Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Дегхан, Характеризация пространств со скалярным произведением с помощью косоугольного расстояния, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 549–554

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:15:01

Характеризация пространств со скалярным произведением с помощью косоугольного расстояния

Х. Дегхан

Получено новое уточнение неравенства треугольника в нормированных линейных пространствах. Кроме того, введено понятие косоугольного расстояния, позволившее получить простую характеристику пространств со скалярным произведением.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10170

1. Введение. В 2006 г. Малигранда [1; теорема 1] (см. также [2]) получил следующее уточнение неравенства треугольника и обратного ему неравенства: для любых ненулевых векторов x и y в нормированном линейном пространстве $X = (X, \|\cdot\|)$ выполняются неравенства

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}, \quad (1.1)$$

$$\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \max\{\|x\|, \|y\|\}. \quad (1.2)$$

Из неравенств (1.1) и (1.2) автор также получил следующую оценку *углового расстояния*

$$\alpha[x, y] = \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|$$

между двумя ненулевыми элементами x и y в пространстве X , определение которого было дано Кларксоном в работе [3]:

$$\frac{\|x - y\| - \|\|x\| - \|y\|\|}{\min\{\|x\|, \|y\|\}} \leq \alpha[x, y] \leq \frac{\|x - y\| + \|\|x\| - \|y\|\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}. \quad (1.3)$$

Правая часть оценки (1.3) является уточнением следующего неравенства Массера–Шеффера, доказанного в 1958 г. (см. [4; лемма 5.1]): для ненулевых векторов x и y в пространстве X выполняется неравенство

$$\alpha[x, y] \leq \frac{2\|x - y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}},$$

которое сильнее, чем неравенство

$$\alpha[x, y] \leq \frac{4\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|},$$

полученное Данклом и Вильямсом в работе [5]. В той же работе Данкл и Вильямс доказали, что константу 4 можно заменить на 2 тогда и только тогда, когда пространство X снабжено скалярным произведением.

Основная цель данной работы – получить новую простую характеристику пространств, снабженных скалярным произведением. Для этого мы сначала дадим некоторое уточнение неравенства треугольника в нормированных линейных пространствах и затем введем понятие косоугольного расстояния. Далее, сравним между собой угловое расстояние и косоугольное расстояние.

2. Уточнение неравенства треугольника. Начнем со следующего усиления неравенства треугольника.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для ненулевых векторов x и y в нормированном линейном пространстве $X = (X, \|\cdot\|)$ выполняются неравенства*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| - \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| \right) \min\{\|x\|, \|y\|\}, \quad (2.1)$$

$$\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\| - \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| \right) \max\{\|x\|, \|y\|\}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности предположим, что $\|x\| \leq \|y\|$. Тогда из неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \left\| \frac{\|x\|}{\|y\|} x + \frac{\|x\|}{\|x\|} y + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|y\|}\right) x \right\| \\ &\leq \|x\| \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| + \|x\| - \frac{\|x\|^2}{\|y\|} = \|x\| + \|x\| \left(\left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \frac{\|x\|}{\|y\|} \right) \\ &= \|x\| + \|y\| + \|x\| \left(\left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \frac{\|x\|}{\|y\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} \right), \end{aligned}$$

откуда следует оценка (2.1). Проводя аналогичные вычисления

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \left\| \frac{\|y\|}{\|y\|} x + \frac{\|y\|}{\|x\|} y + \left(1 - \frac{\|y\|}{\|x\|}\right) y \right\| \\ &\geq \|y\| \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left(\frac{\|y\|^2}{\|x\|} - \|y\| \right) = \|y\| + \|y\| \left(\left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \frac{\|y\|}{\|x\|} \right) \\ &= \|x\| + \|y\| + \|y\| \left(\left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \frac{\|x\|}{\|y\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} \right), \end{aligned}$$

получим неравенство (2.2).

Следующие примеры показывают, что ни наше уточнение неравенства треугольника, ни уточнение Малигранда не будут всегда наилучшими.

