Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Камал, А. Юзеф, О дополнении и обобщенно проективных модулях, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 390–400

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:14:53

О дополнении и обобщенно проективных модулях

М. А. Камал, А. Юзеф

Дискретные и квазидискретные модули занимают заметное место в теории модулей; им посвящено много работ. В изучении таких модулей важную роль играет теорема о разложении квазидискретных модулей. Она гласит, что всякий квазидискретный модуль является прямой суммой полых подмодулей. В этой статье мы вводим некоторые новые классы (слабо квазидискретных модулей, а также модулей со свойствами S_1 - и S_2 -дополнительности), которые обобщают класс квазидискретных модулей. Мы показываем, что некоторые свойства квазидискретных модулей наследуются слабо квазидискретными модулями. Мы также описываем некоторые свойства слабо квазидискретных модулей, аналогичные свойствам квазидискретных модулей. Кроме того, вводим понятия относительно проективных и относительно S -проективных модулей и используем их для характеристики прямых сумм полых модулей. Оказывается, относительная S -проективность – необходимое условие слабой квазидискретности прямой суммы полых модулей.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10164

1. Введение. Дискретные модули были введены Мохамедом и Сингхом в статье [1] под названием двойственно непрерывных модулей. Оширо [2] назвал квазидискретные модули квазиполусовершенными модулями. Он показал, что каждый квазидискретный модуль раскладывается в прямую сумму полых подмодулей (причем разложение единственно с точностью до изоморфизма) и является вполне относительно проективным модулем. С другой стороны, прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} H_i$ полых модулей является квазидискретным модулем, если она дополняет прямые слагаемые, каждое локальное слагаемое является слагаемым и модуль H_i $\bigoplus_{j \in I - \{i\}} H_j$ -проективен для каждого $i \in I$. Ослабляя условия в определении квазидискретного модуля, мы вводим понятия слабо квазидискретных модулей и модулей со свойством S_i -дополнительности ($i = 1, 2$). Эти понятия обобщают понятие квазидискретных модулей. Точнее, класс слабо квазидискретных модулей расположен между классом модулей со свойством S_1 -дополнительности и классом модулей со свойством S_2 -дополнительности. Мы покажем, что слабая квазидискретность и свойство S_i -дополнительности наследуются слагаемыми. Слабое свойство $+$ -дополнительности первоначально было введено Мохамедом и Мюллером в [3].

Здесь мы докажем некоторые факты о малых подмодулях, которые приводят к утверждению, что слабое свойство $+$ -дополнительности также наследуется слагаемыми. Мохамед и Мюллер [4] показали, что сумма двух модулей со слабым свойством $+$ -дополнительности обладает слабым свойством $+$ -дополнительности.

В этой статье мы докажем, что всякий подмодуль суммы $\sum_{i \in F} M_i$ (где F – конечное множество и каждое слагаемое M_i – модуль со слабым свойством $+$ -дополнительности) имеет $+$ -дополнение вида $\sum_{i \in F} L_i$, где $L_i \leq M_i$ для каждого $i \in F$. Мы также рассмотрим суммы полых модулей. Мы докажем, что любая конечная подсумма неизбыточной суммы полых модулей является $+$ -дополнением оставшейся подсуммы. Кроме того, покажем, что если такая сумма конечна и является слабо квазидискретным модулем, то эта сумма прямая и дополняет прямые слагаемые. Для случая произвольной неизбыточной суммы полых модулей мы докажем, что если такая сумма слабо квазидискретна и каждое $+$ -дополнение является слагаемым, то сумма прямая. Наконец, мы введем понятие обобщенно N -проективного модуля, точнее, N - S -проективного модуля. В [3; лемма 4.47] было показано, что если модуль M представляется в виде $S \oplus T = N + T$, где S – T -проективный модуль, то $M = S_1 \oplus T$, где $S_1 \leq N$. Мы определим место класса N - S -проективных модулей в иерархии модулей; иными словами (по аналогии с [3; лемма 4.47]), опишем его в терминах внутренних свойств таких модулей. А именно, покажем, что если $M = A \oplus B$, то A является B - S -проективным модулем тогда и только тогда, когда $M = B \oplus L$ для каждого $+$ -дополнения L подмодуля B в M . Заметим, что последнее из эквивалентных условий в определении N - S -проективности двойственно соответствующему эквивалентному условию в определении N -инъективности: модуль A B -инъективен тогда и только тогда, когда $M = A \oplus C$ для всякого $\cap$ -дополнения C подмодуля A в M (см. статью [5] Брджесса и Рафаэла). Кроме того, мы изучим связь между S -проективностью и свойством S_1 -дополнительности, а также получим некоторые свойства, аналогичные свойствам квазидискретных модулей. Мы докажем, что конечная прямая сумма попарно относительно S -проективных полых модулей является слабо квазидискретным модулем, удовлетворяет условию (D_3) и дополняет прямые слагаемые, и каждое $+$ -дополнение является слагаемым.

