Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Е. Симонов, Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_∞ , L_1 на отрезке, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 604–613

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:31:05

Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_∞ , L_1 на отрезке

И. Е. Симонов

Изучается неравенство между равномерной нормой производной порядка ℓ алгебраического многочлена степени n и L_1 -нормой самого многочлена на отрезке. При всех $\ell \geq (n-1)/3$ выписаны точная константа и экстремальный многочлен.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10171

1. Постановка задачи и результаты. Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами. В работе изучается неравенство

$$\|P^{(\ell)}\|_\infty \leq C(n, \ell) \|P\|_1, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad (1.1)$$

с точной константой $C(n, \ell)$. Здесь и далее

$$\|P\|_p = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |P(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \quad \|P\|_\infty = \max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|.$$

Неравенство (1.1) является частным случаем общей задачи об оценке L_q -среднего ℓ -й производной алгебраического многочлена через L_p -среднее самого многочлена:

$$\|P^{(\ell)}\|_q \leq C_{q,p}(n, \ell) \|P\|_p, \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad 0 < p, q \leq \infty, \quad 1 \leq \ell \leq n. \quad (1.2)$$

Неравенству (1.2) посвящено большое количество работ; хороший обзор результатов содержится в [1], [2]. Иванов [3] и Конягин [4] получили наиболее общие на данный момент оценки наилучших констант в неравенствах типа (1.2). Из результатов работы [3] следует порядок роста величины $C_{q,p}(n, \ell)$ по n при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных ℓ , p , q ; в частности,

$$C(n, \ell) = C_{\infty,1}(n, \ell) \asymp n^{2\ell+2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Точные значения величины $C_{q,p}(n, \ell)$ известны лишь для некоторых значений p , q и ℓ . Братья Марковы [5], [6] получили точное неравенство (1.2) для $p = q = \infty$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00462, 12-01031495) и Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.1544.2011).

$1 \leq \ell \leq n-1$; экстремальным в этом случае является многочлен Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$. Боянов [7] (см. также [8]) доказал, что многочлен T_n является экстремальным и для всех $q \in [1, \infty)$, $p = \infty$, $\ell = 1$. Случай $p = q = 2$ исследовали Шмидт, Хилле, Сегё, Тамаркин, Милованович, Дорфлер, Кроо [9], [1], [10], [11]. Лабель [12] нашел точную константу при $q = \infty$, $p = 2$, $1 \leq \ell \leq n-1$. Если $\ell = n$, то задача сводится к нахождению многочлена, наименее уклоняющегося от нуля в метрике $\|\cdot\|_p$, с фиксированным старшим коэффициентом. Для $p = \infty$ это многочлен Чебышева первого рода [13], для $p = 2$ — многочлен Лежандра, для $p = 1$ — многочлен Чебышева второго рода

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [-1, 1];$$

в последнем случае решение было найдено Коркиным и Золотаревым [14].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть заданы натуральные числа n и ℓ , $(n-1)/3 \leq \ell \leq n-1$. Обозначим $u_k = U_k^{(\ell)}(1)$, $k = \ell, \dots, n$,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_n & u_{n-1} & \cdots & u_\ell \\ u_{n-1} & u_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_\ell & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

λ^* — наибольшее собственное число матрицы $\mathbf{U}$. Тогда

- 1) λ^* превосходит модули всех других собственных чисел $\mathbf{U}$, имеет алгебраическую кратность 1, и ему соответствует собственный вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-\ell})^T$ с положительными координатами;
- 2) точная константа в неравенстве (1.1) равна $C(n, \ell) = \lambda^*$;
- 3) экстремальными в неравенстве (1.1) являются многочлены $P^*(x)$, $P^*(-x)$, где

$$P^*(x) = \frac{aG^*(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$G^*(\theta) = \sum_{j=0}^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n-\ell} \alpha_j \alpha_k \sin((n+1-j-k)\theta),$$

при этом $\|P^{*(\ell)}\|_\infty = |P^{*(\ell)}(1)|$.

2. Вспомогательные утверждения. Нам понадобятся следующие определения (см. [15; гл. 13]).

