Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, Тригонометрические ряды Фурье и ряды Фурье–Уолша с лакунарной последовательностью частичных сумм, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 2, 305–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10162>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 08:37:22

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Тригонометрические ряды Фурье и ряды Фурье–Уолша с лакунарной последовательностью частичных сумм

С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева

Пусть функция $f(x) \in L_1(\mathbb{I}^N)$, $N \geq 1$, где

$$\mathbb{I}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 \leq x_j < 1, j = 1, \dots, N\},$$

разложена в кратный ряд Фурье по тригонометрической системе $\Psi = \mathcal{E}$ и в кратный ряд Фурье по системе Уолша–Пэли $\Psi = \mathcal{W}$. И пусть

$$S_n(x, f; \mathcal{E}), \quad S_n(x, f; \mathcal{W}), \quad n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N = \{n \in \mathbb{Z}^N : n_j \geq 1, j = 1, \dots, N\},$$

– прямоугольные частичные суммы указанных рядов.

Далее, пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $\mu \mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

В настоящей работе рассматривается следующая задача: как ведут себя прямоугольные частичные суммы $S_n(x, f; \Psi)$ кратных рядов Фурье по системе Ψ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$, на множестве $\mathfrak{A}$ в случае, когда некоторые из компонент $n_1, \dots, n_N$ вектора n (“номера” частичной суммы $S_n(x, f; \Psi)$) являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей (последовательность $\{n^{(s)}\}$, $n^{(s)} \in \mathbb{Z}_1^1$, называется *лакунарной*, если $n^{(s+1)}/n^{(s)} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \dots$).

Как хорошо известно, подпоследовательности частичных сумм ряда Фурье обладают лучшими свойствами сходимости почти всюду (п.в.) по сравнению со всей последовательностью частичных сумм. Для тригонометрических рядов Фурье в одномерном случае Колмогоровым [1] еще в 1922 г. было установлено: для любой функции $f \in L_2(\mathbb{I}^1)$ последовательность частичных сумм $S_{n^{(k)}}(x, f; \mathcal{E})$, где $\{n^{(k)}\}$ – лакунарная последовательность, сходится п.в. на $\mathbb{I}^1$ к $f(x)$. Указанный результат Колмогорова был распространен в 1931 г. Литтлвудом и Пэли [2] на классы $L_p(\mathbb{I}^1)$, $p > 1$. Позже (см., например, [3]) было установлено, что в $L_1(\mathbb{I}^1)$ этот результат неверен.

Для однократных рядов Фурье–Уолша Шнейдером в 1950 г. [4] получено, что для любой последовательности $\{n^{(k)}\}$ такой, что константы Лебега $L_{n^{(k)}}$ равномерно ограничены (в частности, для $\{n^{(k)}\} = \{2^k\}$), и для любой функции $f \in L_1(\mathbb{I}^1)$ последовательность частичных сумм $S_{n^{(k)}}(x, f; \mathcal{W})$ сходится к $f(x)$ п.в. на $\mathbb{I}^1$. Конягиным в 1993 г. [5] было показано, что для сходимости п.в. $S_{n^{(k)}}(x, f; \mathcal{W})$ условие ограниченности констант Лебега не является существенным.

В свою очередь, первый результат для кратных тригонометрических рядов (для $N = 2$), касающийся “лакунарных последовательностей частичных сумм”, был получен Шёлиным

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321).

DOI: 10.4213/mzm10162

в 1971 г. в работе [6], где было доказано, что если $f \in L_p(\mathbb{I}^2)$, $p > 1$, $\{n_1^{(\nu_1)}\}$ – лакунарная последовательность, то п.в. на $\mathbb{I}^2$ $\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} S_{n_1^{(\nu_1)}, n_2}(x, f; \mathcal{E}) = f(x)^1$.