Подмодуль A модуля M называется *малым* в M (обозначение: $A \leq^s M$), если $A + B \neq M$ для любого собственного подмодуля B модуля M . Модуль H называется *полым*, если каждый собственный подмодуль модуля H является малым в H . Подмодуль P модуля M называется *$+$ -дополнением* в M подмодуля A , если P – минимальный подмодуль, удовлетворяющий условию $M = A + P$, или, что равносильно, если $M = A + P$ и $A \cap P \leq^s P$. Будем говорить, что подмодуль C модуля M является *$+$ -дополнением*, если он является $+$ -дополнением в M некоторого подмодуля модуля M . Модуль M *обладает свойством $+$ -дополнительности*, если для любых подмодулей A и B модуля M из условия $M = A + B$ вытекает, что B содержит $+$ -дополнение подмодуля A в M . Модуль M *обладает слабым свойством $+$ -дополнительности*, если каждый подмодуль модуля M имеет $+$ -дополнение в M . Модуль M *удовлетворяет условию (D_1)* , если для каждого подмодуля A модуля M существует разложение $M = M_1 \oplus M_2$, в котором $M_1 \leq A$ и $M_2 \cap A \leq^s M$. Модуль M *удовлетворяет условию (D_2)* , если всякий подмодуль A модуля M , для которого фактор-модуль M/A изоморфен слагаемому модуля M , сам является слагаемым модуля M . Модуль M *удовлетворяет условию (D_3)* , если пересечение $M_1 \cap M_2$ любых слагаемых M_1 и M_2 модуля M , удовлетворяющих условию $M_1 + M_2 = M$,

само является слагаемым модуля M . Модуль называется *дискретным*, если он удовлетворяет условиям (D_1) и (D_2) . Модуль, удовлетворяющий условиям (D_1) и (D_3) , называется *квазидискретным* модулем. Говорят, что разложение $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ модуля M *дополняет прямые слагаемые*, если для каждого слагаемого A модуля M существует такое $J \subseteq I$, что $M = A \oplus \bigoplus_{i \in J} M_i$.

Все рассматриваемые модули M предполагаются унитарными правыми модулями над (не обязательно коммутативным) кольцом R с единицей. Запись $A \leq M$ означает, что A является подмодулем модуля M , или M является *расширением* модуля A . Запись $A \leq^{\oplus} M$ означает, что A является прямым слагаемым модуля M .

2. Дополнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (свойства S_1 -дополнительности). Будем говорить, что модуль M *обладает свойством S_1 -дополнительности*, если для любого подмодуля C , являющегося $+$ -дополнением в M , и любого $+$ -дополнения B расширения модуля C в M выполнены условия $C \cap B = 0$ и $C \oplus B \leq^{\oplus} M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (слабой квазидискретности). Модуль M называется *слабо квазидискретным*, если $M = X \oplus Y$ для любых двух подмодулей X и Y , являющихся $+$ -дополнениями друг друга в M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 (свойства S_2 -дополнительности). Модуль M *обладает свойством S_2 -дополнительности*, если для любого подмодуля N в M и его $+$ -дополнения B в M из условия $N \leq^{\oplus} M$ вытекает, что $N \cap B = 0$.

Заметим, что всякий модуль M со свойством S_1 -дополнительности является слабо квазидискретным. Кроме того, если всякий подмодуль, являющийся $+$ -дополнением в M , является слагаемым в M , то модуль M слабо квазидискретен, и всякий квазидискретный модуль обладает свойством S_2 -дополнительности.

ЛЕММА 2.1. Пусть N — $+$ -дополнение подмодуля L в M , $A \leq N$ и X — $+$ -дополнение подмодуля $A + L$ в M . Тогда $A \cap (L + X) \leq^S N \cap (L + X)$, если и только если $N \cap L \leq^S N \cap (L + X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Поскольку $N + L = M = A + L + X$, имеем

$$L + X = L + N \cap (L + X), \quad A + L = L + N \cap (L + A), \quad N = A + N \cap (L + X).$$

Пусть $N \cap (L + X) = (N \cap L) + K$; тогда

$$L + X = L + N \cap L + K = L + K.$$

Значит, $M = A + L + K$, откуда $N = A + K + N \cap L$. Из отношения $N \cap L \leq^S N$ вытекает, что $N = A + K$. Следовательно,

$$N \cap (L + X) = K + A \cap (L + X), \quad N \cap (L + X) = K$$

(потому что $A \cap (L + X) \leq^S N \cap (L + X)$).

