Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Линг Лиу, Бинг-Лианг Шен, Сложность скрещенных произведений, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 407–412

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:59:39

Сложность скрещенных произведений

Линг Лиу, Бинг-Лианг Шен

Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа, которая измеряет конечномерную алгебру A , и $A \#_{\sigma} H$ – скрещенное произведение. Показано, что если алгебра Хопфа H и двойственная алгебра H^* полупросты, то сложность скрещенного произведения $A \#_{\sigma} H$ равна сложности алгебры A . Кроме того, доказано, что сложность конечномерной алгебры Хопфа H равна сложности тривиального модуля ${}_H k$. В качестве приложения вычислена сложность свидлеровой четырехмерной алгебры Хопфа H_4 , которая оказывается равной 1.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10165

1. Введение. Теорема Альперина–Эванса [1] из теории модулярных представлений конечных групп гласит, что сложность конечномерного kG -модуля M над kG равна максимальной сложности модуля M над kE , где E пробегает все элементарные абелевы подгруппы. Сложности модулей рассматриваются также при изучении структуры колчана Ауслендера–Рейтена групповой алгебры (см. [2]). Накануне [3] исследовал сложность некоторых модулей над ограниченными обертывающими ограниченной алгебры Ли.

Хорошо известно, что групповые и обертывающие алгебры алгебр Ли являются классическими примерами алгебр Хопфа. В связи с этим естественно рассмотреть комплекс модулей над конечномерной алгеброй Хопфа. Этим и мотивирована наша работа.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе мы напоминаем определения, связанные с алгебрами Хопфа и скрещенными произведениями. В третьем разделе показываем, что если алгебра Хопфа H и двойственная алгебра H^* полупросты, то сложность скрещенного произведения $A \#_{\sigma} H$ равна сложности A . В четвертом разделе доказано, что сложность конечномерной алгебры Хопфа H равна сложности тривиального модуля ${}_H k$. В качестве приложения мы вычисляем сложность свидлеровой четырехмерной алгебры Хопфа H_4 , которая оказывается равной 1.

2. Основные определения и свойства. Мы начнем с определения основных понятий, связанных с алгебрами Хопфа и скрещенными произведениями. Более

Работа выполнена при поддержке Фонда Чжэцзянского комитета по образованию (проект Y201121955) и Национального научного фонда Китая (проект 10871042).

подробную информацию, а также отсутствующие здесь определения, можно найти в [4]. Всюду ниже через k обозначено поле. Мы пишем $\otimes$ вместо $\otimes_k$ и подразумеваем, что функтор Hom всегда берется над полем k . Для алгебры A через $A\text{-mod}$ мы обозначаем категорию конечнопорожденных левых A -модулей. Для коумножения мы используем обозначение Свидлера $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$.

Алгебра Хопфа [4] определяется как k -пространство H со структурами ассоциативной алгебры $(H, m, 1)$ и коассоциативной коалгебры (H, Δ, ε) (здесь Δ и ε – морфизмы алгебр), на котором задано k -линейное отображение $S: H \rightarrow H$ (называемое *антиподом*), удовлетворяющее условию

$$h_1 S(h_2) = S(h_1) h_2 = \varepsilon(h) 1_H$$

для всех $h \in H$.

Заметим, что если H – конечномерная алгебра Хопфа, то двойственная алгебра $H^* = \text{Hom}(H, k)$ тоже является конечномерной алгеброй Хопфа, причем ее структура двойственна структуре H .

Напомним некоторые определения, связанные со скрещенными произведениями. Говорят, что алгебра Хопфа H *измеряет* алгебру A , если k -линейное отображение $H \otimes A \rightarrow A$, заданное правилом $h \otimes a \mapsto h \cdot a$, удовлетворяет условиям

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b), \quad h \cdot 1 = \varepsilon(h) 1$$

для всех $a, b \in A$ и $h \in H$. Отображение $\sigma \in \text{Hom}(H \otimes H, A)$ называется *обратимым относительно конволюции*, если существует отображение $\tau \in \text{Hom}(H \otimes H, A)$, удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} (\sigma * \tau)(h \otimes g) &= \sigma(h_1 \otimes g_1) \tau(h_2 \otimes g_2) = \varepsilon(h) \varepsilon(g) 1_A, \\ (\tau * \sigma)(h \otimes g) &= \tau(h_1 \otimes g_1) \sigma(h_2 \otimes g_2) = \varepsilon(h) \varepsilon(g) 1_A \end{aligned}$$

для всех $h, g \in H$.

