Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Лю Сиа-Фень, Кошулеподобные алгебры и модули, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 3, 413–435

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10166>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 18:22:41

Кошулеподобные алгебры и модули

Лю Сиа-Фень

В статье вводится понятие *кошулеподобной алгебры*, которое обобщает понятие *кошулевой алгебры*; примерами кошулеподобных алгебр являются некоторые регулярные по Артину–Шелтеру алгебры глобальной размерности 5. Обсуждаются основные свойства кошулеподобных модулей. В частности, получены некоторые необходимые и достаточные условия, при которых $\mathcal{KL}(A) = \mathcal{L}(A)$, где $\mathcal{KL}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$ – категории кошулеподобных модулей и модулей с линейными копредставлениями (см. [1]–[3] и др.) соответственно, а A – кошулеподобная алгебра. Построены новые кошулеподобные алгебры как “одноточечные расширения” известных алгебр. Даются критерии кошулеподобности для градуированных алгебр. Наконец, описывается получение многих классических кошулевых объектов из данных кошулеподобных объектов.

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm10166

1. Введение. После того как в 1970 г. были введены кошулевы алгебры (см. [4]), многие математики занялись исследованием алгебр “кошулева типа”. За последние четыре десятилетия появилось множество интересных обобщений кошулевых алгебр. В частности, по аналогии с регулярными по Артину–Шелтеру алгебрами глобальной размерности 3 (см. [5]) Бергер распространил понятие кошулевой алгебры на высшие однородные алгебры и в 2001 г. ввел так называемые *неквадратичные кошулевы алгебры* (см. [6]). Многие авторы предпочитают называть их “ d -кошулевыми”, а не “неквадратичными кошулевыми” (см. [7], [8]), где $d \geq 2$ – фиксированное целое число. В 2002 г. авторы работы [9], первоначальной целью которых было описание периодических резольвент тривиальных расширений алгебр путей колчана Дынкина в двудольной интерпретации, ввели понятие *почти кошулевой алгебры*; исследуя условия конечной порожденности Ext-алгебр градуированных алгебр, Грин и Маркос в 2005 г. определили класс δ -кошулевых алгебр (см. [10]); в 2006 г. Грин и Снашалл определили (D, A, B) -ярусные мономиальные алгебры (см. [11]); в 2007 г. был введен класс *кусочно кошулевых алгебр*, объединяющий кошулевы и d -кошулевы алгебры (см. [12]); Кассиди и Шелтон в 2008 г. ввели понятие $\mathcal{K}_2$ -алгебр с тем, чтобы избавиться от “ограничения чистоты” на проективные резольвенты (см. [13]); в 2009 г. Си и Лю определили *бикошулевы алгебры* (см. [14]);

Работа выполнена при поддержке Китайского фонда естественных наук (гранты №№ 11001245, 11271335).

с целью дальнейшего обобщения классов d -кошулевых алгебр и кусочно кошуле-вых алгебр были введены, соответственно, λ -кошулевы алгебры и (p, λ) -кошулевы алгебры в 2009 и 2010 гг. (см. [15] и [16]), и т.д.

Главная цель этой статьи состоит в определении и исследовании еще одного клас-са однородных алгебр, а именно, кошулеподобных алгебр, который не только обо-бщает некоторые классы алгебр кошулева типа, но и содержит некоторые регулярные по Артину–Шелтеру алгебры глобальной размерности в качестве частных примеров. Более того, как оказалось, кошулеподобные алгебры обладают многими хорошими свойствами, присущими другим классам алгебр кошулева типа. Исследования дан-ной статьи продолжаются в [17].

Статья организована следующим образом.

Во втором разделе содержатся обозначения, определения, примеры и основные свойства кошулеподобных алгебр и кошулеподобных модулей.

В третьем разделе приводятся необходимые и достаточные условия равенства $\mathcal{KL}(A) = \mathcal{L}(A)$, где $\mathcal{KL}(A)$ и $\mathcal{L}(A)$ – категории кошулеподобных модулей и модулей с линейными копредставлениями соответственно, а A – кошулеподобная алгебра. В частности, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА I. Пусть A – кошулеподобная алгебра. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) $\mathcal{L}(A) = \mathcal{KL}(A)$;
- (2) для любого $M \in \mathcal{L}(A)$ равенство $J\Omega^i(M) = \Omega^i(M) \cap J\Omega^i(M/JM)$ выполнено при всех $i \geq 2$;
- (3) для любого $M \in \mathcal{L}(A)$ справедлива лемма о минимальной подковке для точной последовательности

$$0 \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M/JM) \longrightarrow JM \longrightarrow 0;$$

иными словами, любую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathcal{P}_* & & & \mathcal{Q}_* & & \\ & \downarrow & & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M/JM) & \longrightarrow & JM & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & & \uparrow & & \\ & 0 & & & 0 & & \end{array}$$

где $\mathcal{P}_*$ и $\mathcal{Q}_*$ – минимальные проективные резольвенты модулей $\Omega^1(M)$ и JM соответственно, можно дополнить до коммутативной диаграммы с точ-ными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{P}_* & \longrightarrow & \mathcal{L}_* & \longrightarrow & \mathcal{Q}_* & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M/JM) & \longrightarrow & JM & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

в которой столбец $\mathcal{L}_* \rightarrow \Omega^1(M/JM) \rightarrow 0$ также является проективной резольвентой и $L_n \cong P_n \oplus Q_n$ для всех $n \geq 0$.

Здесь J обозначает градуированный радикал Джексона алгебры A , а $\Omega^1(X)$ – первый модуль сизигий X .

В четвертом разделе мы приводим некоторые конструкции кошулеподобных алгебр, которые дают нам новые примеры таких алгебр. А именно, показываем, что алгебры, противоположные кошулеподобным алгебрам, также кошулеподобны, и приводим условия, при которых одноточечные расширения кошулеподобных алгебр являются кошулеподобными алгебрами. Кроме того, мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА II. Пусть A – стандартная градуированная алгебра, M – градуированный A -модуль, порожденный в степени 1, и

$$E_M^A := \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}$$

– алгебра, представляющая собой одноточечное расширение. Предположим, что

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0,$$

$$\cdots \longrightarrow Q_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

– минимальные градуированные проективные резольвенты модулей A_0 и M соответственно. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) E_M^A является кошулеподобной алгеброй относительно Δ_{t_1, t_2}^d ;
- (2) A является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d , $\Omega^3(M)[-d]$ является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d и модуль Q_i порожден в степени t_i , $i = 1, 2$;
- (3) для всех $i \geq 0$, P_{i+1} и Q_i порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i+1)$ как градуированные A -модули.

В пятом разделе мы приводим характеристики кошулеподобных алгебр. Точнее, доказываем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА III. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \longrightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля A_0 . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) A является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d ;
- (2) $GR_A^{\delta_{t_1, t_2}^d}(A_0) = 0$;
- (3) A является кошулеподобным A^e -модулем относительно δ_{t_1, t_2}^d ;
- (4) выполнены следующие условия:
  - (a) $\ker d_i \subseteq JP_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^2 P_i$ для всех $i = 4k$;
  - (b) $\ker d_i \subseteq J^{t_1-1} P_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^{t_1} P_i$ для всех $i = 4k+1$;
  - (c) $\ker d_i \subseteq J^{t_2-t_1} P_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^{t_2-t_1+1} P_i$ для всех $i = 4k+2$;
  - (d) $\ker d_i \subseteq J^{d-t_2} P_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^{d-t_2+1} P_i$ для всех $i = 4k+3$.

ТЕОРЕМА IV. Пусть A – стандартная градуированная $\mathbb{k}$ -алгебра и

$$E(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$$

– ее алгебра Йонеды. Если A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d , то

- (1) $E(A)$ минимально порождена множествами $\text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$;
- (2) $\text{Ext}_A^i(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)_{\delta_{t_1, t_2}^d(i)}$, $i = 2, 3, 4$.

Если, кроме того,

$$\text{Ext}_A^2(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^3(A_0, A_0) = 0, \quad (\text{Ext}_A^3(A_0, A_0))^2 = 0$$

и выполнены условия (1) и (2), то A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй.