В 1977 г. Кожима в работе [8] обобщил результат Шёлина на случай $N \geq 3$, доказав сходимость последовательностей

$$S_{n_1^{(\nu_1)}, \dots, n_{N-1}^{(\nu_{N-1})}, n_N}(x, f; \mathcal{E}),$$

где $f \in L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, и $\{n_j^{(\nu_j)}\}$, $j = 1, \dots, N-1$, – лакунарные последовательности, п.в. на $\mathbb{I}^N$. В той же работе Кожима показал, что данный результат не может быть усилен.

Для двойных рядов Фурье–Уолша, с одной стороны (см. [9; с. 318]), для любой $f \in L_1(\mathbb{I}^2)$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2^n, 2^n}(x, f; \mathcal{W}) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{I}^2$, а с другой стороны, как было показано Лукомским [10], существует последовательность $\{n^{(k)}\}$ (для которой $\sup_k L_{n^{(k)}} < \infty$) и существует функция $f \in L_1(\mathbb{I}^2)$ такие, что $S_{n^{(k)}, n^{(k)}}(x, f; \mathcal{W})$ расходится п.в. на $\mathbb{I}^2$.

Для N -кратных рядов Фурье–Уолша ($N \geq 3$) Санадзе и Хеладзе [7] показали, что если $f \in L(\log^+ L)^{2N-1+s}(\mathbb{I}^N)$, то ряд Фурье–Уолша, суммируемый по прямоугольникам, сходится п.в. на $\mathbb{I}^N$ при условии, что либо все N компонент (в этом случае $s = 0$), либо любые $N-1$ из них (в этом случае $s = 1$), номера $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ прямоугольной частичной суммы $S_n(x, f; \mathcal{W})$ являются лакунарными.

Далее, перейдем к вопросам локализации для (суммируемых по прямоугольникам) кратных рядов Фурье по системе Ψ функций из $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$, т.е. к вопросу о поведении ряда Фурье на множествах, где разлагаемая в (указанный) ряд функция $f(x)$ равна нулю.

В работах [11]–[14] было введено и исследовано следующее понятие слабой обобщенной локализации п.в.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье по системе Ψ функций из класса $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ *слабая обобщенная локализация почти всюду* (СОЛ), если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует такое подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu \mathfrak{A}_1 > 0$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, f; \Psi) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathfrak{A}_1.$$

Для описания структурно-геометрических характеристик множеств $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, на которых в классах $L_p(\mathbb{I}^N)$ справедлива СОЛ, введем следующие обозначения.

Пусть M – множество чисел $\{1, \dots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_s < j_l$ при $s < l$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \dots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_l$ при $s < l$, – непустые подмножества множества M . Будем считать также, что $J_0 = M \setminus J_N = \emptyset$. Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[J_k] &= \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}, \\ \mathbb{R}[M \setminus J_k] &= \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in J_k\}. \end{aligned}$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \mathbb{I}[J_k] &= \{x \in \mathbb{R}[J_k] : 0 \leq x_j < 1 \text{ при } j \in J_k\}, \\ \mathbb{I}[M \setminus J_k] &= \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : 0 \leq x_j < 1 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}. \end{aligned}$$

Пусть Ω , $\Omega \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, – произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = \text{pr}_{(J_2)}\{\Omega\}$ – ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$.

¹Санадзе, Хеладзе [7] указанный результат Шёлина распространили на следующие классы Орлича: класс $L(\log^+ L)^4(\mathbb{I}^2)$ для системы $\Psi = \mathcal{E}$ и класс $L(\log^+ L)^3(\mathbb{I}^2)$ для системы $\Psi = \mathcal{W}$.

Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{I}[M \setminus J_2]$, $J_2 \subset M^2$. Фиксируем произвольное $J_k = J_k^0$, $0 \leq k \leq N - 2$, и рассмотрим следующие множества:

$$W = W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k^0} W[J_2], \quad (1)$$

$$W^0 = W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k^0} W[J_2]. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, и пусть $J_k \subset M$, $0 \leq k \leq N - 2$.

1) Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$ обладает *свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$ вида (1) такое, что $\mu(W \setminus \mathfrak{A}) = 0$, причем свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ есть свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, если $W = W(W^0)$.

2) Свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть *максимальным свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ множества $\mathfrak{A}$, если для любого множества $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_k)$ вида (3) такого, что $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widetilde{W}^0)$.

Обратим внимание на то, что при $k = 0$ свойство $\mathbb{B}_2^{(J_0)} \equiv \mathbb{B}_2^{(\emptyset)}$ и максимальное свойство $\mathbb{B}_2^{(J_0)}(W^0(J_0)) \equiv \mathbb{B}_2^{(\emptyset)}(W^0(\emptyset))$ совпадают соответственно со свойством $\mathbb{B}_2$ и максимальным свойством $\mathbb{B}_2(W^0)$, которые были введены и исследованы ранее в работах Блошанского (см., например, [11], [12]). Так в работе [12] (см. [12; теорема 2]) для системы $\Psi = \mathcal{E}$ и в работе [14] для системы $\Psi = \mathcal{W}$ был получен следующий критерий справедливости СОЛ для кратных рядов Фурье функций из $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, в терминах $\mathbb{B}_2$ свойства.

Обозначим через $\text{int } P$ множество внутренних точек P , через $\overline{P}$ – замыкание множества P и через $\text{Gr } P$ – границу множества P .

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu \mathfrak{A} < 1$, $\mathfrak{B} = \mathbb{I}^N \setminus \mathfrak{A}$. Рассмотрим следующие условия на границу множества $\mathfrak{A}$:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{\text{int } \mathfrak{B}}) = 0, \quad (3)$$

$$\mu_2 \text{Frpr}_{(J_2)} \{ \text{int } \mathfrak{B} \} = 0 \quad \text{для всех } J_2 \subset M, \quad (4)$$

где μ_2 – мера на плоскости.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu \mathfrak{A} < 1$, и пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (3), (4). Тогда для кратных рядов Фурье по системе Ψ функций из класса $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ слабая обобщенная локализация почти всюду тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как было установлено в [12] и [14], в части достаточности теорема А справедлива без ограничений (3) и (4).

В связи с этим результатом возникает вопрос, какими структурно-геометрическими характеристиками должно обладать произвольное множество $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, чтобы на нем была справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье по системе Ψ , суммируемых по прямоугольникам, в случае, когда некоторые компоненты номера n , $n \in \mathbb{Z}_1^N$, прямоугольной частичной суммы $S_n(x, f; \Psi)$ являются элементами лакунарных последовательностей.

Пусть $\alpha = \alpha(J_k) = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \dots, k$, $1 \leq k \leq N - 2$. Символом

$$n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$$

²При этом любой вектор $z = (z_1, \dots, z_{2N}) \in A \times B$, где $A \subset \mathbb{R}[J_k]$, а $B \subset \mathbb{R}[M \setminus J_k]$, мы отождествляем с вектором $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ по формуле: $x_s = z_s$ при $s \in J_k$ и $x_s = z_{N+s}$ при $s \in M \setminus J_k$.

обозначим N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами *некоторых* (однократных бесконечно больших) *последовательностей натуральных чисел* (при $j \in J_k: n_j = n_j^{(\alpha_j)}$ и $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$). В частности, символом

$$n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] \in \mathbb{Z}_1^N$$

(где $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \dots, k$) будем обозначать N -мерный вектор, у которого компоненты n_j , $j \in J_k$, являются элементами *некоторых* (однократных) *лакунарных последовательностей*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < 1$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N - 2$. Если множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (3), (4'), где

$$\mu_2 \text{Frpr}_{(J_2)} \{\text{int } \mathfrak{B}\} = 0 \quad \text{для всех } J_2 \subset M \setminus J_k, \quad (4')$$

то на множестве $\mathfrak{A}$ в классе $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, для кратных рядов Фурье по системе Ψ , чьи прямоугольные частичные суммы $S_n(x, f; \Psi)$ имеют номер $n = n^{(\lambda)}[J_k]$, справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В части достаточности теорема 1 справедлива без ограничений (3), (4').

