Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Власов, В. Ж. Сакбаев, О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 939–942

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1017>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 14:35:29

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. В. Власов, В. Ж. Сакбаев

Несмотря на значительное число исследований, посвященных изучению разрешимости и асимптотического поведения решений функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) как в конечномерных (см. [1]–[4]), так и в банаховых, а также гильбертовых пространствах (см. [6]–[17]), работ, в которых изучается разрешимость ФДУ в пространствах Соболева, сравнительно немного. В особенности это касается начальных задач для уравнений, содержащих отклонения аргумента при старшей производной.

В предлагаемой заметке приведен результат о корректной разрешимости в шкале весовых пространств Соболева на полуоси начальных задач для одного класса дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, коэффициентами которых являются неограниченные операторы в гильбертовом пространстве. Кроме того, указан и аналогичный результат для уравнений в конечномерном пространстве.

Результаты настоящей работы являются естественным развитием результатов статей [6]–[12] для пространства Соболева $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, A – положительный самосопряженный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$, имеющий ограниченный обратный, I – единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}$. Превратим область определения $\text{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β ($\beta > 0$) в гильбертово пространство $\mathcal{H}_\beta$, введя на $\text{Dom}(A^\beta)$ норму $\| \cdot \|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$. Через α_0 ($\alpha_0 > 0$) обозначим нижнюю грань оператора A .

Обозначим через $L_{2,\gamma}((a, b), \mathcal{H})$ ($-\infty < a < b \leq +\infty$) пространство функций со значениями в $\mathcal{H}$, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(a,b)} \equiv \left(\int_a^b \exp(-2\gamma t) \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}, \quad \gamma > -\alpha_0,$$

через $W_{2,\gamma}^p((a, b), A^p)$ – пространство функций со значениями в $\mathcal{H}$ таких, что $A^{jp} u^{(1-j)p}(t) \in L_{2,\gamma}((a, b), \mathcal{H})$, $j = 0, 1$; $p = 1, 2, \dots$, с нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^p((a,b), A^p)} \equiv (\|u^{(p)}\|_{L_{2,\gamma}(a,b)}^2 + \|A^p u\|_{L_{2,\gamma}(a,b)}^2)^{1/2}, \quad \gamma > -\alpha_0.$$

Здесь и в дальнейшем полагаем

$$v^{(j)}(t) \equiv \frac{d^j}{dt^j} v(t), \quad j = 1, 2, \dots, \quad W_{2,0}^p \equiv W_2^p, \quad L_{2,0} \equiv L_2.$$

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01079, и программы “Университеты России”, грант № 992238.

Подробнее о пространстве $W_2^p((a, b), A^p)$ см. [5, гл. I].

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим начальную задачу:

$$\mathcal{A}u \equiv u^{(1)}(t) + Au(t) + \sum_{j=1}^n (B_j Au(t - h_j) + D_j u^{(1)}(t - h_j)) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(t) = \varphi_0(t), \quad t \in (-h, 0]. \quad (2)$$

Здесь B_j, D_j – ограниченные операторы, действующие в пространстве $\mathcal{H}$; числа h_j таковы, что $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_n = h$, начальная функция $\varphi_0(t) \in W_2^l((-h, 0), A^l)$ при некотором $l = 2, 3, \dots$.

Предположим, что функция $f(t)$ принадлежит пространству $W_{2, \gamma_0}^{l-1}(\mathbb{R}_+, A^{l-1})$ при некотором $\gamma_0 > -\alpha_0$.

УСЛОВИЕ (I). Для операторов B_j, D_j справедливы представления:

$$B_j x = A^{-(l-1)} B_{1,j} A^{(l-1)} x, \quad D_j x = A^{-(l-1)} D_{1,j} A^{(l-1)} x, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $x \in \text{Dom}(A^{l-1})$, $B_{1,j}, D_{1,j}$ – ограниченные операторы в $\mathcal{H}$.

