Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

На Ченг, Зи-Ли Чен, Гуанг-Гуи Чен, Свойства двойственности b -АМ-компактных операторов на банаховых решетках, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 442–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10163>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:11:08

Свойства двойственности b -АМ-компактных операторов на банаховых решетках

На Ченг, Зи-Ли Чен, Гуанг-Гуи Чен

Получены некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы банаховы решетки E и F удовлетворяли следующим условиям: (i) если $T: E \rightarrow F$ – некоторый b -АМ-компактный оператор, то $T': F' \rightarrow E'$ также b -АМ-компактный оператор и (ii) если $T': F' \rightarrow E'$ – b -АМ-компактный оператор, то $T: E \rightarrow F$ также b -АМ-компактный оператор.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10163

1. Введение. Следующий вопрос представляет значительный интерес: если оператор $T: E \rightarrow F$ обладает некоторым свойством, то будет ли сопряженный к нему оператор $T': F' \rightarrow E'$ обладать тем же свойством, и наоборот. Что касается свойства b -АМ-компактности для операторов, действующих между банаховыми решетками, то ни то, ни другое утверждение не будет верным, если не выполнены некоторые дополнительные условия. Например, тождественный оператор на пространстве ℓ_1 является b -АМ-компактным, но ни сопряженный к нему оператор, ни оператор тождественный на пространстве ℓ_∞ и ни преддвойственный ему оператор, т.е. тождественный оператор на пространстве c_0 , не являются b -АМ-компактными. Цель данной работы состоит в том, чтобы получить некоторые достаточные и необходимые условия для того, чтобы из b -АМ-компактности оператора следовала b -АМ-компактность сопряженного к нему оператора, и наоборот. Более точно, доказываем, что если E' имеет непрерывную по упорядочению норму и T является регулярным b -АМ-компактным оператором, то сопряженный к нему оператор $T': F' \rightarrow E'$ также b -АМ-компактен. Доказано, что любой регулярный оператор $T: E \rightarrow F$ является b -АМ-компактным всякий раз, когда сопряженный к нему оператор $T': F' \rightarrow E'$ является b -АМ-компактным; тогда либо решетка F имеет непрерывную по упорядочению норму, либо E' – дискретная решетка.

Чтобы сформулировать результат, введем обозначения и напомним некоторые определения. Пусть L – пространство Рисса. Символы $L^\sim$ и $(L^\sim)^\sim$ обозначают

Работа выполнена при поддержке фонда научных исследований по основным направлениям прикладной математики, университет Сихуа (грант № XZD0910-09-1), и фонда научных исследований по обработке информации в интеллектуальных сетях в Сычуаньской ведущей лаборатории (грант № SGXZD1002-10).

упорядочение в пространстве L и второе упорядочение в пространстве, сопряженном к L , соответственно. Каноническое вложение $Q_L: L \rightarrow (L^\sim)^\sim$ определяется равенством

$$Q_L(x) = \hat{x}, \quad \hat{x}(f) = f(x), \quad f \in L^\sim, \quad x \in L.$$

Пусть $\hat{x}$ – ограниченный по упорядочению и непрерывный по упорядочению линейный функционал на $L^\sim$. Каноническое вложение Q_L является решеточным гомоморфизмом. Если $L^\sim$ разделяет точки пространства L , то Q_L также взаимно однозначно, и, следовательно, L можно рассматривать как подпространство Рисса пространства $(L^\sim)^\sim$. Так как любая банахова решетка имеет разделяющее упорядоченное сопряженное пространство, мы не будем различать банахову решетку E и ее канонический образ в $(E^\sim)^\sim$, т.е. пространство, бисопряженное к E . Подмножество A банаховой решетки E называется *ограниченным по b -упорядочению в E* , если оно ограничено по упорядочению в $(E^\sim)^\sim$. Будем говорить, что банахова решетка E *обладает свойством (b)*, если любое ограниченное по b -упорядочению множество решетки E ограничено по упорядочению. Любое КВ-пространство и, следовательно, любая рефлексивная банахова решетка обладают свойством (b). С другой стороны, рассматривая $A = \{e_n\}$ в c_0 , можно показать, что c_0 не обладает свойством (b). Ненулевой элемент x банаховой решетки E является дискретным элементом, если порядковой идеал, порожденный элементом x , совпадает с подпространством, порожденным x . Банахова решетка E дискретна, если она допускает полную систему непересекающихся дискретных элементов.