Пусть H – алгебра Хопфа и A – алгебра. Предположим, что H измеряет алгебру A и σ – обратимое относительно конволюции отображение из $\text{Hom}(H \otimes H, A)$. *Скрещенным произведением $A \#_\sigma H$ алгебр A и H* называется множество $A \otimes H$, рассматриваемое как линейное пространство, с умножением, определенным правилом

$$(a \#_\sigma h)(b \#_\sigma k) = a(h_1 \cdot b) \sigma(h_2, k_1) \#_\sigma h_3 k_2$$

для $h, k \in H$ и $a, b \in A$. Через $a \#_\sigma h$ мы обозначаем тензорное произведение $a \otimes h$.

ЛЕММА 2.1 [5], [6]. *Скрещенное произведение $A \#_\sigma H$ является ассоциативной алгеброй с единицей $1 \#_\sigma 1$, если и только если выполнены следующие условия:*

- (1) *A является подкрученным H -модулем, т.е. $1 \cdot a = a$ для всех $a \in A$ и*

$$h \cdot (k \cdot a) = \sigma(h_1, k_1)(h_2 k_2 \cdot a) \sigma^{-1}(h_3, k_3)$$

для всех $h, k \in H$ и $a \in A$;

- (2) *σ является коциклом, т.е. $\sigma(h, 1) = \sigma(1, h) = \varepsilon(h) 1$ для всех $h \in H$ и*

$$(h_1 \cdot \sigma(k_1, m_1)) \sigma(h_2, k_2 m_2) = \sigma(h_1, k_1) \sigma(h_2 k_2, m)$$

для всех $h, k, m \in H$.

Заметим, что для тривиального отображения σ (т.е. такого, что $\sigma(h, k) = \varepsilon(h) \times \varepsilon(k)1$ для $h, k \in H$) условие (1) из леммы 2.1 означает просто, что A является H -модулем, а условие (2) становится тривиальным, так что в этом случае A является H -модульной алгеброй. Кроме того, приведенное выше определение скрещенного произведения сводится к определению smash-произведения, и скрещенное произведение превращается в обычное smash-произведение: $A \#_{\sigma} H = A \# H$ (см. определение 4.1.3 в [4]).

3. Сложность и скрещенные произведения. Пусть H – полупростая алгебра Хопфа и $A \#_{\sigma} H$ – скрещенное произведение. В этом разделе мы рассматриваем связь между сложностью алгебры A и скрещенного произведения $A \#_{\sigma} H$.

Сложность модуля отражает рост членов минимальной проективной резольвенты этого модуля. Точнее, если A – конечномерная алгебра и M – конечномерный A -модуль с минимальной проективной резольвентой

$$\mathcal{P}^{\bullet}: \dots \xrightarrow{f_{n+1}} P_n \xrightarrow{f_n} \dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

то сложность модуля M определяется как

$$\text{cx}M = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid \dim P_i \leq ci^{n-1} \text{ для некоторого положительного } c \in \mathbb{Q} \\ \text{и почти всех } i \geq 0 \}.$$

Если таких чисел n не существует, то сложность модуля M считается бесконечной. Заметим, что по теореме Альперина–Эванса всякий конечномерный A -модуль над групповой алгеброй $A = kG$ конечной группы имеет конечную сложность. Сложность алгебры A определяется как

$$\text{cx}A = \sup \{ \text{cx}M \mid M \in A\text{-mod} \}.$$

ЛЕММА 3.1 [7]. Пусть H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа и $A \#_{\sigma} H$ – скрещенное произведение. Тогда любой левый $A \#_{\sigma} H$ -модуль M является $A \#_{\sigma} H$ -прямым слагаемым произведения $(A \#_{\sigma} H) \otimes_A M$.

ЛЕММА 3.2. Пусть H – конечномерная полупростая алгебра Хопфа и $A \#_{\sigma} H$ – скрещенное произведение. Тогда для любого конечномерного левого $A \#_{\sigma} H$ -модуля M имеет место равенство $\text{cx}_{A \#_{\sigma} H} M = \text{cx}_A M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, нетрудно показать, что $\text{cx}_A M \leq \text{cx}_{A \#_{\sigma} H} M$, поскольку любая проективная резольвента $A \#_{\sigma} H$ -модуля M является также проективной резольвентой того же M , рассматриваемого как A -модуль.