Введем обозначения

$$\|B_j\| = b_j, \quad \|B_{1,j}\| = b_j^1, \quad \|D_j\| = d_j, \quad \|D_{1,j}\| = d_j^1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(t)$ назовем *решением задачи* (1), (2), если она принадлежит пространству $W_{2, \gamma}^l((-h, +\infty), A^l)$ при некотором $\gamma \geq \gamma_0$ и тождественно удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Поскольку согласно теореме о следах [5, гл. I] решение задачи (1), (2) и его производные $u^{(k)}(t)$ порядков $k = 1, 2, \dots, l-1$ имеют следы при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow -h+0$ из пространств $\mathcal{H}_{l-k-1/2}$ соответственно и являются непрерывными функциями со значениями в $\mathcal{H}_{l-k-1/2}$, то для разрешимости задачи (1), (2) необходимо выполнение следующих *условий согласования*:

$$\left\| [\varphi_0^{(k+1)}(-0) + A\varphi_0^{(k)}(-0)] + \sum_{j=1}^n (B_j A\varphi_0^{(k)}(-h_j+0) + D_j \varphi_0^{(k+1)}(-h_j+0)) - f^{(k)}(+0) \right\|_{\mathcal{H}_{l-k-3/2}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-2. \quad (3)$$

Подробнее об условиях согласования для классических решений уравнений вида (1) в конечномерном пространстве $\mathcal{H}$ см. [1], [2], [4].

Введем в рассмотрение функцию

$$\nu(\gamma) = \sum_{j=1}^n \exp(-\gamma h_j) [\bar{b}_j + \bar{d}_j],$$

где $\bar{b}_j = \max\{b_j, b_j^1\}$ и $\bar{d}_j = \max\{d_j, d_j^1\}$, и обозначим через Δ множество

$$\Delta = \{\gamma \in \mathbb{R}_+ : \nu(\gamma) < 1\} \cap \{\gamma \geq \gamma_0\}.$$

Множество Δ представляет собой полуось $(\gamma^*, +\infty)$, причем величина γ^* допускает оценку

$$\gamma^* \leq \max \left\{ \frac{1}{h_1} \ln \left(\sum_{j=1}^n (\bar{b}_j + \bar{d}_j) \right), \gamma_0, 0 \right\}. \quad (4)$$

Основным результатом предлагаемой работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (I). Тогда для любого $\gamma \in \Delta$ и любых функций $\varphi_0(t) \in W_{2,\gamma}^l((-h, 0), A^l)$ и $f(t) \in W_{2,\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}_+, A^{l-1})$, удовлетворяющих условиям согласования (3), задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t) \in W_{2,\gamma}^l((-h, +\infty), A^l)$, допускающее оценку

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^l((-h, +\infty), A^l)} \leq d [\|f\|_{W_{2,\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}_+, A^{l-1})}^2 + \|\varphi_0\|_{W_{2,\gamma}^l((-h, 0), A^l)}^2]^{1/2}$$

с постоянной d , не зависящей от функций $f(t)$ и $\varphi_0(t)$.

Приведем результат о корректной разрешимости задачи вида (1), (2) в случае конечномерного пространства $\mathcal{H} = C^m$. Принимая во внимание то, что для конечномерного пространства $\mathcal{H}$ нормы пространств $W_{2,\gamma}^l((a, b), A^l)$ и $W_{2,\gamma}^l((a, b), I)$ эквивалентны, мы сформулируем результат о разрешимости в пространстве $W_{2,\gamma}^l((a, b), I)$. Заметим, что при $\mathcal{H} = C^m$ условия, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (2), могут быть значительно ослаблены, в частности, можно отказаться от требования положительности оператора A и от условия (I).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A, B_j, D_j, j = 1, \dots, n$, — произвольные матрицы размера $m \times m$ с комплексными элементами, функция $\varphi_0(t) \in W_{2,\gamma_0}^l((-h, 0), I)$, функция $f(t) \in W_{2,\gamma_0}^{l-1}(\mathbb{R}_+, I)$ при некотором $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, причем $f(t)$ и $\varphi_0(t)$ удовлетворяют условиям согласования (3).

Тогда существует такое $\gamma_1^* \geq \gamma_0$, что для любого $\gamma > \gamma_1^*$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t) \in W_{2,\gamma}^l((-h, +\infty), I)$, допускающее оценку

$$\|u(t)\|_{W_{2,\gamma}^l((-h, +\infty), I)} \leq d_1 [\|\varphi_0\|_{W_{2,\gamma}^l((-h, 0), I)}^2 + \|f\|_{W_{2,\gamma}^{l-1}(\mathbb{R}_+, I)}^2]^{1/2}$$

с постоянной d_1 , не зависящей от функций $f(t)$ и $\varphi_0(t)$.