($\Leftarrow$) Пусть $N \cap (L + X) = K + A \cap (L + X)$. Тогда

$$N = A + N \cap (L + X) = K + A \cap (L + X) + A = A + K,$$

откуда $M = K + A + L$. Значит,

$$X + L = K + (X + L) \cap (A + L) = K + L + X \cap (A + L),$$

а это влечет $X + L = K + L$ (так как $X \cap (A + L) \leq^S X$). Таким образом,

$$(X + L) \cap N = K + L \cap N.$$

Следовательно, $(X + L) \cap N = K$ (потому что $N \cap L \leq^S N$).

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть N – $+$ -дополнение подмодуля L в M , $A \leq N$ и X – $+$ -дополнение модуля $A + L$ в M . Тогда $N \cap (L + X)$ является $+$ -дополнением подмодуля A в N , если и только если $N \cap (L + X)$ является $+$ -дополнением подмодуля L в $L + X$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $M = N \oplus L$, $A \leq N$ и X является $+$ -дополнением подмодуля $A \oplus L$ в M . Тогда $N \cap (L + X)$ является $+$ -дополнением модуля A в N .

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Слабое свойство $+$ -дополнительности модулей наследуется слагаемыми.

ЛЕММА 2.5. Пусть C и N – подмодули модуля M , причем $C \leq N \leq M$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) если C является $+$ -дополнением подмодуля C_1 в M , то C является $+$ -дополнением подмодуля $C_1 \cap N$ в N ;
- (2) если C является $+$ -дополнением в N подмодуля C_1 , а N является $+$ -дополнением подмодуля X в M , то C является $+$ -дополнением подмодуля $(C_1 + X)$ в M ;
- (3) если $M = N + L$, то X является $+$ -дополнением модуля $N \cap L$ в L тогда и только тогда, когда X является $+$ -дополнением подмодуля N в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Очевидно.

(2) Пусть $C = C \cap (C_1 + X) + K$; тогда $N + X = C_1 + X + K$. Значит,

$$N = C_1 + K + (N \cap X) = C_1 + K$$

(так как $N \cap X \leq^S N$). Таким образом, $C = K + (C \cap C_1) = K$ (потому что $C \cap C_1 \leq^S C$). Отсюда следует отношение $C \cap (C_1 + X) \leq^S C$, которое завершает доказательство утверждения (2).

(3) Очевидно.

ЛЕММА 2.6. Если подмодуль N модуля M является $+$ -дополнением некоторого подмодуля в M и B является $+$ -дополнением подмодуля N в M , то N является $+$ -дополнением подмодуля B в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно.

ЛЕММА 2.7. Пусть $M = N + K$. Если подмодуль K обладает слабым свойством $+$ -дополнительности, то $K = P + N \cap K$, где P – подмодуль модуля N , являющийся $+$ -дополнением в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку подмодуль K модуля M обладает слабым свойством $+$ -дополнительности, пересечение $N \cap K$ имеет $+$ -дополнение P в K . Отсюда вытекает требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Если M – слабо квазидискретный модуль, подмодуль N является $+$ -дополнением в M и B является $+$ -дополнением подмодуля N в M , то $M = N \oplus B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Слабая квазидискретность и свойства S_i -дополнительности для $i = 1, 2$ наследуются слагаемыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Покажем, что свойство S_1 -дополнительности наследуется слагаемыми. Предположим, что модуль $M = N \oplus N_1$ обладает свойством S_1 -дополнительности. Пусть $C \leq A \leq N$, причем C является $+$ -дополнением в N . Если B – $+$ -дополнение подмодуля A в N , то по лемме 2.5 B является $+$ -дополнением модуля $(A + N_1)$ в M . Снова применяя лемму 2.5, мы видим, что C является $+$ -дополнением в M , и из того, что M обладает свойством S_1 -дополнительности, вытекают отношения $C \cap B = 0$ и $C \oplus B \leq^{\oplus} M$. Таким образом, согласно модулярному закону имеем $C \oplus B \leq^{\oplus} N$. Следовательно, N обладает свойством S_1 -дополнительности.