Обратно, пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \dots \rightarrow P_j \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow_{A \#_{\sigma} H} M \rightarrow 0, \\ \mathcal{P}': \dots \rightarrow P'_j \rightarrow \dots \rightarrow P'_0 \rightarrow_A M \rightarrow 0 \end{aligned}$$

– минимальные проективные резольвенты модуля M над $A \#_{\sigma} H$ и над A соответственно. Тогда $(A \#_{\sigma} H) \otimes_A \mathcal{P}'$ является проективной резольвентой $A \#_{\sigma} H$ -модуля $(A \#_{\sigma} H) \otimes_A M$. Точность этой последовательности вытекает из того, что $A \#_{\sigma} H$ является проективным (на самом деле даже свободным) правым A -модулем. Кроме

того, по лемме 3.1 M представляет собой $A \#_{\sigma} H$ -прямое слагаемое произведения $(A \#_{\sigma} H) \otimes_A M$. Следовательно,

$$\dim P_j \leq \dim(A \#_{\sigma} H) \otimes_A P'_j = \dim H \cdot \dim P'_j.$$

Таким образом, $\text{сх}_{A \#_{\sigma} H} M \leq \text{сх}_A M$, что и завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть H – полупростая конечномерная алгебра Хопфа с полупростой двойственной алгеброй H^* и $A \#_{\sigma} H$ – скрещенное произведение. Тогда $\text{сх}_A \#_{\sigma} H = \text{сх}_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $\text{сх}_A \#_{\sigma} H \leq \text{сх}_A$. Действительно, для любого конечномерного $A \#_{\sigma} H$ -модуля M по лемме 3.2 имеем $\text{сх}_{A \#_{\sigma} H} M = \text{сх}_A M$. Значит, $\text{сх}_A \#_{\sigma} H \leq \text{сх}_A$.

Кроме того, $A \#_{\sigma} H$ является H^* -модульной алгеброй относительно умножения

$$f \cdot (a \#_{\sigma} h) = a \#_{\sigma} (f \rightharpoonup h) = \langle f, h_2 \rangle a \#_{\sigma} h_1$$

$a \in A, h \in H, f \in H^*$, так что определено smash-произведение алгебр $(A \#_{\sigma} H) \# H^*$. Из сделанного выше замечания и полупростоты алгебры H^* вытекает, что

$$\text{сх}(A \#_{\sigma} H) \# H^* \leq \text{сх}_A \#_{\sigma} H.$$

Согласно теореме 2.2 из [8] имеем $(A \#_{\sigma} H) \# H^* \cong M_n(A)$, где $n = \dim H$, поэтому это произведение эквивалентно алгебре A в смысле Мориты. Следовательно, $\text{сх}_A = \text{сх}(A \#_{\sigma} H) \# H^*$. Таким образом,

$$\text{сх}_A = \text{сх}(A \#_{\sigma} H) \# H^* \leq \text{сх}_A \#_{\sigma} H \leq \text{сх}_A,$$

откуда получаем $\text{сх}_A \#_{\sigma} H = \text{сх}_A$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть H – полупростая конечномерная алгебра Хопфа с полупростой двойственной алгеброй H^* и $A \# H$ – smash-произведение. Тогда $\text{сх}_A \# H = \text{сх}_A$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Пусть G – конечная группа и N – нормальная подгруппа группы G . Тогда если $\text{char } k \nmid |G/N|$, то $\text{сх} kG = \text{сх} kN$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой группы G и ее нормальной подгруппы N имеем $kG = kN \#_{\sigma} k[G/N]$ (см. пример 7.1.6 в [4]). Алгебра $k[G/N]$ полупроста, поскольку $\text{char } k \nmid |G/N|$; кроме того, алгебра $k[G/N]$ всегда кополупроста. Значит, двойственная алгебра $(k[G/N])^*$ полупроста. По теореме 3.3 имеем $\text{сх} kG = \text{сх} kN$.

4. Сложность конечномерных алгебр Хопфа. В этом разделе мы докажем, что сложность конечномерной алгебры Хопфа H равна сложности тривиального модуля ${}_H k$. В качестве приложения вычислим сложность свидлеровой четырехмерной алгебры Хопфа H_4 .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть H – конечномерная алгебра Хопфа. Тогда $\text{сх} H = \text{сх}_H k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathcal{P}: \cdots \rightarrow P_j \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow {}_H k \rightarrow 0$$

– минимальная проективная резольвента модуля ${}_H k$. Тогда для любого конечномерного левого H -модуля M произведение $\mathcal{P} \otimes M$ является проективной резольвентой произведения ${}_H k \otimes M \cong M$. Пусть

$$\mathcal{Q}: \cdots \rightarrow Q_j \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

– минимальная проективная резольвента модуля M . Тогда

$$\dim Q_j \leq \dim P_j \otimes M = \dim M \cdot \dim P_j.$$

Значит, $\text{sx} M \leq \text{sx} {}_H k$. По определению сложности имеем $\text{sx} H = \text{sx} {}_H k$, что и завершает доказательство.