В последнем разделе мы рассматриваем связь между кошулевыми алгебрами и кошулеподобными алгебрами. Легко видеть, что все кошулевы алгебры кошулеподобны, но обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Последний раздел посвящен в основном этому обратному утверждению, а именно, построению кошулевых алгебр из данных кошулеподобных алгебр и доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА V. Пусть A – кошулеподобная алгебра и M – кошулеподобный модуль над A . Для каждого целого $k \geq 1$ положим

$$\mathbb{E}(A) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^{4ki}(A_0, A_0), \quad \mathbb{E}(M) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^{4ki}(M, A_0).$$

Тогда

- (1) $\mathbb{E}(A)$ является стандартной градуированной алгеброй и $\mathbb{E}(M)$ является 0-порожденным градуированным $\mathbb{E}(A)$ -модулем;
- (2) $\mathbb{E}(A)$ является кошулевой алгеброй и $\mathbb{E}(M)$ является кошулевым $\mathbb{E}(A)$ -модулем.

2. Определения, примеры и некоторые основные свойства. В этой статье $\mathbb{k}$ всюду обозначает фиксированное поле, а $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ – множества натуральных и целых чисел соответственно. Положительно градуированная $\mathbb{k}$ -алгебра $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ называется *стандартной*, если

- $A_0 = \mathbb{k} \times \cdots \times \mathbb{k}$, т.е. A_0 является произведением конечного числа экземпляров поля $\mathbb{k}$;
- $A_i \cdot A_j = A_{i+j}$ для всех $0 \leq i, j < \infty$;
- $\dim_{\mathbb{k}} A_i < \infty$ для всех $i \geq 0$.

Градуированный радикал Джекобсона стандартной градуированной алгебры A очевидным образом представляется как $\bigoplus_{i \geq 1} A_i$. Через $\text{Gr}(A)$ и $\text{gr}(A)$ мы обозначаем категории градуированных A -модулей и конечно порожденных градуированных A -модулей соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и $M \in \text{gr}(A)$. Мы говорим, что M – *кошулеподобный модуль*, если у M есть такая минимальная градуированная проективная резольвента

$$\cdots \rightarrow Q_n \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

что для каждого $n \geq 0$ модуль Q_n порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$, где $d > t_2 > t_1 > 1$ – фиксированные целые числа, а δ_{t_1, t_2}^d – отображение из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, определенное правилом

$$\delta_{t_1, t_2}^d(n) = \begin{cases} \frac{nd}{4}, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{(n-1)d}{4} + 1, & n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \frac{(n-2)d}{4} + t_1, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{(n-3)d}{4} + t_2, & n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Если тривиальный A -модуль A_0 кошулеподобен, то A называется *кошулеподобной алгеброй*. Мы говорим, что кошулеподобная алгебра *нетривиальна*, если резольвента δ_{t_1, t_2}^d удовлетворяет условиям $d > t_2 + 1 > t_1 + 2 > 4$ и $d > 2t_1$.

Через $\mathcal{KL}(A)$ мы обозначаем категорию кошулеподобных модулей.

Ниже приведены некоторые “тривиальные” примеры кошулеподобных алгебр и модулей.

ПРИМЕР 2.2. (1) Кошулевы алгебры (см. [4], [18] и [19]) являются частными случаями кошулеподобных алгебр; для них $d = 4$, $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$.

(2) Кусочно кошулевы алгебры (см. [12]) периода 4 со скачком степени l являются кошулеподобными алгебрами, для которых $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, а $d \geq 4$ – произвольное целое.

(3) δ -Резольвентно определенные алгебры (см. [10]) глобальной размерности 4 являются кошулеподобными алгебрами, для которых $d = \delta(4)$, $t_1 = \delta(2)$ и $t_2 = \delta(3)$; здесь δ – возрастающая функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

(4) Пусть A – δ -резольвентно определенная алгебра, причем резольвента δ удовлетворяет условию $\delta(i) = \delta(i-4) + \delta(4)$ для всех $i \geq 4$. Тогда A является кошулеподобной алгеброй для $d = \delta(4)$, $t_1 = \delta(2)$ и $t_2 = \delta(3)$.

(5) Кошулевы модули, кусочно кошулевы модули, а также некоторые специальные δ -кошулевы модули представляют собой частные случаи кошулеподобных модулей.

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим колчан Γ вида

$$\bullet^1 \begin{matrix} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xleftarrow{\alpha_1} \end{matrix} \bullet^2 \begin{matrix} \xrightarrow{\beta_2} \\ \xleftarrow{\alpha_2} \end{matrix} \bullet^3 \begin{matrix} \xrightarrow{\beta_3} \\ \xleftarrow{\alpha_3} \end{matrix} \bullet^4.$$

Пусть

$$A = \frac{\mathbb{k}\Gamma}{\langle \alpha_i \beta_i - \beta_{i+1} \alpha_{i+1}, \alpha_{i+1} \alpha_i, \beta_i \beta_{i+1} : i = 1, 2, 3 \rangle}.$$

Прямые вычисления показывают, что для тривиального A -модуля $\mathbb{k}^{\oplus 4}$ имеем

$$\begin{aligned} \cdots &\longrightarrow (A \oplus P_2 \oplus P_3)[7] \longrightarrow (A \oplus P_2 \oplus P_3)[6] \longrightarrow A[5] \longrightarrow (A \oplus P_2 \oplus P_3)[3] \\ &\longrightarrow (A \oplus P_2 \oplus P_3)[2] \longrightarrow (A \oplus P_2 \oplus P_3)[1] \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{k}^{\oplus 4} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где P_i обозначает простой A -модуль, связанный с вершиной i .

Значит, A является кошулеподобной алгеброй относительно $\delta_{2,3}^5$.

Имеются и нетривиальные примеры кошулеподобных алгебр. Отметим, что алгебра из следующего примера представляет собой регулярную по Артину–Шелтеру алгебру глобальной размерности 5. Прежде чем приводить этот пример, напомним теорему из [20].

ТЕОРЕМА 2.4 [20]. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ – градуированная алгебра Ли конечной размерности d . Тогда универсальная обертывающая алгебра $A = U(\mathfrak{g})$ является AS-регулярной связной градуированной алгеброй глобальной размерности d с гильбертовым рядом

$$H(t) = \frac{1}{(1-t)^{h_{\mathfrak{g}}(1)} \dots (1-t^n)^{h_{\mathfrak{g}}(n)}},$$

где $h_{\mathfrak{g}}(i) = \dim \mathfrak{g}_i$. Следовательно, характеристический многочлен имеет вид

$$p_A = \sum_n (-1)^n h_{\text{Tor}_n^A(\mathbb{k}_A, \mathbb{k})}(t) = (1-t)^{h_{\mathfrak{g}}(1)} \dots (1-t^n)^{h_{\mathfrak{g}}(n)},$$

и $\text{GKdim } A = d$.

ПРИМЕР 2.5. Пусть

$$A = \mathbb{k}\langle x, y \rangle / (x^3y - 3x^2yx + 3xyx^2 - yx^3, 2xyxy - x^2y^2 - 2yxxy + y^2x^2, xy^3 + 3y^2xy - y^3x - 3yxy^2),$$

где $\deg(x) = \deg(y) = 1$. Тогда A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй относительно $\delta_{4,6}^9$.

Действительно, положим

$$f_1 = [x, [x, [x, y]]], \quad f_2 = [y, [x, [x, y]]], \quad f_3 = [y, [y, [x, y]]];$$

здесь $[a, b] := ab - ba$. Очевидно, $A = \mathbb{k}\langle x, y \rangle / I$ и $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$. Заметим, что все f_i – лиевы многочлены; можно сказать, что A является обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(x, y) / (f_1, f_2, f_3)_L$, где $\text{Lie}(x, y)$ – свободная алгебра Ли, порожденная элементами x и y , а $(f_1, f_2, f_3)_L$ – лиев идеал, порожденный многочленами f_1, f_2 и f_3 . Можно показать, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_3$ – положительно градуированная алгебра Ли, причем $\dim \mathfrak{g}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{g}_2 = 1$ и $\dim \mathfrak{g}_3 = 2$. Точнее, $\mathfrak{g}_1$ имеет базис x, y , $\mathfrak{g}_2$ имеет базис z , и $\mathfrak{g}_3$ имеет базис u, v ; более того,

$$[x, y] = z, \quad [y, x] = -z, \quad [x, z] = u, \quad [z, x] = -u, \quad [y, z] = v, \quad [z, y] = -v$$

и все остальные скобки Ли равны 0. Из теоремы 2.4 вытекает, что A – AS-регулярная алгебра размерности 5 с гильбертовым рядом

$$H_A(t) = \frac{1}{(1-t)^2(1-t^2)(1-t^3)^2},$$

$$p_A = (1-t)^2(1-t^2)(1-t^3)^2 = 1 - 2t + 3t^4 - 3t^6 + 2t^9 - t^{10}.$$

Из свойства симметрии минимальной резольвенты следует, что минимальная резольвента тривиального A -модуля имеет вид

$$0 \longrightarrow A(-10) \longrightarrow A(-9)^{\oplus 2} \longrightarrow A(-6)^{\oplus 3} \longrightarrow A(-4)^{\oplus 3} \longrightarrow A(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow A \longrightarrow \mathbb{k} \longrightarrow 0,$$

откуда вытекает, что A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй относительно $\delta_{4,6}^9$.