(2) Покажем, что слабая квазидискретность наследуется слагаемыми. Пусть $M = N \oplus N_1$ – слабо квазидискретный модуль, и пусть подмодули X и Y являются $+$ -дополнениями друг друга в N . По лемме 2.5 X является $+$ -дополнением модуля $Y \oplus N_1$ в M . Из равенств

$$X \cap (Y \oplus N_1) = X \cap N \cap (Y \oplus N_1) = X \cap Y \leq^S Y \leq Y \oplus N_1$$

вытекает, что X и $Y \oplus N_1$ являются $+$ -дополнениями друг друга в M . Поскольку модуль M слабо квазидискретен, имеем $X \cap (Y \oplus N_1) = 0$, а значит, $X \cap Y = 0$. Следовательно, N является слабо квазидискретным модулем.

(3) Покажем, что свойство S_2 -дополнительности наследуется слагаемыми. Предположим, что модуль $M = N \oplus N_1$ обладает свойством S_2 -дополнительности. Пусть X – слагаемое модуля N , и пусть Y – $+$ -дополнение модуля X в N . По лемме 2.5 Y является $+$ -дополнением модуля $X \oplus N_1$ в M . Поскольку $X \oplus N_1 \leq^{\oplus} M$, из свойства S_2 -дополнительности модуля M вытекает, что $Y \cap (X \oplus N_1) = 0$; значит, $Y \cap X = 0$. Следовательно, N обладает свойством S_2 -дополнительности.

ЛЕММА 2.10. Пусть M – слабо квазидискретный модуль, и пусть A – $+$ -дополнение в M . Тогда $A \cap B \leq^{\oplus} B$ для всякого подмодуля B модуля M , содержащего $+$ -дополнение подмодуля A в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если подмодуль B модуля M содержит $+$ -дополнение X подмодуля A в M , то A и X являются $+$ -дополнениями друг друга в M . Значит, $M = A \oplus X$, откуда $B = (A \cap B) \oplus X$.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Пусть $M = A + B$, где A – $+$ -дополнение в M , а B обладает слабым свойством $+$ -дополнительности. Если модуль M слабо квазидискретен, то $A \cap B \leq^{\oplus} B$. Более того, если $B \leq^{\oplus} M$, то $A \cap B \leq^{\oplus} M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.7 B содержит $+$ -дополнение подмодуля A в M . Таким образом, доказываемое утверждение следует из леммы 2.10.

СЛЕДСТВИЕ 2.12. Пусть M – модуль со слабым свойством $+$ -дополнительности. Если M слабо квазидискретен, то M удовлетворяет условию (D_3) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение вытекает из следствий 2.4 и 2.11 и того, что каждое слагаемое модуля M является $+$ -дополнением в M .

ЛЕММА 2.13. Если модуль M представляется в виде $M = \sum_{i=1}^n M_i$, где все M_i обладают слабым свойством дополнительности, то M также обладает слабым свойством дополнительности, причем каждый подмодуль модуля M имеет $+$ -дополнение вида $\sum_{i=1}^n L_i$, где $L_i \leq M_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по n . Пусть X – подмодуль модуля M . По лемме 2.7 подмодуль $X + \sum_{i=2}^n M_i$ имеет $+$ -дополнение L_1 в M , для которого $L_1 \leq M_1$, а значит,

$$\left(X + \sum_{i=2}^n M_i \right) \cap L_1 \leq^S L_1.$$

По предположению индукции $(X + L_1) \cap \sum_{i=2}^n M_i$ имеет $+$ -дополнение в $\sum_{i=2}^n M_i$ вида $\sum_{i=2}^n L_i$, где $L_i \leq M_i$; таким образом,

$$(X + L_1) \cap \sum_{i=2}^n L_i \leq^S \sum_{i=2}^n L_i.$$

Ясно, что $M = X + \sum_{i=1}^{n-1} L_i$ и что

$$X \cap \sum_{i=1}^n L_i \leq \left(X + \sum_{i=2}^n M_i \right) \cap L_1 + (X + L_1) \cap \sum_{i=2}^n L_i \leq^S \sum_{i=1}^n L_i.$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^n L_i$ является $+$ -дополнением модуля X в M , и M обладает слабым свойством $+$ -дополнительности.