Напомним, что свидлерова четырехмерная алгебра Хопфа над полем k характеристики $\neq 2$ – это алгебра

$$H_4 = k\langle 1, g, x, gx \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \rangle;$$

структура коалгебры на ней определяется отношениями $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, $\varepsilon(g) = 1$ и $\varepsilon(x) = 0$, а антипод – отношениями $S(g) = g$ и $S(x) = -gx$. Свидлерова алгебра является наименьшей некоммутативной и некокоммутативной алгеброй Хопфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеет место равенство $\text{sx} H_4 = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вычислить сложность алгебры H_4 , найдем сначала все попарно неизоморфные неразложимые конечнопорожденные проективные H_4 -модули, т.е. полный набор попарно ортогональных примитивных идемпотентов в H_4 . Нетрудно видеть, что такой набор образуют идемпотенты $e_1 = 1/2 + 1/2g$ и $e_2 = 1/2 - 1/2g$. Таким образом, множество всех попарно неизоморфных неразложимых конечнопорожденных проективных левых H_4 -модулей состоит из двух модулей:

$$P_1 = H_4 e_1 = H_4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g \right) = k\langle 1 + g, x - gx \rangle,$$

$$P_2 = H_4 e_2 = H_4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}g \right) = k\langle 1 - g, x + gx \rangle.$$

Единственным максимальным подмодулем модуля P_1 является $k\langle x - gx \rangle$, а единственным максимальным подмодулем модуля P_2 является $k\langle x + gx \rangle$. Следовательно, $S_1 = P_1/k\langle x - gx \rangle$ и $S_2 = P_2/k\langle x + gx \rangle$ образуют полное множество попарно неизоморфных неразложимых простых левых H_4 -модулей. Непосредственная проверка показывает, что $S_1 \cong k\langle x + gx \rangle$ и $S_2 \cong k\langle x - gx \rangle$. Рассмотрим тривиальный модуль ${}_H k$. Поскольку $g \cdot k = \varepsilon(g)k = k$ и $x \cdot k = \varepsilon(x)k = 0$, имеем ${}_H k \cong k\langle x + gx \rangle \cong S_1$. Таким путем мы получаем следующую минимальную проективную резольвенту модуля ${}_H k$:

$$\mathcal{P}: \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow {}_H k \rightarrow 0.$$

Поскольку $\dim P_1 = \dim P_2 = 2$, из определения сложности вытекает, что $\text{sx} {}_H k = 1$. Следовательно, $\text{sx} H_4 = 1$ по теореме 4.1.

Авторы искренне признательны рецензенту за ценные предложения и замечания. Авторы также благодарны профессору Пу Чжану и доктору Бао-Лину Сюну за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. L. Alperin, L. Evens, “Representations, resolutions, and Quillen’s dimension theorem”, *J. Pure Appl. Algebra*, **22**:1 (1981), 1–9.
- [2] P. J. Webb, “The Auslander–Reiten quiver of a finite group”, *Math. Z.*, **179**:1 (1982), 97–121.
- [3] D. K. Nakano, “A bound on the complexity for G - T modules”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:2 (1995), 335–341.
- [4] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [5] R. J. Blattner, M. Cohen, S. Montgomery, “Crossed product and inner actions of Hopf algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298**:2 (1986), 671–711.
- [6] Y. Doi, M. Takeuchi, “Comm. Algebra”, **14**:5 (1986), 801–817.
- [7] F. Li, M.-M. Zhang, “Invariant properties of representations under cleft extensions”, *Sci. China Ser. A*, **50**:1 (2007), 121–131.
- [8] R. J. Blattner, S. Montgomery, “Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras”, *Pacific J. Math.*, **137**:1 (1989), 37–54.

Линг Лиу

Zhejiang Normal University, Китай

E-mail: ntliuling@yahoo.com.cn

Поступило

15.06.2011

Бинг-Лианг Шен

Shanghai University of Finance & Economics,

Zhejiang College, Китай