В заключение этого раздела перечислим некоторые основные свойства кошулеподобных алгебр и кошулеподобных модулей; мы опускаем доказательства ввиду их простоты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и $M \in \text{gr}(A)$.

- (1) Следующие утверждения об A равносильны:
  - (a) A является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d ;
  - (b) $\text{Ext}_A^n(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^n(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(n)}$ для всех $n \geq 2$;
  - (c) $\text{Tor}_n^A(A_0, A_0) = \text{Tor}_n^A(A_0, A_0)_{\delta_{t_1, t_2}^d(n)}$ для всех $n \geq 2$.
- (2) Следующие утверждения об M равносильны:
  - (a) M является кошулеподобным модулем относительно δ_{t_1, t_2}^d ;
  - (b) $\text{Ext}_A^n(M, A_0) = \text{Ext}_A^n(M, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(n)}$ для всех $n \geq 2$;
  - (c) $\text{Tor}_n^A(M, A_0) = \text{Tor}_n^A(M, A_0)_{\delta_{t_1, t_2}^d(n)}$ для всех $n \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ – точная последовательность в $\text{gr}(A)$ и A – стандартная градуированная алгебра. Тогда

- (1) если $K, N \in \mathcal{KL}(A)$, то $M \in \mathcal{KL}(A)$;
- (2) если $K, M \in \mathcal{KL}(A)$, то $N \in \mathcal{KL}(A)$;
- (3) если $K, N \in \mathcal{KL}(A)$, то $K \in \mathcal{KL}(A)$ тогда и только тогда, когда для данной короткой точной последовательности справедлива лемма о минимальной подкове;
- (4) если $M \in \mathcal{KL}(A)$, то $\Omega^{4k}(M)[- \delta_{t_1, t_2}^d(4k)] \in \mathcal{KL}(A)$, $k \in \mathbb{N}$;
- (5) если $M \in \mathcal{KL}(A)$ и A – кошулеподобная алгебра относительно δ_{t_1, t_2}^d , то $\Omega^{4k-1}(JM)[- \delta_{t_1, t_2}^d(4k)] \in \mathcal{KL}(A)$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Условия равенства $\mathcal{KL}(A) = \mathcal{L}(A)$. Начнем со следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и M – конечно порожденный градуированный A -модуль. Скажем, что M – модуль с линейными копредставлениями, если найдется точная последовательность

$$P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где P_0 и P_1 – градуированные проективные модули и P_0 – градуированное проективное накрытие модуля M , причем каждый модуль P_i порождается в степени i , $i = 0, 1$.

Обозначим через $\mathcal{L}(A)$ категорию модулей с линейными копредставлениями.

Основная цель этого раздела – обсуждение условий, при которых выполнено равенство $\mathcal{KL}(A) = \mathcal{L}(A)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ – точная последовательность в $\text{gr}(A)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) если M и N порождаются в степени s , то K тоже порождается в степени s ;
- (2) $JK = K \cap JM$;

(3) имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(K) & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(N) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & L_0 & \longrightarrow & Q_0 \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

где P_0, L_0 и Q_0 – градуированные проективные накрытия;

(4) имеет место точная последовательность $0 \rightarrow JK \rightarrow JM \rightarrow JN \rightarrow 0$;

(5) морфизм $A/J \otimes_A K \rightarrow A/J \otimes_A M$ является мономорфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Достаточно показать, что $JK \supseteq K \cap JM$; обратное включение $JK \subseteq K \cap JM$ очевидно. Пусть $K = \bigoplus_{i \geq s} K_i$ и $K_{i+s} = A_i K_s$. Возьмем любой однородный элемент $x \in K \cap JM$ степени j . Ясно, что $j \geq s+1$. Таким образом, $x \in K_{s+1} = A_1 K_s \subseteq JK$.

Эквивалентности (2) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) очевидны.

(2) $\Rightarrow$ (1) Поскольку $JK = K \cap JM$, имеем следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & JK & \longrightarrow & JM & \longrightarrow & JN \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K/JK & \longrightarrow & M/JM & \longrightarrow & N/JN \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

где нижняя последовательность является последовательностью полупростых модулей, порожденных в степени s , поэтому модуль над K целиком лежит в степени s . Согласно лемме Накаямы о градуировке градуированное проективное накрытие модуля K порождено в степени s , откуда вытекает, что сам K порожден в степени s .

(2) $\Rightarrow$ (3) Имеет место очевидная точная последовательность

$$0 \longrightarrow K/JK \longrightarrow M/JM \longrightarrow N/JN \longrightarrow 0.$$

Заметим, что для любого конечно порожденного A -модуля X определено градуированное проективное накрытие $A \otimes_{A_0} X/JX \rightarrow X \rightarrow 0$. Полагая $P_0 := A \otimes_{A_0} K/JK$, $Q_0 := A \otimes_{A_0} M/JM$ и $L_0 := A \otimes_{A_0} N/JN$, получаем точную последовательность $0 \rightarrow$

$P_0 \rightarrow Q_0 \rightarrow L_0 \rightarrow 0$, поскольку модуль A_0 полупрост. Отсюда получается искомая диаграмма.

(3) $\Rightarrow$ (2) Предположим, что имеется указанная выше коммутативная диаграмма. Заметим, что проективное накрытие модуля единственно с точностью до изоморфизма. Можно считать, что $P_0 := A \otimes_{A_0} K/JK$, $Q_0 := A \otimes_{A_0} M/JM$ и $L_0 := A \otimes_{A_0} N/JN$. Из средней строки диаграммы получается точная последовательность

$$0 \longrightarrow A \otimes_{A_0} K/JK \longrightarrow A \otimes_{A_0} M/JM \longrightarrow A \otimes_{A_0} N/JN \longrightarrow 0.$$

Таким образом, возникает короткая точная последовательность A_0 -модулей

$$0 \longrightarrow K/JK \longrightarrow M/JM \longrightarrow N/JN \longrightarrow 0,$$

поскольку модуль A_0 полупрост, откуда вытекает равенство $JK = K \cap JM$.

ЛЕММА 3.3. Пусть A – кошулеподобная алгебра относительно δ_{t_1, t_2}^d . Если выполнено $J\Omega^i(M) = \Omega^i(M) \cap J\Omega^i(M/JM)$ для любых $M \in \mathcal{L}(A)$ и $i \geq 2$, то $\mathcal{L}(A) = \mathcal{KL}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что всякий модуль с линейными копредставлениями кошулеподобен. Пусть $M \in \mathcal{L}(A)$. Тогда имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где P_0 – градуированное проективное накрытие модуля M , P_0 порождается в степени 0 и $\Omega^1(M)$ порождается в степени 1. Для завершения доказательства достаточно показать, что M допускает минимальную градуированную проективную резольвенту

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

в которой P_n порождается в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$. Применим индукцию.