ЛЕММА 2.14. Если $M = \sum_{i \in I} H_i$ – неизбыточная сумма полых модулей, то для любого конечного подмножества F множества I сумма $\sum_{i \in F} H_i$ является $+$ -дополнением суммы $\sum_{i \in I \setminus F} H_i$ в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – конечное подмножество множества I . По лемме 2.13 $\sum_{i \in F} H_i$ обладает слабым свойством $+$ -дополнительности, и $\sum_{i \in F} H_i \cap \sum_{i \in I \setminus F} H_i$ имеет $+$ -дополнение вида $\sum_{i \in F} L_i$ в $\sum_{i \in F} H_i$, где $L_i \leq H_i$ для всех $i \in F$. По лемме 2.5 $\sum_{i \in F} H_i$ является $+$ -дополнением подмодуля $\sum_{i \in I \setminus F} H_i$ в M . Если $i \in F$ и L_i является собственным подмодулем полого модуля H_i , то H_i содержится в $\sum_{j \in I \setminus \{i\}} H_j$. Из неизбыточности суммы $\sum_{i \in I} H_i$ вытекает, что $L_i = H_i$ для всех $i \in F$.

СЛЕДСТВИЕ 2.15. Пусть F – конечное множество и $M = \sum_{i \in F} H_i$ – неизбыточная сумма полых модулей. Тогда для любого $K \subseteq F$ подсуммы $\sum_{i \in K} H_i$ и $\sum_{i \in F \setminus K} H_i$ являются $+$ -дополнениями друг друга в M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. Пусть F – конечное множество и $M = \sum_{i \in F} H_i$ – неизбыточная сумма полых модулей. Если модуль M слабо квазидискретен, то сумма $\sum_{i \in F} H_i$ прямая и разложение $\bigoplus_{i \in F} H_i$ дополняет прямые слагаемые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.15 для каждого $k \in F$ подмодули H_k и $\sum_{i \neq k} H_i$ являются $+$ -дополнениями друг друга в M . Если модуль M слабо квазидискретен, то $H_k \cap \sum_{i \neq k} H_i = 0$. Следовательно, сумма $\sum_{i \in F} H_i$ прямая. Пусть $X \leq^\oplus M$. Тогда по лемме 2.13 X имеет $+$ -дополнение в M вида $Y = \bigoplus_{i \in F} L_i$, где $L_i \leq H_i$. Поскольку модуль M слабо квазидискретен, по следствию 2.8 он допускает

разложение $M = X \oplus \bigoplus_{i \in F} L_i$; таким образом, $L_i \leqslant^\oplus H_i$ для $i \in F$. Поскольку все модули H_i полые, для каждого $i \in F$ либо $L_i = H_i$, либо $L_i = 0$. Удаляя из F все индексы i , для которых $L_i = 0$, мы получаем множество $K \subseteq F$, для которого $M = X \oplus (\bigoplus_{i \in K} H_i)$. Следовательно, разложение $\bigoplus_{i \in F} H_i$ дополняет прямые слагаемые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. Пусть $M = \sum_{i \in I} H_i$ – неизбыточная сумма полых модулей, где I – произвольное множество. Если M является слабо квазидискретным модулем и $+$ -дополнения в M являются слагаемыми, то сумма $\sum_{i \in I} H_i$ прямая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.14 для любого конечного подмножества F множества I сумма $\sum_{i \in F} H_i$ является $+$ -дополнением суммы $\sum_{i \in I \setminus F} H_i$ в M . По предположению $\sum_{i \in F} H_i$ является слагаемым в M , так что из предложения 2.9 вытекает слабая квазидискретность модуля $\sum_{i \in F} H_i$. Наконец, согласно предложению 2.16 сумма $\sum_{i \in F} H_i$ прямая. Следовательно, сумма $\sum_{i \in I} H_i$ тоже прямая.

3. Обобщенно проективные модули.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть A и B – модули. Скажем, что A является S -проективным относительно B (или, по-другому, A является B - S -проективным), если для любого эпиморфизма $g: B \rightarrow N$ и любого гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow N$ с тем свойством, что $\ker g$ является $+$ -дополнением в $\ker(\varphi \oplus g)$, найдется гомоморфизм $\psi: A \rightarrow B$, для которого $\psi g = \varphi$; иными словами, модуль A является B - S -проективным, если для каждого подмодуля X модуля B любой гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B/X$ с тем свойством, что X обладает $+$ -дополнением в $\ker(\varphi \oplus \eta)$, где $\eta: B \rightarrow B/X$ – естественный эпиморфизм, можно поднять до гомоморфизма $\psi: A \rightarrow B$, для которого $\eta\psi = \varphi$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $M = A \oplus B$. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) модуль A B -проективен;
- (2) если $M = N \oplus B$, то $N \cap B \leqslant^\oplus N$ (и, значит, $M = N_1 \oplus B$, где $N_1 \leqslant N$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из леммы 4.47 в [3].

