Мы докажем, что верхний предел в формуле (3) останется таким же, если функцию делителей $\tau(n)$ заменить на второе отношение в (1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть целые $n \geq 1$ и $k \geq 1$ такие, что

$$k = o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\tau(C_n^{k+1})}{\tau(C_n^k)} \right) \frac{\log \log n}{\log n} = \log 2.$$

В теоремах 3 и 4 мы докажем, что для третьего и четвертого отношений в (1) верны аналогичные утверждения.

2. Вспомогательные утверждения. Здесь мы приведем ряд вспомогательных утверждений, которыми будем пользоваться при доказательстве сформулированных теорем. Максимальную степень простого числа p , которая делит заданное целое число n , обозначим $\nu_p(n)$. Функция ν_p обладает следующими свойствами:

- 1) $p^{\nu_p(A)} \mid A$ для любого целого A ;
- 2) $\nu_p(AB) = \nu_p(A) + \nu_p(B)$ для любых целых A и B ;
- 3) $\nu_p(A/B) = \nu_p(A) - \nu_p(B)$, если A делится на B .

Отметим, что функцию делителей $\tau(A)$ от некоторого натурального числа A в силу мультипликативности можем записать в следующем виде:

$$\tau(A) = \prod_{p|A} (\nu_p(A) + 1). \quad (4)$$

ЛЕММА 1. Пусть A и B – некоторые натуральные числа с наибольшим общим делителем d , тогда

$$\frac{\tau(AB)}{\tau(B)} = \tau(A) \prod_{p|d} \frac{\nu_p(AB) + 1}{(\nu_p(A) + 1)(\nu_p(B) + 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (4), запишем функции делителей в виде произведения:

$$\frac{\tau(AB)}{\tau(B)} = \prod_{p|d} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(B) + 1} \prod_{p|(A/d)} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(B) + 1} \prod_{p|(B/d)} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(B) + 1}. \quad (5)$$

Так как $((B/d), A) = 1$, то $\nu_p(AB) = \nu_p(B)$, где p делит (B/d) и, следовательно, последнее произведение в правой части (5) равно 1. Далее, для p , делящих (A/d) , замечаем, что $\nu_p(AB) = \nu_p(A)$ и $\nu_p(B) = 0$, откуда имеем

$$\frac{\tau(AB)}{\tau(B)} = \prod_{p|d} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(B) + 1} \prod_{p|(A/d)} (\nu_p(A) + 1) = \prod_{p|d} \frac{\nu_p(AB) + 1}{(\nu_p(A) + 1)(\nu_p(B) + 1)} \prod_{p|A} (\nu_p(A) + 1),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Пусть даны натуральные числа A, B, C такие, что

$$(A, B) = d_1, \quad (A, C) = d_2, \quad d = d_1 d_2.$$

Тогда

$$\frac{\tau(AB)}{\tau(AC)} = \frac{\tau(B)}{\tau(C)} \prod_{p|d} \frac{(\nu_p(AB) + 1)(\nu_p(C) + 1)}{(\nu_p(AC) + 1)(\nu_p(B) + 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ход рассуждений аналогичен доказательству леммы 1. Запишем отношение функций делителей через произведения

$$\frac{\tau(AB)}{\tau(AC)} = \prod_{p|d} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(AC) + 1} \prod_{p|(B/d)} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(AC) + 1} \prod_{p|(C/d)} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(AC) + 1} \prod_{p|(A/d)} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(AC) + 1}. \quad (6)$$

Для различных простых чисел p имеем соответствующие равенства

$$\begin{aligned} p \mid \frac{B}{d} : \quad & \nu_p(AB) = \nu_p(B), \quad \nu_p(AC) = 0; \\ p \mid \frac{C}{d} : \quad & \nu_p(AB) = 0, \quad \nu_p(AC) = \nu_p(C); \\ p \mid \frac{A}{d} : \quad & \nu_p(AB) = \nu_p(A), \quad \nu_p(AC) = \nu_p(A). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\tau(AB)}{\tau(AC)} &= \prod_{p|d} \frac{\nu_p(AB) + 1}{\nu_p(AC) + 1} \prod_{p|(B/d)} (\nu_p(B) + 1) \prod_{p|(C/d)} \frac{1}{\nu_p(C) + 1} \\ &= \prod_{p|d} \frac{(\nu_p(AB) + 1)(\nu_p(C) + 1)}{(\nu_p(AC) + 1)(\nu_p(B) + 1)} \prod_{p|B} (\nu_p(B) + 1) \prod_{p|C} \frac{1}{\nu_p(C) + 1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k} = C_n^k$ будем рассматривать как многочлены от n степени k с рациональными коэффициентами, зависящими от k .