Пусть E и F – банаховы решетки. Оператор $T: E \rightarrow F$ называется *b -АМ-компактным*, если T отображает любое ограниченное по b -упорядочению подмножество решетки E в относительно компактное подмножество решетки F . Оператор $T: E \rightarrow F$ называется *АМ-компактным*, если T отображает любое ограниченное по упорядочению подмножество решетки E в относительно компактное подмножество решетки F . Оператор $T: E \rightarrow F$, отображающий любое ограниченное по b -упорядочению подмножество решетки E в относительно слабо компактное подмножество решетки F , называется *b -слабо компактным оператором*. Символом $K_{b\text{-АМ}}(E, F)$ обозначим совокупность всех b -АМ-компактных операторов из E в F . Тогда $K_{b\text{-АМ}}(E, F)$ является замкнутым подпространством пространства $L(E, F)$, т.е. пространства непрерывных линейных операторов из E в F . Пусть $K(E, F)$ – пространство компактных операторов, и пусть $K_{\text{АМ}}(E, F)$ – пространство АМ-компактных операторов. Ясно, что

$$K(E, F) \subseteq K_{b\text{-АМ}}(E, F) \subseteq K_{\text{АМ}}(E, F).$$

В работе [1] было показано, что эти включения могут быть собственными включениями. Было также показано, что если банахова решетка F бесконечномерная, то E является КВ-пространством тогда и только тогда, когда всякий АМ-компактный оператор из E в F b -АМ-компактный. Ясно, что равенство $K(E, F) = K_{b\text{-АМ}}(E, F)$ выполняется всякий раз, когда E – АМ-пространство. В работе [1] также было показано, что банахова решетка E будет дискретным КВ-пространством тогда и только тогда, когда всякий непрерывный оператор из E в F b -АМ-компактный для любой банаховой решетки F . Там же было показано, что если топологическое двойственное пространство E' дискретно, то любой b -слабо компактный оператор из банаховой решетки E в банахову решетку F b -АМ-компактный. Доминирование

b-АМ-компактных операторов также изучалось в работе [1], и было показано, что банаховы решетки E и F обладают следующим свойством. Всякий раз, когда операторы $S, T: E \rightarrow F$ удовлетворяют условиям $0 \leq S \leq T$ и T b-АМ-компактный, S будет b-АМ-компактным тогда и только тогда, когда либо F имеет непрерывную по упорядочению норму, либо решетка E' дискретна.

Любые другие термины теории банаховых решеток и операторов, которые здесь не упомянуты, можно найти в работах [2] и [3].

2. Свойства двойственности для b-АМ-компактных операторов. Пусть E – банахова решетка. Для любого $\hat{x} \in E_+''$ $I_{\hat{x}}$ – главный идеал, порожденный элементом $\hat{x}$ в E'' . Пусть $Y_{\hat{x}} = I_{\hat{x}} \cap E$. Ясно, что $Y_{\hat{x}}$ – АМ-пространство с нормой

$$\|x\|_{\infty} = \inf\{\lambda > 0: |x| \leq \lambda \hat{x}\}$$

для любых $x \in Y_{\hat{x}}$ и $\hat{x} \in E_+''$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть E и F – банаховы решетки, и норма на E' – непрерывна по упорядочению. Если $T: E \rightarrow F$ – регулярный b-АМ-компактный оператор, то $T': F' \rightarrow E'$ – b-АМ-компактный оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \neq f''' \in F_+'''$ и $\varphi = f'''$. Через F^{φ} обозначим пополнение пространства $(F/\rho_{\varphi}^{-1}(0), \rho_{\varphi})$. Рассмотрим составное отображение

$$S: E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{q} F^{\varphi},$$

где q – некоторое факторное отображение. По предположению, норма на E' непрерывна по упорядочению, и из теоремы 2.4.14 в [2] следует, что, для любых $\epsilon > 0$ и $x' \in E'_+$, существует $x \in E_+$ такой, что

$$\text{ball}(E) \subset [-x, x] + \epsilon \text{ball}(\rho_{x'}).$$

Для всех $x \in \epsilon \text{ball}(\rho_{x'})$ имеем

$$\|Sx\| = \langle f''', |Sx| \rangle \leq \langle |S'f'|, x \rangle = \langle |x'|, x \rangle \leq \epsilon.$$