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\varphi: A \rightarrow B/K$ – произвольный гомоморфизм с тем свойством, что $K \leqslant B$. Положим

$$N = \{a - b : a \in A, b + K = \varphi(a)\}.$$

Ясно, что $N \cap B = K$, так что условие (2) влечет равенство $N = K \oplus N_1$. Следовательно, $M = N_1 \oplus B$. Пусть $\pi: M \rightarrow B$ – естественное проектирование на B вдоль N_1 . Тогда $0 = \pi(a - b)$ для всех $a - b \in N_1$. Значит, $\pi(a) = b$. Поэтому φ поднимается до сужения отображения π на A , что доказывает B -проективность модуля A .

Следующее предложение аналогично лемме 3.1. Оно характеризует относительно S -проективные модули. Эта характеристика двойственна характеристике относительно инъективных модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $M = A \oplus B$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) модуль A B - S -проективен;
- (2) $M = B \oplus Y$ для каждого $+$ -дополнения Y подмодуля B в M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $(1) \Rightarrow (2)$. Предположим, что модуль A B - S -проективен. Пусть Y – $+$ -дополнение подмодуля B в M , и пусть $\eta: M \rightarrow M/Y$ – естественный эпиморфизм. Поскольку $\ker(\eta|_B) = B \cap Y$ и $\ker(\eta|_A \oplus \eta|_B) = Y$, по лемме 2.5 Y является $+$ -дополнением модуля $B \cap Y$ в Y . Следовательно, из S -проективности модуля A относительно B вытекает существование гомоморфизма $\psi: A \rightarrow B$, для которого $(\eta|_B)\psi = \eta|_A$. Положим $L = \{a + \psi(a) : a \in A\}$. Легко проверить, что $L \leq Y$ и $M = B \oplus L$. Минимальность модуля Y влечет $Y = L$. Следовательно, $M = B \oplus Y$.

Докажем, что $(2) \Rightarrow (1)$. Пусть X – подмодуль модуля B и $\varphi: A \rightarrow B/X$ – произвольный гомоморфизм. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\eta: B \rightarrow B/X$. Предположим, что X обладает $+$ -дополнением в $\ker(\varphi \oplus \eta)$, где $\varphi \oplus \eta: A \oplus B \rightarrow B/X$ – гомоморфизм, определенный правилом $(\varphi \oplus \eta)(a + b) = \varphi(a) + \eta(b)$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Для каждого $a \in A$ найдется $b \in B$, для которого $\varphi(a) = \eta(b)$, т.е. $a - b \in \ker(\varphi \oplus \eta)$. Следовательно, $A \leq \ker(\varphi \oplus \eta) + B$, и $M = \ker(\varphi \oplus \eta) + B$. Легко проверить, что

$$\ker(\varphi \oplus \eta) \cap B = \ker \eta = X.$$

Подмодуль X обладает $+$ -дополнением L в $\ker(\varphi \oplus \eta)$; согласно лемме 2.5 L является $+$ -дополнением модуля B в M . По предположению $M = L \oplus B$. Пусть $\pi: L \oplus B \rightarrow B$ – естественное проектирование. Положим $\psi = \pi|_A$. Для любого $a \in A$ имеем

$$\varphi(a) = (\varphi \oplus \eta)(a) = (\varphi \oplus \eta)((1 - \pi(a)) + \pi(a)) = (\varphi \oplus \eta)(\pi(a)) = \eta(\pi(a)) = \psi(a).$$

Следовательно, модуль A B - S -проективен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть M – модуль и B – его подмодуль. Скажем, что M обладает свойством B -дополнительности, если любой подмодуль K модуля M со свойством $M = B + K$ содержит $+$ -дополнение подмодуля B в M .

Скажем, что модуль M в основном обладает свойством $+$ -дополнительности, если каждый циклический подмодуль K модуля M со свойством $M = B + K$ содержит $+$ -дополнение подмодуля B в M .