ЛЕММА 3. Для любых натуральных n и k таких, что $k \leq n/2$, выполнено равенство

$$\frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_n^{k+1})} = \prod_{p \leq k+1} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^{k+1}) + 1} \prod_{p > k+1} \frac{1}{\nu_p(n-k) + 1}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1)} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}.$$

Так как $\mathcal{B} = \{n, n-1, \dots, n-k+1, n-k\}$ – это $k+1$ подряд идущих чисел, то для любого простого $p > k+1$ существует не более одного числа из $\mathcal{B}$, которое делится на p , т.е. числа из $\mathcal{B}$ не имеют общих простых делителей больших $k+1$. Таким образом, если простое $p > k+1$ делит C_n^k , то p делит C_n^{k+1} . Значит, можем записать отношение функций делителей через произведения следующим образом:

$$\frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_n^{k+1})} = \prod_{p \leq k+1} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^{k+1}) + 1} \prod_{\substack{p|C_n^k \\ p > k+1}} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^{k+1}) + 1} \prod_{\substack{p|(n-k) \\ p > k+1}} \frac{1}{\nu_p(n-k) + 1}.$$

Остается лишь заметить, что в силу проведенных рассуждений второе произведение в правой части последнего равенства всегда равно 1.

ЛЕММА 4. Для любых целых n и k , $0 \leq k \leq n-1$, и простого p выполнены равенства

$$\nu_p(C_{n-1}^k) + \nu_p(n) = \nu_p(C_n^k) + \nu_p(n-k) = \nu_p(C_n^{k+1}) + \nu_p(k+1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение очевидно следует из свойств функции $\nu_p(n)$ и равенств

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k} \cdot n &= \frac{(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot n \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot (n-k) \\ &= \binom{n}{k} \cdot (n-k) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k)}{1 \cdot 2 \cdots k \cdot (k+1)} \cdot (k+1) = \binom{n}{k+1} \cdot (k+1). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Пусть n и k – натуральные числа, $k \leq n/2$, p – простое число, $p \leq k$. Выберем целое число m с условиями, что $0 \leq m \leq k-1$ и выражение $\nu_p(n-m)$ принимает максимальное значение. Тогда

$$\nu_p(C_n^k) = \nu_p(n-m) - \nu_p(C_{k-1}^m) - \nu_p(k) = \nu_p(n-m) - \nu_p(C_k^m) - \nu_p(k-m).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если существует более одного целого m , $0 \leq m \leq k-1$, такого, что $\nu_p(n-m)$ принимает максимальное значение, то в лемме 5 выбираем любое из подходящих значений m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть m – выбранное по условию леммы число, $0 \leq m \leq k-1$. Разделим k подряд идущих множителей на три группы следующим образом:

$$\underbrace{(n-0) \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m \text{ сомножителей}} \cdot (n-m) \cdot \underbrace{(n-m-1) \cdots (n-k+1)}_{k-m-1 \text{ сомножителей}}. \quad (8)$$

Тогда при $0 \leq j \leq m-1$ имеем

$$\nu_p(n-j) = \nu_p((n-m) + (m-j)) = \nu_p(m-j),$$

так как $\nu_p(n-j) \leq \nu_p(n-m)$ в силу выбора m , и

$$\nu_p(m-j) \leq [\log_p k] \leq \nu_p(n-m).$$

При $m+1 \leq j \leq k-1$ имеем

$$\nu_p(n-j) = \nu_p((n-m) - (j-m)) = \nu_p(j-m),$$

так как $\nu_p(n-j) \leq \nu_p(n-m)$ в силу выбора m , и

$$\nu_p(j-m) \leq [\log_p k] \leq \nu_p(n-m).$$

Воспользуемся доказанными равенствами для $\nu_p(n-j)$:

$$\begin{aligned} \nu_p(C_n^k) &= \sum_{j=0}^{k-1} \nu_p(n-j) - \nu_p(k!) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \nu_p(n-j) + \nu_p(n-m) + \sum_{j=m+1}^{k-1} \nu_p(n-j) - \nu_p(k!) \\ &= \nu_p(n-m) + \sum_{j=0}^{m-1} \nu_p(m-j) + \sum_{j=m+1}^{k-1} \nu_p(j-m) - \nu_p(k!) \\ &= \nu_p(n-m) + \sum_{j=1}^m \nu_p(j) + \sum_{j=1}^{k-1-m} \nu_p(j) - \nu_p((k-1)!) - \nu_p(k) \\ &= \nu_p(n-m) - (\nu_p((k-1)!) - \nu_p(m!) - \nu_p((k-1-m)!)) - \nu_p(k) \\ &= \nu_p(n-m) - \nu_p(C_{k-1}^m) - \nu_p(k) = \nu_p(n-m) - \nu_p(C_k^m) - \nu_p(k-m), \end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы использовали лемму 4.