Рассматривая точную последовательность

$$0 \longrightarrow JM \longrightarrow M \longrightarrow M/JM \longrightarrow 0,$$

получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M/JM) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & P_0 & \xlongequal{\quad} & P_0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow JM & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/JM & \longrightarrow & 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

откуда возникает точная последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M/JM) \longrightarrow JM \longrightarrow 0,$$

в которой каждый член порожден в степени 1, потому что модуль M порожден в степени 0 и M/JM является кошулеподобным модулем (поскольку A – кошулеподобная алгебра). По лемме 3.2 имеется коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \longrightarrow & \Omega^2(M/JM) & \longrightarrow & \Omega^1(JM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & L_1 & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M/JM) & \longrightarrow & JM \longrightarrow 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

так как $J\Omega^1(M) = \Omega^1(M) \cap J\Omega^1(M/JM)$, где P_1 , L_1 и Q_1 – градуированные проективные накрытия модулей $\Omega^1(M)$, $\Omega^1(M/JM)$ и JM соответственно. Заметим, что из кошулеподобности алгебры A вытекает, что M/JM является кошулеподобным модулем, так что L_1 порождается в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(1)$. Следовательно, оба накрытия P_1 и Q_1 порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(1)$, поскольку по предположению выполнено равенство градуированных A -модулей $L_1 = P_1 \oplus Q_1$. Предположим, мы доказали, что $J\Omega^i(M) = \Omega^i(M) \cap J\Omega^i(M/JM)$ для всех $i \geq 2$; снова применяя лемму 3.2, получаем коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^{i+1}(M) & \longrightarrow & \Omega^{i+1}(M/JM) & \longrightarrow & \Omega^i(JM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_i & \longrightarrow & L_i & \longrightarrow & Q_i \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^i(M) & \longrightarrow & \Omega^i(M/JM) & \longrightarrow & \Omega^{i-1}(JM) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

для каждого $i \geq 2$, где P_i , L_i и Q_i – градуированные проективные накрытия модулей $\Omega^i(M)$, $\Omega^i(M/JM)$ и $\Omega^{i-1}(JM)$ соответственно. Аналогично, L_i порождается в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i)$ как градуированный A -модуль для каждого $i \geq 2$, потому что A является кошулеподобной алгеброй, а M/JM – кошулеподобным модулем; отсюда вытекает, что оба накрытия P_i и Q_i порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i)$ для каждого $i \geq 2$, поскольку выполнено равенство градуированных A -модулей $L_i = P_i \oplus Q_i$.

Теперь мы готовы доказать теорему I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Если $M \in \mathcal{L}(A)$, то M является кошулеподобным модулем по предположению. Из того, что A является кошулеподобной алгеброй, следует, что M/JM является кошулеподобным модулем. Значит, $\Omega^i(M)$ и $\Omega^i(M/JM)$

порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i)$ для всех $i \geq 0$. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3.3, получаем короткие точные последовательности

$$0 \longrightarrow \Omega^i(M) \longrightarrow \Omega^i(M/JM) \longrightarrow \Omega^{i-1}(JM) \longrightarrow 0$$

для всех $i \geq 1$. По лемме 3.2 имеем $J\Omega^i(M) = \Omega^i(M) \cap J\Omega^i(M/JM)$ для всех $i \geq 2$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 3.3, получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M/JM) \longrightarrow JM \longrightarrow 0,$$

каждый член которой порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(1)$. По лемме 3.2 имеем $J\Omega^1(M) = \Omega^1(M) \cap J\Omega^1(M/JM)$. Заметим, что $\Omega^i(X) = \Omega^1(\Omega^{i-1}(X))$, и лемма 3.2 дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{i+1}(M) & \longrightarrow & \Omega^{i+1}(M/JM) & \longrightarrow & \Omega^i(JM) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P_i & \longrightarrow & L_i & \longrightarrow & Q_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^i(M) & \longrightarrow & \Omega^i(M/JM) & \longrightarrow & \Omega^{i-1}(JM) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

для каждого $i \geq 1$. Объединяя эти коммутативные диаграммы, видим, что для точной последовательности

$$0 \longrightarrow \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M/JM) \longrightarrow JM \longrightarrow 0$$

выполняется лемма о минимальной подковке.

(3) $\Rightarrow$ (1) Доказательство последней импликации почти дословно повторяет доказательство леммы 3.3; мы опускаем подробности.

4. Некоторые конструкции кошулеподобных алгебр. В этом разделе мы покажем, как строить новые кошулеподобные алгебры из данной кошулеподобной алгебры A .

4.1. Противоположная алгебра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и A^{op} – противоположная ей градуированная алгебра. Тогда A является кошулеподобной алгеброй в том и только том случае, если этим свойством обладает A^{op} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(A^{\text{op}})^{\text{op}} = A$, нам достаточно провести доказательство лишь в одном направлении.

Предположим, что A является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d . Рассмотрим резольвенту

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0$$

тривиального A -модуля A_0 , в которой $P_i = A \cdot (P_i)_{\delta_{t_1, t_2}^d(i)}$. Пусть $V^* := \text{Hom}_{A_0}(V, A_0)$ и $(V^\#)_i = (V_{-i})^*$. Получаем инъективную резольвенту модуля A_0

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow (P_0)^\# \longrightarrow (P_1)^\# \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P_n)^\# \longrightarrow \cdots,$$

откуда вытекает, что $\text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(A_0, A_0) = \text{Ext}_{A^{\text{op}}}^i(A_0, A_0)_{\delta_{t_1, t_2}^d(i)}$ для всех $i \geq 0$. Согласно предложению 2.6 алгебра A^{op} кошулеподобна относительно δ_{t_1, t_2}^d , что и требовалось.

4.2. Одноточечное расширение алгебры. Пусть A – $\mathbb{k}$ -алгебра и M – A -модуль (не обязательно градуированный). *Одноточечное расширение алгебры A* с помощью модуля M определяется как алгебра верхнетреугольных матриц $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}$; мы обозначаем ее через E_M^A .

Легко видеть, что объект X в категории E_M^A -модулей можно интерпретировать как пару $(X(A) \oplus V, \alpha)$ или тройку $(X(A), V, \alpha)$, где $X(A)$ – A -модуль, V – $\mathbb{k}$ -пространство и $\alpha: M \otimes_{\mathbb{k}} V \rightarrow X(A)$ – A -отображение. Можно также смотреть на X как на левый E_M^A -модуль с действием алгебры

$$\rho: E_M^A \otimes X \rightarrow X,$$

определенным правилом

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & k \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \cdot x + \alpha(m \otimes v) \\ kv \end{pmatrix},$$

где $a \in A$, $m \in M$, $k \in \mathbb{k}$, $x \in X(A)$ и $v \in V$.

Выясним, как связаны $\text{gr}(A)$ и $\text{gr}(E_M^A)$.

Определим функтор

$$\mathbf{G}: \text{gr}(A) \rightarrow \text{gr}(E_M^A)$$

правилами

$$\mathbf{G}(X(A)) = (X(A), 0, 0),$$

$$\mathbf{G}(X(A) \xrightarrow{f} Y(A)) = ((X(A), 0, 0) \xrightarrow{(f, 0)} (Y(A), 0, 0)),$$

где $X(A)$ и $Y(A)$ – конечно порожденные A -модули. Из определения функтора $\mathbf{G}$ ясно, что он является строгим точным функтором, и если $P \in \text{gr}(A)$ – градуированный A -проективный модуль, то $\mathbf{G}(P)$ – градуированный E_M^A -проективный модуль.

ЛЕММА 4.2. *Во введенных выше обозначениях справедливы следующие утверждения:*

- (1) $e_1 = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{\mathbb{k}} \end{pmatrix}$ – полный набор ортогональных идемпотентов в E_M^A ;
- (2) $\text{gr}(A) = \{X \in \text{gr}(E_M^A) \mid e_2 \cdot X = 0\}$, т.е. $\text{gr}(A)$ можно рассматривать как полную подкатегорию в $\text{gr}(E_M^A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) тривиально.