Так как S является b-АМ-компактным отображением, то $S[-x, x] \subset F^{\varphi}$ компактно относительно нормы. Таким образом,

$$S \text{ball}(E) \subset S[-x, x] + \epsilon \text{ball}(F^{\varphi}),$$

и S компактно. Из теоремы Шаудера следует, что $S': (F^{\varphi})' \rightarrow F' \rightarrow E'$ компактно. Так как

$$S' \text{ball}((F^{\varphi})') = S'([-f''', f''']_{(F^{\varphi})'}) = T'q'([-f''', f''']_{(F^{\varphi})'}) = T'([-f''', f''']_{F'})$$

компактно относительно нормы в E' , то $T': F' \rightarrow E'$ – b-АМ-компактный оператор.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть E и F – банаховы решетки такие, что если $T: E \rightarrow F$ положительный и $T': F' \rightarrow E'$ b-АМ-компактный операторы, то T является b-АМ-компактным оператором, если выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) E' дискретна;
- (2) норма на F непрерывна по упорядочению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. предположим, что условия (1) и (2) не выполняются. Решетка F не имеет непрерывной по упорядочению нормы. Значит, можно найти последовательность непересекающихся положительных элементов (z_n) в F , ограниченных сверху элементом $z \in F^+$ и отделенных от нуля относительно нормы. Так как E' , по предположению, не может быть дискретной, из следствия 21.13 в работе [4] видно, что существуют $\phi \in (E')$ и последовательность (ϕ_n) в $[-\phi, \phi]$, такая, что она сходится к 0 в слабой топологии $\sigma(E', E)$, но не сходится к 0 в абсолютно слабой топологии $|\sigma|(E', E)$. Отсюда следует, что существуют некоторый элемент $y \in E^+$ и некоторая последовательность (y_n) в $[0, y]$ такая, что $|\phi_n(y_n)| = 1$ для любого $n \in N$. Пусть P_n – главная проекция на полосу B_n , порожденную последовательностью y_n в E . Предположим, что $\phi_n(y_m) = 0$ при $n \neq m$. (Если это не так, то заменим (ϕ_n) на $\phi_n \circ P_n$.)

Определим $T: E \rightarrow F$ как

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| z_n + \phi(x) z.$$

Так как $\{z_n\}$ – последовательность непересекающихся элементов, положительный оператор T определен корректно. Далее, покажем, что T не является b-АМ-компактным. Если это не так, то последовательность

$$T(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(y_n)| z_n + \phi(y_n) z = |\phi_n(y_n)| z_n + \phi(y_n) z = z_n + \phi(y_n) z$$

допускает некоторую сходящуюся подпоследовательность. Так как $\{\phi(y_n) z\}$ допускает сходящуюся подпоследовательность, последовательность $\{z_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность. Приходим к противоречию. Следовательно, T не является АМ-компактным, и он не может быть b-АМ-компактным.

Чтобы закончить доказательство, достаточно показать, что $T': F' \rightarrow E'$ является b-АМ-компактным. Для любых $x \in E$, $f' \in F'$ выполняется равенство

$$T'(f')(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| f'(z_n) + \phi(x) f'(z).$$

Пусть $f''' \in E'''$ и $f'_n \in E'_+$ такие, что $0 < f'_n < f'''$. Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f'''(z_n) \leq f'''(z),$$

то $\{f'_k(z_n)\} \in \ell_1$, $\{f'''(z_n)\} \in \ell_1$ и $0 \leq f'_k(z_n) \leq f'''(z_n)$ для любого $k \in N$.

С другой стороны, порядковый интервал $[0, f'''(z_n)]$ компактен в ℓ_1 , так как ℓ_1 – дискретное пространство с непрерывной по упорядочению нормой (следствие 21.13 в [4]). Поэтому последовательность $\{f'_k(z_n)\}_k$ допускает сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\epsilon > 0$; тогда существует $K \in N$ такое, что при $p, q \in N$ с $p, q \geq K$

имеем

$$\begin{aligned} & |T'(f'_p)(x) - T'(f'_q)(x)| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| f'_p(z_n) + \phi(x) f'_p(z) - \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n(x)| f'_q(z_n) - \phi(x) f'_q(z) \right| \\ &\leq \|\phi\| \sum_{n=1}^{\infty} |f'_p(z_n) - f'_q(z_n)| + \|\phi\| |f'_p(z) - f'_q(z)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{T'(f'_n)\}$ является последовательностью Коши в E' и эта подпоследовательность сходится. Таким образом, T' – b-AM-компактный оператор.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть E и F – две банаховы решетки, и T – положительный оператор из E в F .