3. Верхний предел отношения количества делителей соседних чисел сочетаний.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала укажем бесконечную последовательность значений n , при которых в (2) достигается равенство. Для этого определим следующие значения, зависящие от k :

$$P(p) = p^{\lfloor \log_p k \rfloor + 1}, \quad P = \prod_{p|(k+1)} P(p), \quad Q = \prod_{p|(k+1)} P(p) \cdot p.$$

Для каждого простого числа q из арифметической прогрессии $a_m = Qt + 1$ положим $n = q + k$. Из закона распределения простых чисел в арифметической прогрессии (см., например, [4]) следует, что арифметическая прогрессия a_m содержит бесконечное количество простых чисел, значит, нами построена бесконечная последовательность значений n . Докажем, что значения n , выбранные таким образом, дают равенство в (2).

Для любого простого p , делящего $k + 1$, выполнено сравнение

$$n \equiv Qt + k + 1 \equiv k + 1 \pmod{P(p)},$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \nu_p(n) &= \nu_p(q + k) = \nu_p(k + 1), \\ \nu_p(n - 1) &= \nu_p(q + k - 1) = \nu_p(k), \\ &\dots\dots\dots, \\ \nu_p(n - k) &= \nu_p(q) = \nu_p(1) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \nu_p(C_n^{k+1}) &= \nu_p\left(\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)}{(k+1) \cdot k \cdots 2 \cdot 1}\right) \\ &= \nu_p\left(\frac{(q+k) \cdot (q+k-1) \cdots (q+1) \cdot q}{(k+1) \cdot k \cdots 2 \cdot 1}\right) = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$\nu_p(C_n^k) = \nu_p(C_n^{k+1}) - \nu_p(q) + \nu_p(k+1) = \nu_p(k+1).$$

Далее будем пользоваться леммой 3. В выражении (7) второе произведение даст вклад $1/2$, а в первом произведении множители, отличные от 1, будут только для простых p , делящих $k + 1$. Следовательно,

$$\frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_n^{k+1})} = \frac{1}{2} \prod_{p|(k+1)} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^{k+1}) + 1} = \frac{1}{2} \prod_{p|(k+1)} (\nu_p(k+1) + 1) = \frac{\tau(k+1)}{2}.$$

Теперь докажем, что для произвольного

$$n > \prod_{p \leq k+1} p^{\lfloor \log_p k \rfloor} + k$$

выполнено неравенство (2). Запишем выражение из леммы 3 следующим образом:

$$\begin{aligned} T_k(n) &= \frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_n^{k+1})} \\ &= \prod_{p \leq k+1} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^k) + 1 - \nu_p(k+1) + \nu_p(n-k)} \prod_{p > k+1} \frac{1}{\nu_p(n-k) + 1} \\ &= \Pi_1 \cdot \Pi_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Разобьем произведение Π_1 на два произведения

$$\Pi_1 = \Pi_3 \cdot \Pi_4,$$

где Π_3 ведется по простым $p \leq k+1$ таким, что $\nu_p(k+1) < \nu_p(n-k)$, а Π_4 – по остальным простым $p \leq k+1$. Введем обозначение

$$M = \nu_p(C_n^k) - \nu_p(k+1) + \nu_p(n-k) = \nu_p(C_n^{k+1}) \geq 0$$

и оценим произведение по простым $p \leq k+1$ таким, что $\nu_p(n-k) \leq \nu_p(k+1)$:

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= \prod'_{p \leq k+1} \frac{M + \nu_p(k+1) - \nu_p(n-k) + 1}{M + 1} \\ &\leq \prod'_{p \leq k+1} \frac{\nu_p(k+1) - \nu_p(n-k) + 1}{1} \leq \tau(k+1). \end{aligned}$$

Рассмотрим *первый случай*: $n-k$ имеет простой делитель $p > k+1$. Тогда второе произведение

$$\Pi_2 \leq \frac{1}{2},$$

и достаточно того, что

$$\Pi_3 \leq 1.$$

Второй случай предполагает, что любой простой делитель $n-k$ не превосходит $k+1$, т.е.