Докажем (2). Для всякого $\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & k \end{pmatrix} \in E_M^A$ имеем $e_2 \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & k \end{pmatrix} e_1 = 0$. Иными словами, $e_2 E_M^A e_1 = 0$. Пусть $X = (X(A), V, \alpha) \in \text{gr}(E_M^A)$, причем $e_2 \cdot X = 0$. Из того, что

$$e_2 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{\mathbb{k}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad \text{для всех } v \in V,$$

вытекают равенства $V = 0$ и $\alpha = 0$. Легко видеть, что такой E_M^A -модуль X можно рассматривать как градуированный A -модуль, т.е. $X \in \text{gr}(A)$. Обратно, для всех $M \in \text{gr}(A)$ имеем $(M, 0, 0) \in \text{gr}(E_M^A)$. Теорема доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и $M \in \text{gr}(A)$. Тогда

- (1) все неизоморфные проективные модули в категории $\text{gr}(E_M^A)$ – это модули $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} M \\ \mathbb{k} \end{pmatrix}$;
- (2) все неизоморфные простые модули в категории $\text{gr}(E_M^A)$ – это модули $\begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{k} \end{pmatrix}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $e_1 = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{\mathbb{k}} \end{pmatrix}$ составляют полный ортогональный набор идемпотентов в E_M^A . Требуемые утверждения немедленно вытекают из того, что

$$E_M^A e_1 = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_M^A e_2 = \begin{pmatrix} M \\ \mathbb{k} \end{pmatrix}, \quad (E_M^A)_0 e_1 = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (E_M^A)_0 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{k} \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 4.4. Минимальную градуированную проективную резольвенту модуля $(E_M^A)_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}$ можно получить из минимальных градуированных проективных резольвент модулей $\begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{k} \end{pmatrix}$. При этом полученная резольвента единственна с точностью до изоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: \dots &\rightarrow \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0, \\ \mathcal{Q}: \dots &\rightarrow \begin{pmatrix} Q_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} Q_0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M \\ \mathbb{k} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{k} \end{pmatrix} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

– минимальные градуированные проективные резольвенты рассматриваемых простых E_M^A -модулей. Легко видеть, что последовательность

$$\mathcal{L}: \dots \rightarrow \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M \\ \mathbb{k} \end{pmatrix} \rightarrow (E_M^A)_0 \rightarrow 0$$

является минимальной градуированной проективной резольвентой модуля $(E_M^A)_0$. Единственность немедленно следует из того, что минимальная градуированная проективная резольвента любого модуля единственна с точностью до изоморфизма.

ЛЕММА 4.5. Для всякого $n \geq 1$ $L_n := \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ порождается в степени s как градуированный E_M^A -модуль тогда и только тогда, когда P_n и Q_{n-1} порождены в степени s как градуированные A -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Модуль $\begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ порожден в степени s тогда и только тогда, когда $\begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ порождены в степени s как градуированные E_M^A -модули, а это равносильно условиям

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix}_{s+1} &= \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}_1 \cdot \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} A_1 & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (P_n)_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot (P_n)_s \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}_{s+1} &= \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & \mathbb{k} \end{pmatrix}_1 \cdot \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} A_1 & M_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (Q_{n-1})_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot (Q_{n-1})_s \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем доказать теорему II.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширение E_M^A является кошулеподобной алгеброй, если и только если модуль $(E_M^A)_0$ обладает минимальной градуированной проективной резольвентой

$$\mathcal{L}: \dots \rightarrow \begin{pmatrix} P_n \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Q_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{pmatrix} P_0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M \\ \mathbb{k} \end{pmatrix} \rightarrow (E_M^A)_0 \rightarrow 0,$$

в которой $L_{n+1} := \begin{pmatrix} P_{n+1} \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Q_n \\ 0 \end{pmatrix}$ порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n+1)$ для всех $n \geq 0$; по лемме 4.5 это условие выполнено тогда и только тогда, когда P_{n+1} и Q_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n+1)$ как градуированные A -модули для всех $n \geq 0$. Значит, (1) $\Leftrightarrow$ (3). Эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3) очевидна.

5. Критерии кошулеподобности алгебр. В этом разделе мы приводим некоторые критерии кошулеподобности алгебр.

5.1. Характеризация минимальной градуированной проективной резольвентой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и

$$\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля A_0 . Тогда A является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

- (1) $\ker d_i \subseteq JP_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^2 P_i$ для всех $i = 4k$;
- (2) $\ker d_i \subseteq J^{t_1-1} P_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^{t_1} P_i$ для всех $i = 4k+1$;
- (3) $\ker d_i \subseteq J^{t_2-t_1} P_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^{t_2-t_1+1} P_i$ для всех $i = 4k+2$;
- (4) $\ker d_i \subseteq J^{d-t_2} P_i$ и $J \ker d_i = \ker d_i \cap J^{d-t_2+1} P_i$ для всех $i = 4k+3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Предположим, что A является кошулеподобной алгеброй. Тогда модуль A_0 имеет минимальную градуированную проективную резольвенту

$$\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \rightarrow 0,$$

в которой P_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$.

Для $i = 4k$ ядро $\ker d_i$ порождено в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i+1) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+1) = kd+1$, поскольку $P_{i+1} \rightarrow \ker d_i \rightarrow 0$ – градуированное проективное накрытие. Из того, что P_i порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k) = kd$, сразу вытекает (1).

Для $i = 4k+1$ ядро $\ker d_i$ порождено в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i+1) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+2) = kd+t_1$, поскольку $P_{i+1} \rightarrow \ker d_i \rightarrow 0$ – градуированное проективное накрытие. Из того, что P_i порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+1) = kd+1$, сразу вытекает (2).

Для $i = 4k+2$ ядро $\ker d_i$ порождено в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i+1) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+3) = kd+t_2$, поскольку $P_{i+1} \rightarrow \ker d_i \rightarrow 0$ – градуированное проективное накрытие. Из того, что P_i порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+2) = kd+t_1$, сразу вытекает (3).

Для $i = 4k+3$ ядро $\ker d_i$ порождено в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i+1) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+4) = kd+d$, поскольку $P_{i+1} \rightarrow \ker d_i \rightarrow 0$ – градуированное проективное накрытие. Из того, что P_i порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i) = \delta_{t_1, t_2}^d(4k+3) = kd+t_2$, сразу вытекает (4).

($\Leftarrow$) Заметим, что модуль A_0 порожден в степени нуль, будучи тривиальным A -модулем. Значит, в его минимальной проективной резольвенте

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \longrightarrow 0$$

член P_0 порожден в степени нуль. Из условий (1)–(4) вытекает, что P_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$. Таким образом, A является кошулеподобной алгеброй относительно $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$.

5.2. Характеризация обобщенной регулярностью по Кастельнуово–Мамфорду.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ – конечно порожденный градуированный модуль над A . Классический *показатель регулярности Кастельнуово–Мамфорда* модуля M определяется как

$$\inf\{j - i : \text{Tor}_i^A(M, \mathbb{k})_j = 0 \text{ для всех } i \geq 0\}$$

и обозначается через $R_A(M)$. Мы называем число

$$\inf\{|j - f(i)| : \text{Tor}_i^A(M, \mathbb{k})_j = 0 \text{ для всех } i \geq 0\}$$

обобщенным показателем регулярности Кастельнуово–Мамфорда модуля M и обозначаем его через $\text{GR}_A^f(M)$; здесь $|\cdot|$ обозначает модуль числа и $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – отображение множества натуральных чисел в себя.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть A – стандартная градуированная алгебра. Алгебра A кошулеподобна относительно δ_{t_1, t_2}^d , если и только если $\text{GR}_A^{\delta_{t_1, t_2}^d}(A_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Rightarrow$) Предположим, что A является кошулеподобной алгеброй. Тогда A_0 обладает минимальной градуированной проективной резольвентой

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \longrightarrow 0,$$

в которой P_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$. Значит, для любого $i \geq 0$ имеем $\text{Tor}_i^A(A_0, \mathbb{k}) = \text{Tor}_i^A(A_0, \mathbb{k})_{\delta_{t_1, t_2}^d(i)}$, откуда вытекает, что $\text{GR}_A^{\delta_{t_1, t_2}^d}(A_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Предположим, что $\text{GR}_A^{\delta_{t_1, t_2}^d}(A_0) = 0$, т.е.

$$\inf\{|\delta_{t_1, t_2}^d(i) - j| : \text{Tor}_i^A(A_0, \mathbb{k})_j = 0\} = 0.$$

Тогда для каждого $i \geq 0$ i -й член P_i градуированной проективной резольвенты модуля A_0 порождается однородными элементами степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i)$. Значит, A является кошулеподобной алгеброй.