ПРИМЕР 2.2. Пусть X – нормированное пространство $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = |x|$. Тогда при $x = 1$ и $y = -2$ имеем

$$2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2 > 1 = \frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\|.$$

ПРИМЕР 2.3. Пусть норма элемента $x = (a, b)$ пространства $X = \mathbb{R}^2$ задается равенством $\|x\| = |a| + |b|$. Возьмем $x = (3/4, 3/4)$ и $y = (-1, 0)$, тогда $\|x\| = 3/2$ и $\|y\| = 1$. Следовательно,

$$\frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{y}{\|y\|} = (-1, 0), \quad \frac{x}{\|y\|} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right), \quad \frac{y}{\|x\|} = \left(-\frac{2}{3}, 0 \right),$$

$$2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1 < \frac{8}{6} = \frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\|.$$

Можно объединить оценки (2.1) и (2.2) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|x + y\| + \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| \right) \min\{\|x\|, \|y\|\} \\ \leq \|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \left\| \frac{x}{\|y\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| \right) \max\{\|x\|, \|y\|\}. \end{aligned}$$

Также будем использовать их как оценки расстояния в нормированных линейных пространствах; это расстояние назовем косоугольным расстоянием. Точнее, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Для двух ненулевых элементов x и y нормированного линейного пространства $X = (X, \|\cdot\|)$ расстояние

$$\beta[x, y] = \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \quad (2.3)$$

называется *косоугольным расстоянием* между x и y .

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для любых ненулевых элементов x и y в нормированном линейном пространстве $X = (X, \|\cdot\|)$ имеем

$$\beta[x, y] \leq \frac{\|x - y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}} + \frac{|\|x\| - \|y\||}{\min\{\|x\|, \|y\|\}}, \quad (2.4)$$

$$\beta[x, y] \geq \frac{\|x - y\|}{\min\{\|x\|, \|y\|\}} - \frac{|\|x\| - \|y\||}{\max\{\|x\|, \|y\|\}}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (2.2) следует, что

$$\left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x - y\| - \|x\| - \|y\| + \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} \right) \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Без потери общности предположим, что $\|x\| \leq \|y\|$. Тогда

$$\left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \|y\| \leq \|x - y\| + \frac{\|y\|}{\|x\|} (\|y\| - \|x\|),$$

и, таким образом,

$$\left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \leq \frac{\|x - y\|}{\|y\|} + \frac{\|y\| - \|x\|}{\|x\|}.$$

Аналогично из неравенства (2.1) следует, что

$$\left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \|x\| \geq \|x - y\| - \frac{\|x\|}{\|y\|} (\|y\| - \|x\|),$$

и, таким образом,

$$\left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\| \geq \frac{\|x - y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\| - \|x\|}{\|y\|},$$

что завершает доказательство следствия.

Оценки (2.1) и (2.2) для косоугольного расстояния означают, что

$$\frac{\|x - y\|}{\min\{\|x\|, \|y\|\}} - \frac{\|x\| - \|y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}} \leq \beta[x, y] \leq \frac{\|x - y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}} + \frac{\|x\| - \|y\|}{\min\{\|x\|, \|y\|\}}.$$

Так как $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, то получим

$$\beta[x, y] \leq \left(\frac{1}{\max\{\|x\|, \|y\|\}} + \frac{1}{\min\{\|x\|, \|y\|\}} \right) \|x - y\| = \left(\frac{1}{\|x\|} + \frac{1}{\|y\|} \right) \|x - y\|. \quad (2.6)$$

Константа 1 в оценке (2.6) будет наилучшей даже для пространств со скалярным произведением. Действительно, рассмотрим пространство $X = \mathbb{R}$, где норма элемента x задается равенством $\|x\| = |x|$. Возьмем $x = -1$ и $y = \epsilon$, где $\epsilon > 0$ – малая величина. Тогда

$$\beta[x, y] = \epsilon + \frac{1}{\epsilon} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{\|x\|} + \frac{1}{\|y\|} \right) \|x - y\| = \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \right) (1 + \epsilon).$$

Следовательно,

$$\beta[x, y] \frac{\|x\| \|y\|}{(\|x\| + \|y\|) \|x - y\|} = \frac{1 + \epsilon^2}{(1 + \epsilon)^2} \rightarrow 1$$

при $\epsilon \rightarrow 0^+$.