$$\Pi_2 = 1.$$

Необходимо показать, что

$$\Pi_3 \leq \frac{1}{2}.$$

Для этого укажем такое простое число p , что

$$\nu_p(C_n^k) < \nu_p(n-k) - \nu_p(k+1).$$

Для каждого простого делителя p числа $n-k$ выберем свое число $m = m(p)$ так же, как в лемме 5, причем $0 \leq m \leq k-1$. Тогда из лемм 5 и 4 имеем

$$\nu_p(C_n^k) = \nu_p(n-m) - \nu_p(C_{k-1}^m) - \nu_p(k) = \nu_p(n-m) - \nu_p(C_k^m) - \nu_p(k-m). \quad (10)$$

Пусть

$$R = \prod_{p \leq k+1} p^{\lfloor \log_p k \rfloor},$$

и целое число n удовлетворяет условиям, что $n - k > R$, а любой простой делитель $n - k$ не превосходит $k + 1$. Тогда для любого такого n в силу неравенства $n - k > R$ найдется простое число q такое, что $\nu_q(n - k) > \nu_q(k - t)$ для любого целого t , $-1 \leq t \leq k - 1$. Фиксируем это простое число q и соответствующее ему число m из леммы 5. Тогда

$$\nu_q(n - m) = \nu_q((n - k) + (k - m)) = \nu_q(k - m),$$

и из равенств (10) имеем

$$\nu_q(C_n^k) = \nu_q(C_k^m) = 0.$$

Так как $\nu_q(n - k) > \nu_q(k + 1)$, то в произведении Π_3 будет содержаться множитель, соответствующий зафиксированному простому q :

$$\frac{\nu_q(C_n^k) + 1}{\nu_q(C_n^k) + 1 - \nu_q(k + 1) + \nu_q(n - k)} = \frac{1}{1 - \nu_p(k + 1) + \nu_p(n - k)} \leq \frac{1}{2}.$$

Остальные множители из произведения Π_3 , очевидно, не превосходят 1, поэтому все произведение Π_3 не превосходит $1/2$.

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Приведем краткие рассуждения.

Разложим отношение функций делителей в произведение (аналогично лемме 3):

$$T(n, k) = \frac{\tau(C_n^{k+1})}{\tau(C_n^k)} = \prod_{p \leq k+1} \frac{\nu_p(C_n^{k+1}) + 1}{\nu_p(C_n^k) + 1} \prod_{p > k+1} (\nu_p(n - k) + 1) = \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Покажем, что на последовательности чисел n таких, что $n - k = p_1 \cdots p_t$ — произведение первых t различных простых чисел, достигается верхний предел. Отметим, что

$$t = \frac{\log(n - k)}{\log \log(n - k)} + O\left(\frac{\log(n - k)}{(\log \log(n - k))^2}\right) = \frac{\log n}{\log \log n} + o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right).$$

Для рассматриваемых n имеем оценку $\log \Pi_1 \leq \pi(k + 1) \log 2$. Отсюда, учитывая ограничение на $k = o((\log n)/(\log \log n))$, получаем

$$\begin{aligned} \log T(n, k) &= \log \Pi_1 + \log \Pi_2 \\ &= O(\pi(k + 1)) + t \log 2 - \pi(k + 1) = \log 2 \frac{\log n}{\log \log n} + o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right). \end{aligned}$$

Для произвольных значений n имеем неравенства

$$\Pi_1 \leq \prod_{p \leq k+1} \frac{\nu_p(C_n^k) + \nu_p(n - k) + 1}{\nu_p(C_n^k) + 1} \leq \prod_{p \leq k+1} (\nu_p(n - k) + 1),$$

откуда заключаем, что

$$T(n, k) = \Pi_1 \cdot \Pi_2 \leq \prod_p (\nu_p(n - k) + 1) = \tau(n - k).$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \log T(n, k) \frac{\log \log n}{\log n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \log \tau(n - k) \frac{\log \log n}{\log n}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задано целое $k \geq 1$, тогда существует верхний предел

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_{n+1}^k)} \right) \frac{\log \log n}{\log n} = C,$$

где C – некоторая ограниченная постоянная, $0 < C \leq \log 2$, зависящая от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим отношение функций делителей в произведение (аналогично лемме 3):

$$\begin{aligned} T(n, k) &= \frac{\tau(C_n^k)}{\tau(C_{n+1}^k)} \\ &= \prod_{p \leq k} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_{n+1}^k) + 1} \prod_{\substack{p > k \\ p | (n-k+1)}} (\nu_p(n-k+1) + 1) \prod_{\substack{p > k \\ p | (n+1)}} \frac{1}{\nu_p(n+1) + 1} \\ &= \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3. \end{aligned}$$