Следующее предложение описывает связь между B -проективностью и B - S -проективностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $M = A \oplus B$. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) модуль A B -проективен;
- (2) модуль A B - S -проективен и M обладает свойством B -дополнительности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $(1) \Rightarrow (2)$. Если $M = B + K$, то по лемме 3.1 $K \cap B \leq^\oplus K$, а значит, K содержит $+$ -дополнение подмодуля B в M . Таким образом, M обладает свойством B -дополнительности. Пусть L является $+$ -дополнением подмодуля B в M , т.е. $M = B + L$ и $B \cap L \leq^s L$. Согласно лемме 3.1 $B \cap L \leq^\oplus L$. Следовательно, $B \cap L = 0$, откуда вытекает B - S -проективность модуля A .

Докажем импликацию $(2) \Rightarrow (1)$. Если $M = B + N$, то по условию (2) N содержит $+$ -дополнение N_1 подмодуля B в M и $M = N_1 \oplus B$; значит, $N \cap B \leq^\oplus N$. По лемме 3.1 модуль A B -проективен.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. (1) Ясно, что модуль M обладает свойством $+$ -дополнительности, если он обладает свойством B -дополнительности для каждого подмодуля B модуля M . Любой модуль M обладает свойствами 0 -дополнительности и M -дополнительности, однако существует модуль M со свойством B -дополнительности (для некоторого нетривиального подмодуля B), который не обладает свойством $+$ -дополнительности. Например, $\mathbb{Z}$ -модуль $M = C(p) \oplus \mathbb{Z}$ (где p – простое число) обладает свойством $C(p)$ -дополнительности (в силу предложения 3.3 и того, что $\mathbb{Z}$ является проективным $\mathbb{Z}$ -модулем), но не обладает свойством $+$ -дополнительности. Действительно, $M = (0 \oplus 2\mathbb{Z}) + (C(p) \oplus 3\mathbb{Z})$, но $(C(p) \oplus 3\mathbb{Z})$ не содержит $+$ -дополнения подмодуля $(0 \oplus 2\mathbb{Z})$ в M .

(2) Из B - S -проективности не вытекает B -проективность. Например, в $\mathbb{Z}$ -модуле $M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ ($\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел) $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Q}$ не является $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ -проективным, но является $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ -проективным. Действительно, если L является $+$ -дополнением модуля $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ в M , то $M = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} + L$, причем подмодуль $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \cap L$ мал в L , а значит, и в $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$. Поскольку $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ не содержит ненулевых малых подмодулей, имеем $M = \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \oplus L$.

(3) Каждый простой модуль S является N - S -проективным, где N – модуль конечной равномерной размерности. Действительно, пусть N имеет равномерную размерность $n < \infty$ (т.е. $\text{Udim}(N) = n$). Положим $M := N \oplus S$ и рассмотрим $+$ -дополнение L модуля N в M . Из того, что $L/(L \cap N) \cong S$ и $L \cap N \leq^s L$, вытекает, что L является локальным модулем с малым радикалом $L \cap N$ (т.е. L является циклическим локальным модулем с единственным максимальным $L \cap N$). Если $L \cap N \neq 0$, то

$$n + 1 = \text{Udim}(M) = \text{Udim}(N) + \text{Udim}(L) - \text{Udim}(L \cap N) = n$$

– мы пришли к противоречию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если модуль $M = A \oplus B$ обладает свойством S_2 - $+$ -дополнительности, то модуль A B - S -проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Y является $+$ -дополнением модуля B в M , то B и Y являются $+$ -дополнениями друг друга в M . Значит, из свойства S_2 -дополнительности модуля M вытекает, что $M = B \oplus Y$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Если $M = A \oplus B$ – слабо квазидискретный модуль, то модуль A B - S -проективен.

Следующее предложение описывает связь между свойством S_2 -дополнительности и слабой квазидискретностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Модуль M слабо квазидискретен, если и только если M обладает свойством S_2 -дополнительности и все $+$ -дополнения, которые имеют $+$ -дополнения в M , являются слагаемыми модуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из следствия 2.8 и наблюдения после определения 2.3.