Теорема 1 не дает информации о том, на каких же подмножествах $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ существует предел рассматриваемой “ J_k -лакунарной последовательности прямоугольных частичных сумм”

$$\lim_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k, \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x, f; \Psi) = 0$$

при условии $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, а на каких нет. Поэтому дадим развернутую формулировку этой теоремы (с добавлением случая $k = 0$)³.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < 1$. Фиксируем произвольное J_k , $0 \leq k \leq N - 2$.

1) Если существует множество $W^0 = W^0(J_k)$ вида (2) такое, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, то для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$, такой, что $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x, f; \Psi) = 0 \quad \text{почти всюду на } W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (3), (4'), тогда

2) Если свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ является максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_1 \in L_\infty(\mathbb{I}^N)$ такая, что $f_1(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, и для любых k последовательностей натуральных чисел $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x, f_1; \Psi)| = +\infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{I}^N \setminus W^0.$$

3) В частности, если множество $\mathfrak{A}$ вообще не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_2 \in L_\infty(\mathbb{I}^N)$ такая, что $f_2(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, и для любых k последовательностей натуральных чисел $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x, f_2; \Psi)| = +\infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{I}^N.$$

³Для системы $\Psi = \mathcal{E}$ см. также работу [15].

Итак, мы видим, что для любого k , $1 \leq k \leq N - 2$, $N \geq 3$, справедливость или несправедливость СОЛ для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье (как по тригонометрической системе $\Psi = \mathcal{E}$, так и по системе Уолша–Пэли $\Psi = \mathcal{W}$) в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{I}^N$ (удовлетворяющем условиям (3) и (4')) определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, где величина k – это число “лакунарных компонент” вектора n (номера частичной суммы $S_n(x, f; \Psi)$)⁴.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Kolmogoroff, *Fund. Math.*, **5** (1924), 96–97. [2] J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley, *J. London Math. Soc.*, **6** (1931), 230–233. [3] R. P. Gosselin, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 278–282. [4] А. А. Шнейдер, *ДАН СССР*, **70**:6 (1950), 969–971. [5] С. В. Конягин, *Матем. заметки*, **54**:4 (1993), 69–75. [6] P. Sjölin, *Ark. Mat.*, **9**:1 (1971), 65–90. [7] Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе, Сборник работ по теории функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, **55**, 1977, 93–106. [8] M. Kojima, *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, **22**:2 (1977), 163–177. [9] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, J. Pál, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990. [10] С. Ф. Лукомский, *Матем. заметки*, **56**:1 (1994), 57–62. [11] И. Л. Блошанский, *ДАН СССР*, **271**:6 (1983), 1294–1298. [12] И. Л. Блошанский, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:2 (1985), 243–282. [13] С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, *ДАН*, **332**:5 (1993), 549–552. [14] С. К. Блошанская, И. Л. Блошанский, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 17*, Сборник статей, Тр. МИАН, **214**, Наука, М., 1997, 83–106. [15] И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, *ДАН*, **423**:4 (2008), 439–442.

С. К. Блошанская

Национальный исследовательский
ядерный университет “МИФИ”, г. Москва

Поступило

17.01.2012

И. Л. Блошанский

Московский государственный
областной университет
E-mail: ig.bloshn@gmail.com

О. В. Лифанцева

Московский государственный
областной университет
E-mail: ov-lifantseva@yandex.ru

⁴Подчеркнем, что для $N \geq 3$ и для фиксированного $J_k \subset M$ “ N -мерные бруски” $W[J_2]$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, образующие множество $W(J_k) - (2)$ (которое удовлетворяет условию $\mu(W(J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$), имеют “основания” $\Omega[J_2]$ в тех плоскостях $\mathbb{R}[J_2]$, для которых соответствующие компоненты номера $n \in \mathbb{Z}_1^N$ – компоненты n_j , $j \in M \setminus J_k$, – являются “свободными” (т.е., в частности, не являются компонентами никаких лакунарных последовательностей).