Пусть $Q_t = p_{s+1} \cdots p_t$ – произведение $t-s$ подряд идущих различных простых чисел, где $s = \pi(k)$, $p_{s+1} \geq k+1$ и наибольший общий делитель $(Q_t, k) = 1$. Построим арифметическую прогрессию вида $a_m = Q_t \cdot m + k$ и выберем из нее минимальное простое число q_t . Положим $n = n_t = q_t - 1$, тогда

$$T(n_t, k) = \frac{1}{2} \prod_{p \leq k} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^k) - \nu_p(n-k+1) + 1} \prod_{\substack{p > k \\ p | (n-k+1)}} (\nu_p(n-k+1) + 1) = \frac{1}{2} \cdot \Pi_1 \cdot \Pi_2.$$

Имеем $\log n_t = C_t \log Q_t$, где C_t – некоторая числовая последовательность, которая в силу теоремы Линника является ограниченной, $1 \leq C_t \leq C_0$ (см. [5; гл. X]). Отсюда получаем

$$t = \frac{\log Q_t}{\log \log Q_t} + O\left(\frac{\log Q_t}{(\log \log Q_t)^2}\right) = \frac{1}{C_t} \frac{\log n}{\log \log n} + o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right).$$

Для произведения Π_1 достаточно грубой оценки

$$1 \leq \Pi_1 \leq \prod_{p \leq k} (\nu_p(n-k+1) + 1) \leq (\log n)^k.$$

В силу того, что $\Pi_2 \geq t$, имеем

$$\log T(n_t, k) \geq O(k \log \log n) + t \log 2 = \frac{\log 2}{C_t} \frac{\log n}{\log \log n} + o\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right).$$

С другой стороны, для произвольного n выполнены неравенства

$$\begin{aligned} T(n, k) &= \prod_p \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^k) + \nu_p(n+1) - \nu_p(n-k+1) + 1} \\ &\leq \prod_p \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_n^k) - \nu_p(n-k+1) + 1} \leq \prod_p (\nu_p(n-k+1) + 1) = \tau(n-k+1), \end{aligned}$$

откуда и получается утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть задано целое $k \geq 1$, тогда существует верхний предел

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\tau(C_{n+1}^k)}{\tau(C_n^k)} \right) \frac{\log \log n}{\log n} = D,$$

где D – некоторая ограниченная постоянная, $0 < D \leq \log 2$, зависящая от k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основные моменты в приведенных рассуждениях аналогичны доказательству теоремы 3. Разложим отношение функций делителей в произведение

$$\begin{aligned} T(n, k) &= \frac{\tau(C_{n+1}^k)}{\tau(C_n^k)} \\ &= \prod_{p \leq k} \frac{\nu_p(C_n^k) + 1}{\nu_p(C_{n+1}^k) + 1} \prod_{\substack{p > k \\ p | (n-k+1)}} \frac{1}{\nu_p(n-k+1) + 1} \prod_{\substack{p > k \\ p | (n+1)}} (\nu_p(n+1) + 1) \\ &= \Pi_1 \cdot \Pi_2 \cdot \Pi_3. \end{aligned}$$

Положим $Q_t = p_{s+1} \cdots p_t$ – произведение $t - s$ подряд идущих различных простых чисел, где $s = \pi(k)$, $p_{s+1} \geq k+1$ и наибольший общий делитель $(Q_t, k) = 1$. Построим арифметическую прогрессию вида $a_m = Q_t \cdot m - k$ и выберем из нее минимальное простое число q_t . Положим $n = n_t = q_t + k - 1$, тогда

$$T(n_t, k) \geq \frac{1}{2} \cdot 2^{t-\pi(k)} \cdot \prod_{p \leq k} \frac{1}{\nu_p(n-k+1) + 1} \geq \frac{2^{t-\pi(k)-1}}{(\log n)^k}.$$

Кроме этого, для произвольного n выполнено неравенство

$$T(n, k) \leq \prod_p \frac{\nu_p(C_n^k) + \nu_p(n+1) + 1}{\nu_p(C_n^k) + 1} \leq \tau(n+1),$$

откуда и получается утверждение теоремы.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. Н. Чубарикову за научное руководство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, S. W. Graham, A. Ivić, C. Pomerance, “On the divisors of $n!$ ”, *Analytic Number Theory*, Vol. 1 (Allerton Park, IL, 1995), Progr. Math., **138**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996, 337–355.
- [2] S. Wigert, “Sur l’ordre de grandeur du nombre des diviseurs d’un entier”, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, **3** (1907), № 18.
- [3] S. Ramanujan, “Highly composite numbers”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **14** (1915), 347–409.
- [4] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [5] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.

Г. В. Федоров

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: glebonyat@mail.ru

Поступило

18.02.2012