(1) Пусть E и F – банаховы решетки. Если для любого положительного оператора $T: E \rightarrow F$ такого, что $T': F' \rightarrow E'$ b-AM-компактен, оператор T является b-AM-компактным, то либо E' либо F' имеет непрерывную по упорядочению норму.

(2) Если E – дедекиндова σ -полная банахова решетка такая, что для любого положительного оператора $T: E \rightarrow E$ такого, что $T': E' \rightarrow E'$ b-AM-компактен, оператор T является b-AM-компактным, то E имеет непрерывную по упорядочению норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Допустим противное, т.е. предположим, что ни E' , ни F' не являются КВ-пространствами. Так как E' не имеет непрерывной по упорядочению нормы, из теоремы 2.4.2 в работе [2] следует, что существует последовательность ограниченных по упорядочению непересекающихся элементов (x'_n) в E'_+ такая, что $\|x'_n\| = 1$ при всех n . Пусть $x' = \bigvee_{n=1}^{\infty} x'_n$ в E' . Определим положительный оператор $T_1: E \rightarrow \ell_1$ соотношением

$$T_1(x) = (x'_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

для всех $x \in E$. Так как F' не имеет непрерывной по упорядочению нормы, существует последовательность ограниченных по упорядочению непересекающихся элементов (f'_n) в F'_+ такая, что $\|f'_n\| = 1$ при всех n . Таким образом, из соотношения

$$\|f'_n\| = \sup\{f'_n(f) : 0 \leq f \in F, \|f\| = 1\}$$

следует, что существуют $f_n \in F_+$ такие, что $\|f_n\| = 1$ и $f'_n(f_n) \geq 1/2$ при всех n . Теперь определим $T_2: \ell_1 \rightarrow F$ как

$$T_2(\lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$$

для всех $(\lambda_n) \in \ell_1$. Ясно, что T_2 b-AM-компактен, так как ℓ_1 – дискретное пространство с непрерывной по упорядочению нормой, и оно является КВ-пространством (следствие 21.13 в [4]).

Следовательно, оператор $T = T_2 \circ T_1: E \rightarrow F$, определенный соотношением

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x) f_n,$$

является b-AM-компактным.

Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что $T': F' \rightarrow E'$ не является b-АМ-компактным оператором. Для любого $x \in E$, $f' \in F'$, имеем $T'(f')(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'(f_n)x'_n$. Так как

$$\|T'(f'_n)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(f_n)x'_n \right\| = \left\| \bigvee_{n=1}^{\infty} f'_n(f_n)x'_n \right\| \geq \|f'_n(f_n)x'_n\| \geq \frac{1}{2},$$

то $T': F' \rightarrow E'$ не является АМ-компактным и, следовательно, он не является b-АМ-компактным.

(2) Предположим, что E – дедекиндова σ -полная решетка, но E не имеет непрерывной по упорядочению нормы. В силу следствия 2.4.3 в работе [2] E содержит некоторую подрешетку, которая изоморфна пространству l_{∞} по норме и по упорядочению. Поскольку пространство топологически сопряженное к l_{∞} не является дискретным, из теоремы 1 в работе [5] следует, что найдутся два оператора S и T из l_{∞} в E таких, что $0 \leq S \leq T$, T компактный, а S не является компактным. Отсюда следует, что $S', T': E' \rightarrow (l_{\infty})'$, где $0 \leq S' \leq T'$ и T' компактен.

Так как норма на $(l_{\infty})'$ непрерывна по упорядочению и оператор T' b-АМ-компактен, отсюда следует, что S' является b-АМ-компактным (теорема 3.3 в [1]).

С другой стороны, оператор $S \circ P: E \rightarrow l_{\infty} \rightarrow E$ не является АМ-компактным. Если это не так, то его сужение на банахову решетку l_{∞} АМ-компактно, поскольку l_{∞} является АМ-пространством с единицей, и оператор S компактен. Противоречие.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Na Cheng, Zi-li Chen, “b-AM-compact operators on Banach lattice”, *Chinese J. Eng. Math.*, **27**:4 (2010), 753–756.
- [2] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Universitext, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [3] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Pure Appl. Math., **119**, Academic Press, New York, 1985.
- [4] C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces*, Pure Appl. Math., **76**, Academic Press, New York, 1978.
- [5] A. W. Wickstead, “Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **120**:1 (1996), 175–179.

На Ченг

Xihua University, Китай

E-mail: chengnaanna@126.com

Поступило

20.02.2011

Зи-Ли Чен

Xihua University, Китай

Гуанг-Гуи Чен

Xihua University, Китай