5.3. Характеризация алгебр Йонеды. Начнем со следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть A – кошулеподобная алгебра относительно δ_{t_1, t_2}^d и $M \in \text{gr}_0(A)$. Тогда M является кошулеподобным модулем относительно δ_{t_1, t_2}^d , если и только если Ext -модуль $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(M, A_0)$ порожден множеством $\text{Ext}_A^0(M, A_0)$ как градуированный $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P}_*$ и $\mathcal{Q}_*$ – минимальные градуированные проективные резольвенты модулей A_0 и M соответственно. По предположению P_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$. Согласно предложению 3.5 из [7] Ext-модуль $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(M, A_0)$ порожден множеством $\text{Ext}_A^0(M, A_0)$ как градуированный $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$ -модуль, если и только если Q_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$, а это условие равносильно кошулеподобности модуля M относительно δ_{t_1, t_2}^d .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Пусть A – стандартная градуированная алгебра с чистой резольвентой (т.е. δ -резольвентно определенная алгебра [10]) и M – кошулеподобный модуль относительно δ_{t_1, t_2}^d . Тогда Ext-модуль $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(M, A_0)$ порожден множеством $\text{Ext}_A^0(M, A_0)$ как градуированный $\bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$ -модуль, если и только если A является кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{P}_*$ и $\mathcal{Q}_*$ – минимальные градуированные проективные резольвенты модулей A_0 и M соответственно. По предположению Q_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$.

($\Rightarrow$) Для каждого $n \geq 1$ по предположению имеем

$$\text{Ext}_A^n(M, A_0) = \text{Ext}_A^n(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^0(M, A_0).$$

Поскольку A является положительно градуированной алгеброй с чистой резольвентой, для некоторого натурального s выполнено $\text{Ext}_A^n(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^n(A_0, A_0)_{-s}$. Заметим, что $\text{Ext}_A^n(M, A_0) = \text{Ext}_A^n(M, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(n)}$, поскольку $M \in \mathcal{DK}(A)$ относительно δ_{t_1, t_2}^d . Таким образом, $\text{Ext}_A^n(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^n(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(n)}$ для всех $n \geq 0$, откуда вытекает кошулеподобность алгебры A относительно δ_{t_1, t_2}^d .

($\Leftarrow$) Обратная импликация является непосредственным следствием предложения 3.5 из [7].

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 5.6. Для всех $n \geq 4$ выполнено равенство $\delta_{t_1, t_2}^d(n) = \delta_{t_1, t_2}^d(4) + \delta_{t_1, t_2}^d(n-4)$.

ЛЕММА 5.7 [7]. Пусть A – стандартная градуированная $\mathbb{k}$ -алгебра. Предположим, что $\mathcal{P}$ – минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля A_0 и P_n конечно порождены порождающими в степени $f(n)$, где $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – отображение множества натуральных чисел в себя. Предположим также, что $f(i+j) = f(i) + f(j)$. Тогда отображение Йонеды

$$\text{Ext}_A^i(A_0, A_0) \otimes_{\mathbb{k}} \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) \longrightarrow \text{Ext}_A^{i+j}(A_0, A_0)$$

сюръективно. Более того,

$$\text{Ext}_A^{i+j}(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^i(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^i(A_0, A_0).$$

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть A – стандартная градуированная $\mathbb{k}$ -алгебра и

$$E(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$$

– ее Ext-алгебра Йонеды. Если A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй относительно δ_{t_1, t_2}^d , то

- (1) $E(A)$ минимально порождается множествами $\text{Ext}_A^i(A_0, A_0)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$;
 (2) $\text{Ext}_A^i(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^i(A_0, A_0)_{\delta_{t_1, t_2}^d(i)}$ для $i = 2, 3, 4$.

Обратно, если

$$\text{Ext}_A^2(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^3(A_0, A_0) = 0, \quad (\text{Ext}_A^3(A_0, A_0))^2 = 0$$

и выполнены условия (1) и (2), то A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что A является нетривиальной кошулеподобной алгеброй; тогда A_0 обладает минимальной градуированной проективной резольвентой

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \longrightarrow 0,$$

в которой P_n порождены в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$ для всех $n \geq 0$. Отсюда вытекает (2). По лемме 5.6 имеем $\delta_{t_1, t_2}^d(n) = \delta_{t_1, t_2}^d(4) + \delta_{t_1, t_2}^d(n-4)$ для всех $n \geq 4$. По лемме 5.7

$$\text{Ext}_A^n(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^4(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^{n-4}(A_0, A_0) \quad \text{для всех } n > 4;$$

значит, $E(A)$ порождается в степенях 0, 1, 2, 3 и 4.

Осталось проверить только свойство минимальной порожденности.

Во-первых, заметим, что

$$(\text{Ext}_A^1(A_0, A_0))^2 = (\text{Ext}_A^1(A_0, A_0)_{-1})^2 \subseteq \text{Ext}_A^2(A_0, A_0)_{-2}.$$

Но $\text{Ext}_A^2(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^2(A_0, A_0)_{-t_1}$ и $t_1 > 2$, поскольку A – нетривиальная кошулеподобная алгебра. Следовательно, $(\text{Ext}_A^1(A_0, A_0))^2 = 0$.

Во-вторых, $\text{Ext}_A^3(A_0, A_0)$ не может порождаться $\text{Ext}_A^1(A_0, A_0)$ и $\text{Ext}_A^2(A_0, A_0)$, потому что $\text{Ext}_A^3(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^3(A_0, A_0)_{-t_2}$,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^1(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^2(A_0, A_0) &= \text{Ext}_A^1(A_0, A_0)_{-1} \cdot \text{Ext}_A^2(A_0, A_0)_{-t_1} \\ &\subseteq \text{Ext}_A^3(A_0, A_0)_{-t_1-1}, \end{aligned}$$

но $t_2 > t_1 + 1$.

В-третьих, $\text{Ext}_A^4(A_0, A_0)$ не может порождаться $\text{Ext}_A^1(A_0, A_0)$, $\text{Ext}_A^2(A_0, A_0)$ и $\text{Ext}_A^3(A_0, A_0)$, потому что $\text{Ext}_A^4(A_0, A_0) = \text{Ext}_A^4(A_0, A_0)_{-d}$ и

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^1(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^3(A_0, A_0) &= \text{Ext}_A^1(A_0, A_0)_{-1} \cdot \text{Ext}_A^3(A_0, A_0)_{-t_2} \\ &\subseteq \text{Ext}_A^4(A_0, A_0)_{-t_2-1}, \end{aligned}$$

но $d > t_2 + 1$, и

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^2(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^2(A_0, A_0) &= \text{Ext}_A^2(A_0, A_0)_{-t_1} \cdot \text{Ext}_A^2(A_0, A_0)_{-t_1} \\ &\subseteq \text{Ext}_A^4(A_0, A_0)_{-2t_1}, \end{aligned}$$

но $d > 2t_1$.

Обратно, пусть

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} A_0 \longrightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля A_0 . Достаточно показать, что для любого $n \geq 0$ модуль P_n порождается в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(n)$, где $d > t_2 + 1 > t_1 + 2 > 4$ и $d > 2t_1$. Из того, что A является стандартной градуированной алгеброй, вытекает, что P_0 порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(0)$, а P_1 порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(1)$. Согласно условию (2) модуль P_i порожден в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(i)$ для $i = 2, 3, 4$.

Пусть теперь $i > 4$; мы можем записать это число как $i = 4k + j$, где $0 \leq j < 4$. Прежде всего, утверждаем, что

$$\sum_{s+t=4k+j, s, t \neq j, 4k} \text{Ext}_A^s(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^t(A_0, A_0) = 0.$$

Действительно, это утверждение легко получить из отношения

$$\text{Ext}_A^i(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

с использованием минимальной порожденности и равенств

$$\text{Ext}_A^2(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^3(A_0, A_0) = 0, \quad (\text{Ext}_A^3(A_0, A_0))^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^{4k+j}(A_0, A_0) &= \sum_{s+t=4k+j} \text{Ext}_A^s(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^t(A_0, A_0) \\ &= \sum_{s+t=4k+j, s, t \neq j, 4k} \text{Ext}_A^s(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^t(A_0, A_0) \\ &\quad + \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^{4k}(A_0, A_0) + \text{Ext}_A^{4k}(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) \\ &= \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) \cdot (\text{Ext}_A^4(A_0, A_0))^k + (\text{Ext}_A^4(A_0, A_0))^k \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0) \\ &= \text{Ext}_A^j(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(j)} \cdot (\text{Ext}_A^4(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(4)})^k \\ &\quad + (\text{Ext}_A^4(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(4)})^k \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(j)} \\ &= \text{Ext}_A^j(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(j)} \cdot \text{Ext}_A^{4k}(A_0, A_0)_{-k\delta_{t_1, t_2}^d(4)} \\ &\quad + \text{Ext}_A^{4k}(A_0, A_0)_{-k\delta_{t_1, t_2}^d(4)} \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(j)} \\ &= \text{Ext}_A^j(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(j)} \cdot \text{Ext}_A^{4k}(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(4k)} \\ &\quad + \text{Ext}_A^{4k}(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(4k)} \cdot \text{Ext}_A^j(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(j)} \\ &= \text{Ext}_A^{4k+j}(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(4k) - \delta_{t_1, t_2}^d(j)} = \text{Ext}_A^{4k+j}(A_0, A_0)_{-\delta_{t_1, t_2}^d(4k+j)}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось проверить нетривиальность алгебры A , т.е. выполнение неравенств $d > t_2 + 1 > t_1 + 2 > 4$ и $d > 2t_1$, которые немедленно вытекают из отношений

$$(\text{Ext}_A^1(A_0, A_0))^2 = \text{Ext}_A^1(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^2(A_0, A_0) = (\text{Ext}_A^2(A_0, A_0))^2 = 0$$

в силу минимальной порожденности.