3. Характеризация пространств со скалярным произведением. В данном пункте сравним норм-угловое расстояние $\alpha[x, y]$ с косоугольным расстоянием $\beta[x, y]$. В дальнейшем нам понадобится следующая теорема Лорча.

ТЕОРЕМА 3.1 (см. [6]). Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – действительное нормированное линейное пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) для любых $x, y \in X$, если $\|x\| = \|y\|$, то $\|x + y\| \leq \|\gamma x + \gamma^{-1} y\|$ (при всех $\gamma \neq 0$);
- (ii) для любых $x, y \in X$, если $\|x + y\| \leq \|\gamma x + \gamma^{-1} y\|$ (при всех $\gamma \neq 0$), то $\|x\| = \|y\|$;
- (iii) $(X, \|\cdot\|)$ является пространством со скалярным произведением.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – действительное нормированное линейное пространство. Тогда $(X, \|\cdot\|)$ является пространством со скалярным произведением тогда и только тогда, когда для любых ненулевых элементов x и y пространства X выполняется неравенство

$$\alpha[x, y] \leq \beta[x, y]. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = (X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ – пространство со скалярным произведением, $x, y \in X$ и $x, y \neq 0$. Ясно, что

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\|^2 - \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \\ &= \left\langle \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|}, \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\rangle - \left\langle \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} - \left(\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \right) \\ &= \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2} - 2 = \left(\frac{\|x\|}{\|y\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} \right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует необходимость.

Для доказательства достаточности предположим, что $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\|$ и $\gamma \neq 0$. В силу теоремы 3.1 достаточно доказать, что

$$\|x + y\| \leq \|\gamma x + \gamma^{-1}y\|.$$

Если $x = 0$ или $y = 0$, то доказательство очевидно. Пусть $x \neq 0$, $y \neq 0$ и $\gamma > 0$. Применяя неравенство (3.1) к $\gamma^{1/2}x$ и $-\gamma^{-1/2}y$ вместо x и y соответственно, получим

$$\left\| \frac{\gamma^{1/2}x}{\gamma^{1/2}\|x\|} + \frac{\gamma^{-1/2}y}{\gamma^{-1/2}\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{\gamma^{1/2}x}{\gamma^{-1/2}\|y\|} + \frac{\gamma^{-1/2}y}{\gamma^{1/2}\|x\|} \right\|.$$

Таким образом,

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{\gamma x}{\|y\|} + \frac{\gamma^{-1}y}{\|x\|} \right\|.$$

Так как $\|x\| = \|y\| \neq 0$, то имеем

$$\|x + y\| \leq \|\gamma x + \gamma^{-1}y\|.$$

Теперь предположим, что γ отрицательно. Положим $\mu = -\gamma > 0$. Из утверждения, полученного в положительном случае, следует, что

$$\|x + y\| \leq \|\mu x + \mu^{-1}y\| = \|\gamma x + \gamma^{-1}y\|.$$

Теорема доказана.

Автор благодарит рецензентов и профессора Руен за ценные предложения, которые способствовали улучшению исходного текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Maligranda, “Simple norm inequalities”, *Amer. Math. Monthly*, **113**:3 (2006), 256–260.
- [2] L. Maligranda, “Some remarks on the triangle inequality for norms”, *Banach J. Math. Anal.*, **2**:2 (2008), 31–41.
- [3] J. A. Clarkson, “Uniformly convex spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40**:3 (1936), 396–414.
- [4] J. L. Massera, J. J. Schäffer, “Linear differential equations and functional analysis, I”, 67, 1958, № 3, 517–573.
- [5] C. F. Dunkl, K. S. Williams, “A simple norm inequality”, *Amer. Math. Monthly*, **71**:1 (1964), 53–54.
- [6] E. R. Lorch, “On certain implications which characterize Hilbert space”, *Ann. of Math. (2)*, **49**:3 (1948), 523–532.

Х. Дегхан

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Иран

E-mail: h_dehghan@iasbs.ac.ir,

[hossein.dehghan@gmail.com](mailto:hosseini.dehghan@gmail.com)

Поступило

22.01.2011