Докажем необходимость. Если X и Y являются $+$ -дополнениями друг друга в M , то по предположению X и Y являются слагаемыми в M , и из свойства S_2 -дополнительности модуля M вытекает, что $X \cap Y = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Скажем, что M является абсолютно S -проективным модулем, если для любого разложения $M = A \oplus B$ модуль A B - S -проективен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Если M – абсолютно S -проективный модуль, то M обладает свойством S_2 -дополнительности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 3.8. Если M – абсолютно S -проективный модуль и все $+$ -дополнения, имеющие $+$ -дополнения в M , являются слагаемыми, то M слабо квазидискретен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое утверждение следует из предложений 3.6 и 3.7.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ – модуль, и пусть X – подмножество индексного множества I . Мы будем обозначать сумму $\bigoplus_{i \in X} M_i$ через $M(X)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ и для любых подмножеств J и K множества I со свойством $J \cap K = \emptyset$ подмодуль $M(J)$ $M(K)$ -проективен. Если разложение $\bigoplus_{i \in I} M_i$ дополняет прямые слагаемые, то M обладает свойством S_2 - $+$ -дополнительности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что все M_i – неразложимые модули (не обязательно полые). Если $M = A \oplus B$, то из того, что разложение $\bigoplus_{i \in I} M_i$ дополняет прямые слагаемые, следует, что $A \cong M(J)$ и $B \cong M(I - J)$ для некоторого подмножества J модуля I , т.е. A и B относительно S -проективны. Следовательно, M обладает свойством S_2 -дополнительности в силу предложения 3.7.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ и все M_i $M(I - \{i\})$ -проективны. Если разложение $\bigoplus_{i \in I} M_i$ дополняет прямые слагаемые, то M обладает свойством S_2 -дополнительности.

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть F – конечное множество, $M = \bigoplus_{i \in F} M_i$ и все M_i – полые модули. Если для каждого подмножества J множества F модуль $M(J)$ $M(F - J)$ -проективен, то

- (1) все $+$ -дополнения в M являются слагаемыми модуля M ;
- (2) разложение $\bigoplus_{i \in F} M_i$ дополняет прямые слагаемые;
- (3) модуль M слабо квазидискретен;
- (4) M удовлетворяет условию (D_3) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть X – $+$ -дополнение в модуле M . По лемме 2.13 X имеет $+$ -дополнение в M вида $\bigoplus_{i \in F} L_i$, где $L_i \leq M_i$ для всех $i \in F$. Поскольку все модули M_i полые, для каждого $i \in F$ имеем либо $L_i = 0$, либо $L_i = M_i$. (Если $0 \neq L_i \neq M_i$, то

$$M_i = L_i + \left(\bigoplus_{j \in F - \{i\}} L_j + X \right) \cap M_i.$$

Поскольку модуль M_i полый, имеем $(\bigoplus_{j \in F - \{i\}} L_j + X) \cap M_i = M_i$, откуда

$$\bigoplus_{j \in F - \{i\}} L_j + X = M,$$

что противоречит минимальности суммы $\bigoplus_{i \in F} L_i$ относительно $M = X + \bigoplus_{i \in F} L_i$. Таким образом, удаляя из F все индексы, для которых $L_i = 0$, получаем множество

$K \subseteq F$ с тем свойством, что $M(K)$ является $+$ -дополнением модуля X в M . По лемме 2.6 X является $+$ -дополнением модуля $M(K)$ в M . Поскольку модуль $M(F - K)$ $M(K)$ -проективен, из предложения 3.2 вытекает, что $M = M(K) \oplus X$. Следовательно, $X \leq^{\oplus} M$.

(2) Каждое слагаемое является $+$ -дополнением, поэтому из доказательства утверждения (1) вытекает, что для слагаемого X модуля M найдется множество $K \subseteq F$, для которого $M = M(K) \oplus X$.

(3) Пусть X и Y являются $+$ -дополнениями друг друга в M . Тогда в силу утверждения (1) имеем $X \leq^{\oplus} M$; значит, $X \cong M(K)$ для некоторого подмножества K множества F . Таким образом, модуль $M(F - K)$ X - S -проективен. Следовательно, по предложению 3.2 $M = X \oplus Y$.

(4) Доказываемое утверждение вытекает из следствия 2.12.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Mohamed, S. Singh, "Generalizations of decomposition theorems known over perfect rings", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **24**:4 (1977), 496–510.
- [2] K. Oshiro, "Semiperfect modules and quasi-semiperfect modules", *Osaka J. Math.*, **20**:2 (1983), 337–372.
- [3] S. H. Mohamed, B. J. Müller, *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **147**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [4] S. Mohamed, B. J. Muller, *Cojective Modules*, Preprint.
- [5] W. D. Burgess, R. Raphael, "On modules with the absolute direct summand property", *Ring Theory* (Granville, OH, 1992), World Sci. Publ., River Edge, NJ., 1993, 137–148.
- [6] F. Kasch, *Modules and Rings*, London Math. Soc. Monogr., **17**, Academic Press, London, 1982.

М. А. Камал

Ain Shams University, Египет

E-mail: mahmoudkamal333@hotmail.com

Поступило

09.03.2009

А. Юзеф

Ain Shams University, Египет