Чтобы пояснить теорему 5.8, вернемся к примеру 2.5.

ПРИМЕР 5.9. Пусть A – алгебра из примера 2.5. Тогда (см. пример 2.5) тривиальный A -модуль $A_0 = \mathbb{k}$ допускает минимальную градуированную свободную резольвенту

$$0 \longrightarrow A(-10) \xrightarrow{d_5} A(-9)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_4} A(-6)^{\oplus 3} \xrightarrow{d_3} A(-4)^{\oplus 3} \xrightarrow{d_2} A(-1)^{\oplus 2} \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{k} \longrightarrow 0.$$

Чтобы вычислить произведение Йонеды, мы должны выписать дифференциалы этой минимальной резольвенты. Это делается с использованием резольвенты Эйленберга–Картана путем применения процедуры исключения. После очень громоздких вычислений получаем

$$\begin{aligned} d_1 &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, & d_2 &= \begin{pmatrix} -u - xz - x^2y & x^3 \\ -v - xy^2 & -xz + xyx \\ -y^3 & -v - yz + y^2x \end{pmatrix}, \\ d_3 &= \begin{pmatrix} -z - xy & x^2 & 0 \\ -y^2 & -3z & x^2 \\ 0 & -y^2 & yx - z \end{pmatrix}, \\ d_4 &= \begin{pmatrix} y^3 & -v - y^2x & u + yx^2 - zx \\ v - zy - xy^2 & zx + xyx & -x^3 \end{pmatrix}, & d_5 &= (x, y). \end{aligned}$$

Из определения произведения Йонеды и неравенств $\text{Ext}_A^1(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \cdot \text{Ext}_A^4(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \neq 0$, $\text{Ext}_A^2(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \cdot \text{Ext}_A^3(\mathbb{k}, \mathbb{k}) \neq 0$ и $\dim \text{Ext}_A^5(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = 1$ вытекает минимальная порожденность алгебры Йонеды $E(A)$ алгебры A в степенях 0, 1, 2, 3 и 4.

ЛЕММА 5.10 [21]. Пусть A – стандартная градуированная алгебра, $A^e := A \otimes_{\mathbb{k}} A^{\text{op}}$ – ее обертывающая алгебра, $\mathbf{r}$ – градуированный радикал Джекобсона алгебры A^e и $f: P \rightarrow Q$ – гомоморфизм конечно порожденных A^e -проективных модулей. Тогда $\text{Im } f \subseteq \mathbf{r}Q$, если и только если $\text{Im}(f \otimes_A 1_S) \subseteq J(Q \otimes_A S)$ для любого простого A -модуля S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.11. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и A^e – ее обертывающая алгебра. Тогда A кошулеподобна относительно δ_{t_1, t_2}^d , если и только если A является кошулеподобным модулем относительно δ_{t_1, t_2}^d над A^e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathcal{P}_* : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная A^e -резольвента модуля A в $\text{gr}(A^e)$. По лемме 5.10 резольвента $\mathcal{P}_*$ минимальна тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_* \otimes_A A_0$:

$$\cdots \longrightarrow P_n \otimes_A A_0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \otimes_A A_0 \longrightarrow P_0 \otimes_A A_0 \longrightarrow A \otimes_A A_0 \cong A_0 \longrightarrow 0,$$

есть минимальная градуированная проективная резольвента модуля A_0 в $\text{gr}(A)$.

Пусть $s \in \mathbb{Z}$ и $i \geq 0$. Модуль P_i порожден в степени s как градуированный A^e -модуль, если и только если $P_i \otimes_A A_0$ порожден в степени s как градуированный левый A -модуль, что и завершает доказательство.

Тем самым мы доказали теоремы III и IV. Более того, мы получили следующий более общий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.12. Пусть A – стандартная градуированная алгебра и A^e – ее обертывающая алгебра. Тогда алгебра A δ -резольвентно определена (см. [10]), если и только если A является δ -кошулевым модулем над A^e .

6. Кошулевы алгебры, возникающие из кошулеподобных алгебр. В этом разделе мы будем строить кошулевы объекты из данных кошулеподобных объектов.

Везде в этом разделе A обозначает кошулеподобную алгебру относительно δ_{t_1, t_2}^d , а $E(A)$ – ее алгебру Йонеды. Через M мы обозначаем кошулеподобный модуль относительно δ_{t_1, t_2}^d .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть A – кошулеподобная алгебра и M – кошулеподобный модуль над A . Тогда

$$\mathcal{E}(M) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(M, A_0) = \langle \text{Ext}_A^0(M, A_0) \rangle$$

как градуированный $E(A)$ -модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываемое утверждение представляет собой непосредственное следствие предложения 3.5 из [7].

Положим

$$\mathbb{E}(A) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^{4ki}(A_0, A_0), \quad \mathbb{E}(M) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^{4ki}(M, A_0), \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

ЛЕММА 6.2. Если $\mathbb{E}(A)$ и $\mathbb{E}(M)$ определены как указано выше, то

- (1) $\mathbb{E}(A)$ является градуированной подалгеброй алгебры $E(A)$, порожденной множествами $(\mathbb{E}(A))_0$ и $(\mathbb{E}(A))_1$;
- (2) $\mathbb{E}(M)$ можно рассматривать как градуированный $\mathbb{E}(A)$ -модуль, порожденный множеством $(\mathbb{E}(M))_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) То, что $\mathbb{E}(A)$ является градуированной подалгеброй алгебры $E(A)$, получается непосредственно из отношений

$$(\mathbb{E}(A))_i \cdot (\mathbb{E}(A))_j = \text{Ext}_A^{4ki}(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^{4kj}(A_0, A_0) \subseteq \text{Ext}_A^{4k(i+j)}(A_0, A_0) = (\mathbb{E}(A))_{i+j}.$$

Пусть $i > 1$ – целое число. По лемме 5.6 имеем

$$\delta_{t_1, t_2}^d(4ki) = \delta_{t_1, t_2}^d(4ki - 4k) + \delta_{t_1, t_2}^d(4k).$$

Из леммы 5.7 вытекает, что $(\mathbb{E}(A))_i = (\mathbb{E}(A))_1 \cdot (\mathbb{E}(A))_{i-1}$, а значит, $\mathbb{E}(A)$ порождается множествами $(\mathbb{E}(A))_0$ и $(\mathbb{E}(A))_1$.

(2) Градуировка $\mathbb{E}(A)$ -модуля $\mathbb{E}(M)$ индуцируется вложениями

$$(\mathbb{E}(A))_i \cdot (\mathbb{E}(M))_j = \text{Ext}_A^{4ki}(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^{4kj}(M, A_0) \subseteq \text{Ext}_A^{4k(i+j)}(M, A_0) = (\mathbb{E}(M))_{i+j},$$

где $i, j \geq 0$.

Равенство $\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}(A) \cdot \mathbb{E}(M)_0$ получается из

$$(\mathbb{E}(M))_i = \text{Ext}_A^{4ki}(M, A_0) \stackrel{(a)}{=} \text{Ext}_A^{4ki}(A_0, A_0) \cdot \text{Ext}_A^0(M, A_0) = (\mathbb{E}(A))_i \cdot (\mathbb{E}(M))_0,$$

где (a) вытекает из предложения 6.1 и неравенства $i \geq 1$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть A – кошулеподобная алгебра и M – кошулеподобный модуль над A . В тех же обозначениях, что и выше, $\mathbb{E}(M)$ является кошулевым модулем. В частности, $\mathbb{E}(A)$ является кошулевой алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\mathbb{E}(M)$ является кошулевым модулем, поскольку $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(A_0)$.