Приведем несколько замечаний и комментариев.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 2 и оператор A является положительным и самосопряженным. Тогда условие на параметр γ , обеспечивающее корректную разрешимость задачи (1), (2), принимает вид

$$\gamma > \gamma_1^* = \max \left\{ \frac{1}{h_1} \ln \left(\sum_{j=1}^n (b_j + d_j) \right), 0, \gamma_0 \right\}.$$

В работе [9, пример 2] показано, что для уравнения вида (1) нейтрального типа данное ограничение на параметр γ_1^* является наилучшим.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия (I) являются существенными. В этом можно убедиться в частном случае задачи (1), (2) при $l = 2, n = 1, D_1 = 0, f(t) \equiv 0$. При нарушении условия (I) можно указать функцию $\varphi_0(t) \in W_{2,\gamma}^2((-h, 0), A^2)$ и оператор B_1 такие, что $AB_1 A \varphi_0(t) \notin L_2((-h, 0), \mathcal{H})$, и значит $B_1 A u(t - h) \notin W_{2,\gamma}^1((0, h), A), t \in (0, h)$. Приходим к противоречию, поскольку первые два слагаемых $u^{(1)}(t)$ и $Au(t)$ в однородном уравнении (1) ($f(t) \equiv 0$) принадлежат пространству $W_{2,\gamma}^2((0, h), A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работах [6]–[11] задача (1), (2) и ее обобщения на случай переменных коэффициентов и переменного запаздывания изучались в пространстве $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$. Уместно заметить, что при этом нет необходимости требовать выполнения условий (I) и условий согласования (3). Тем самым, случай $l = 1$ реализуется при наименьших ограничениях на коэффициенты уравнения (1) и начальную функцию $\varphi_0(t)$.

В [10] рассматривалась задача, аналогичная (1), (2), для уравнения с переменными коэффициентами $B_j(t), D_j(t)$, для которой была установлена ее корректная разрешимость в пространстве $W_{2,\gamma}^2([-h, +\infty), A^2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Некоторые примеры начально-краевых задач для уравнений в частных производных с запаздыванием по временной переменной, которые могут быть сведены к задаче вида (1), (2), указаны в [14].

Наряду с упомянутыми работами [6]–[12] наиболее близкие результаты о разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева получены в [13]–[15]. Одним из существенных отличий результатов настоящей заметки от результатов указанных работ является то, что нами рассматриваются функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа ($D_j \neq 0$) в случае неограниченных коэффициентов $B_j A$ при членах с запаздыванием. При ином понимании решения в [16], [17] рассмотрены уравнения при более жестких ограничениях на коэффициенты при запаздывающих членах.

В [13] изучалась задача, которая может быть сведена к задаче с начальными условиями вида (2) на полуоси $(-\infty, 0)$ для уравнения, сходного с (1), на отрезке $[0, T]$, $T > 0$. При ином понимании решения в [13] установлена ее однозначная разрешимость в пространстве Соболева $W_2^l((0, T), I)$ с произвольным $l \geq 1$. Одно из отличий [13] от настоящей работы состоит в том, что в [13] задача рассматривалась в конечномерном пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^m$.

В [14] установлены достаточные условия существования и единственности решения задачи вида (1), (2) в пространстве $W_2^2([0, T], A^2)$, $T > 0$, в случае, когда оператор A является генератором ограниченной голоморфной полугруппы. Однако в [14] рассматривается уравнение только запаздывающего типа ($D_j = 0$) с одним запаздыванием.

Одним из основных отличий предлагаемой заметки от работ [13]–[17] является то, что в указанных работах решение рассматривается на произвольном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, и отсутствуют оценки роста решений при $t \rightarrow +\infty$, а в настоящей работе указана экспоненциальная оценка сверху скорости роста решения и его производных.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
3. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
4. Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ, 1992.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
6. Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 1996. № 1. С. 22–35.
7. Власов В. В. // Изв. вузов. Матем. 1994. № 6. С. 28–38.
8. Власов В. В. // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 8. С. 67–92.
9. Власов В. В. // Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 782–786.
10. Власов В. В., Сакбаев В. Ж. // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. Междувед. сб. М.: МФТИ, 1999. С. 65–72.
11. Власов В. В. // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 109–121.
12. Власов В. В., Сакбаев В. Ж. // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики. Междувед. сб. М.: МФТИ, 1998. С. 38–51.
13. Kunish K., Kappel F. // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 304. № 1. P. 1–51.
14. Di Blasio G., Kunish K., Sinestrari E. // J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 102. № 1. P. 38–57.
15. Staffans O. // J. Differential Equations. 1985. V. 58. № 2. P. 157–191.
16. Datko R. // J. Differential Equations. 1978. V. 29. № 1. P. 105–166.
17. Wu J. // Differential and Integral Equations. 1991. V. 4. № 6. P. 1325–1351.