Рассмотрим точную последовательность $0 \rightarrow JM \rightarrow M \rightarrow M/JM \rightarrow 0$. Для всех $k, n \geq 0$ имеются точные последовательности

$$0 \longrightarrow \Omega^{4kn}(M) \longrightarrow \Omega^{4kn}(M/JM) \longrightarrow \Omega^{4kn-1}(JM) \longrightarrow 0,$$

из которых получаются точные последовательности

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(\Omega^{4kn-1}(JM), A_0) \rightarrow \text{Hom}_A(\Omega^{4kn}(M/JM), A_0) \rightarrow \text{Hom}_A(\Omega^{4kn}(M), A_0) \rightarrow 0,$$

поскольку A_0 полупрост как A -модуль. Следовательно, для всех $k, n \geq 0$ имеем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^{4kn-1}(JM, A_0) \longrightarrow \text{Ext}_A^{4kn}(M/JM, A_0) \longrightarrow \text{Ext}_A^{4kn}(M, A_0) \longrightarrow 0,$$

носители всех членов которых лежат в сдвинутых степенях $\delta_{t_1, t_2}^d(4kn) = knd$. Ясно, что имеются точные последовательности

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A^{4k(n-1)}(\Omega^{4k-1}(JM), A_0) \longrightarrow \text{Ext}_A^{4kn}(M/JM, A_0) \longrightarrow \text{Ext}_A^{4kn}(M, A_0) \longrightarrow 0,$$

потому что $\text{Ext}_A^{4kn-1}(JM, A_0) = \text{Ext}_A^{4k(n-1)}(\Omega^{4k-1}(JM), A_0)$.

Применяя точный функтор $\bigoplus_{n \geq 1}$ к этим точным последовательностям, получим точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{E}(\Omega^{4k-1}(JM))[1] \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 1} \text{Ext}_A^{4kn}(M/JM, A_0) \longrightarrow \bigoplus_{n \geq 1} \text{Ext}_A^{4kn}(M, A_0) \longrightarrow 0.$$

Мы утверждаем, что $\mathbb{E}(M/JM)$ является градуированным проективным накрытием $\mathbb{E}(M)$ и порождается в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(0) = 0$. Действительно, $\mathbb{E}(M/JM)$ является $\mathbb{E}(A)$ -проективным модулем, так как модуль M/JM полупрост. Кроме того, модуль M/JM кошулеподобен, поскольку алгебра A кошулеподобна. По лемме 6.2 $\mathbb{E}(M/JM)$ порожден в степени 0 как градуированный $\mathbb{E}(A)$ -модуль, и из выписанных выше точных последовательностей вытекает, что он является градуированным проективным накрытием модуля $\mathbb{E}(M)$.

Следовательно, первый модуль сизигий имеет вид

$$\bigoplus_{n > 0} \text{Ext}_A^{4k(n-1)}(\Omega^{4k-1}(JM), A_0)$$

и $\Omega^{4k-1}(JM)$ порождается в степени $\delta_{t_1, t_2}^d(4k) = kd$; по предложению 2.7 $\Omega^{4k-1}(JM)$ является кошулеподобным модулем. Доказательство теоремы завершается по индукции.

Мы завершаем этот раздел вопросом. Если A – нетривиальная кошулеподобная алгебра относительно δ_{t_1, t_2}^d , то ее алгебру Йонеды $E(A)$ можно переградуировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{ext}_A^0(A_0, A_0) &= \operatorname{Ext}_A^0(A_0, A_0), \\ \operatorname{ext}_A^i(A_0, A_0) &= \left(\operatorname{Ext}_A^1(A_0, A_0) \oplus \operatorname{Ext}_A^2(A_0, A_0) \oplus \operatorname{Ext}_A^3(A_0, A_0) \oplus \operatorname{Ext}_A^4(A_0, A_0) \right)^i \end{aligned}$$

для всех $i \geq 1$.

Положим

$$e(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{ext}_A^i(A_0, A_0).$$

Легко видеть, что $e(A)$ является градуированной алгеброй, порожденной в степенях 0 и 1. Более того, $e(A)$ и $E(A)$ изоморфны как $\mathbb{k}$ -пространства.

Вопрос заключается в следующем: является ли градуированная $\mathbb{k}$ -алгебра $e(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{ext}_A^i(A_0, A_0)$ кошулевой?

Автор благодарен рецензенту за многие ценные предложения, которые значительно улучшили статью. Автор благодарит также д-ра Гуисонга Чжоу и д-ра Дзюнру Си за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. M. Aquino, E. L. Green, “On modules with linear presentations over Koszul algebras”, *Comm. Algebra*, **33**:1 (2005), 19–36.
- [2] E. L. Green, R. Martínez-Villa, I. Reiten, Ø. Solberg, D. Zacharia, “On modules with linear presentations”, *J. Algebra*, **205**:2 (1998), 578–604.
- [3] E. L. Green, E. N. Marcos, P. Zhang, “Koszul modules and modules with linear presentations”, *Comm. Algebra*, **31**:6 (2003), 2745–2770.
- [4] S. Priddy, “Koszul resolutions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **152** (1970), 39–60.
- [5] M. Artin, W. F. Schelter, “Graded algebras of global dimension 3”, *Adv. Math.*, **66**:2 (1987), 171–216.
- [6] R. Berger, “Koszulity for nonquadratic algebras”, *J. Algebra*, **239**:2 (2001), 705–734.
- [7] E. L. Green, E. N. Marcos, R. Martínez-Villa, P. Zhang, “ D -Koszul algebras”, *J. Pure Appl. Algebra*, **193**:1–3 (2004), 141–162.
- [8] J.-W. He, D.-M. Lu, “Higher Koszul algebras and A -infinity algebras”, *J. Algebra*, **293**:2 (2005), 335–362.
- [9] S. Brenner, M. C. R. Butler, A. D. King, “Periodic algebras which are almost Koszul”, *Algebr. Represent. Theory*, **5**:4 (2002), 331–367.
- [10] E. L. Green, E. N. Marcos, “ δ -Koszul algebras”, *Comm. Algebra*, **33**:6 (2005), 1753–1764.
- [11] E. L. Green, N. Snashall, “Finite generation of Ext for a generalization of D -Koszul algebras”, *J. Algebra*, **295**:2 (2006), 458–472.
- [12] J.-F. Lü, J.-W. He, D.-M. Lu, “Piecewise-Koszul algebras”, *Sci. China Ser. A*, **50**:12 (2007), 1795–1804.
- [13] T. Cassidy, B. Shelton, “Generalizing the notion of a Koszul algebra”, *Math. Z.*, **260**:1 (2008), 93–114.
- [14] D.-M. Lu, J.-R. Si, “Koszulity of algebras with non-pure resolutions”, *Comm. Algebra*, **38**:1 (2010), 68–85.
- [15] Лю Сиа-Фень, “Алгебры с периодическими сдвигами степеней Ext”, *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 705–724.
- [16] J.-F. Lü, Z.-B. Zhao, “ (p, λ) -Koszul algebras and modules”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **41**:3 (2010), 443–473.

- [17] Пей-Сен Чен, Сиа-Фень Лю, “Слабо кошулеподобные модули”, *Матем. заметки*, **91**:1 (2012), 93–119.
- [18] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, “Koszul duality patterns in representation theory”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:2 (1996), 473–527.
- [19] A. Polishchuk, L. Positselski, *Quadratic Algebras*, Univ. Lecture Ser., **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [20] G. Fløystad, J. E. Vatne, *Artin–Schelter Regular Algebras of Dimension Five*, 2010, [arXiv: 0911.5129v3](#).
- [21] D. Zacharia, *Ext and Koszul Algebras*, Preprint, 2000.
- [22] E. L. Green, R. Martínez-Villa, “Koszul and Yoneda algebras”, *Representation Theory of Algebras* (Cocoyoc, 1994), CMS Conf. Proc., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 247–297.
- [23] C. A. Weibel, “An Introduction to Homological Algebra”, Cambridge Stud. Adv. Math., **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

Лю Сиа-Фень

Zhejiang Normal University, Китай

E-mail: jiafenglv@gmail.com,

jiafenglv@zjnu.edu.cn

Поступило

12.10.2009

Исправленный вариант

20.07.2011