Пусть $A = \|a_{j,k}\|_1^n$, $C = \|c_{j,k}\|_1^n$ — две вещественные матрицы размера $n \times n$. Будем писать $A \geq C$, если $a_{j,k} \geq c_{j,k}$ для всех $j = 1, \dots, n$ и $k = 1, \dots, n$. Пусть $A = \|a_{j,k}\|_1^n$ есть комплексная матрица. Обозначим через A^+ матрицу, которая получается, если все элементы матрицы A заменить их модулями: $A^+ = \||a_{j,k}|\|_1^n$.

Матрица $A = \|a_{j,k}\|_1^n$ называется *разложимой*, если при некотором разбиении всех индексов $1, 2, \dots, n$ на две системы (без общих индексов)

$$j_1, j_2, \dots, j_\mu, \quad k_1, k_2, \dots, k_\nu, \quad \mu + \nu = n,$$

$$a_{j_\alpha, k_\beta} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \mu, \quad \beta = 1, 2, \dots, \nu.$$

В противном случае матрицу A будем называть *неразложимой*.

Через E_n обозначим единичную матрицу размера $n \times n$.

ЛЕММА 1. Пусть

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$b_{jk} \neq 0, j + k \leq n + 1$. Тогда матрица $\mathbf{B}$ неразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то утверждение очевидно. Для $n \geq 2$ воспользуемся критерием неразложимости матрицы [16; гл. VIII, § 1, теорема 8.11]: матрица $B = \|b_{j,k}\|_1^n$ тогда и только тогда неразложима, когда $(E_n + B^+)^{n-1} > 0$. Если $n = 2$, то $E_n + \mathbf{B}^+ > 0$. Пусть $n \geq 3$. Достаточно доказать, что для некоторого $1 \leq m \leq n - 1$

$$(E_n + \mathbf{B}^+)^m > 0.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathbf{B}^{+2} > 0$, поэтому $(E_n + \mathbf{B}^+)^2 \geq \mathbf{B}^{+2} > 0$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathcal{T}_m$ есть множество тригонометрических полиномов $G(\theta)$ порядка m с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \alpha_0 + \sum_{k=1}^m (\alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta)) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^m \bar{\gamma}_k e^{ik\theta} \right), \quad \gamma_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \beta_0 = 0. \end{aligned}$$

Следуя работе Геронимуса [17], через $L[G]$ обозначим интеграл

$$L[G] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(\theta)| d\theta. \quad (2.1)$$

Пусть задан набор c из $s + 1$ комплексных чисел:

$$c = (c_{m-s}, \dots, c_m), \quad c_k = a_k + ib_k.$$

Обозначим через $\omega[G, c]$ линейный функционал от $s + 1$ старших коэффициентов полинома $G(\theta)$:

$$\omega[G, c] = \sum_{k=m-s}^m \alpha_k a_k + \beta_k b_k = \operatorname{Re} \sum_{k=m-s}^m \bar{\gamma}_k c_k.$$

Существенную роль далее играет следующий результат Геронимуса, в котором вычисляется норма $\omega[\cdot, c]$ как линейного функционала на пространстве $\mathcal{T}_m$ с нормой (2.1).

ТЕОРЕМА А (Геронимус [17; теорема II], [18; теорема I]). Для всякого $G \in \mathcal{T}_m$ имеет место неравенство

$$\frac{|\omega[G, c]|}{L[G]} \leq \frac{|\omega[G_0, c]|}{L[G_0]} = \frac{\pi \delta_0}{2}, \quad s \leq \left[\frac{2m-1}{3} \right].$$

При этом δ_0 является наибольшим корнем векового уравнения

$$\mathbf{C}(\delta, c) = \begin{vmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{m-s} & \bar{c}_{m-s+1} & \cdots & \bar{c}_m \\ 0 & \delta & \cdots & 0 & 0 & \bar{c}_{m-s} & \cdots & \bar{c}_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta & 0 & 0 & \cdots & \bar{c}_{m-s} \\ c_{m-s} & 0 & \cdots & 0 & \delta & 0 & \cdots & 0 \\ c_{m-s+1} & c_{m-s} & \cdots & 0 & 0 & \delta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m & c_{m-1} & \cdots & c_{m-s} & 0 & 0 & \cdots & \delta \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

Знак равенства имеет место только для полиномов вида

$$G_0(\theta) = \operatorname{Re}(q^2(z)z^{m-2s+\nu})|\tau(z)|^2, \quad z = e^{i\theta},$$

где $\nu + 1$ есть кратность корня δ_0 , $\tau(z)$ – произвольный многочлен степени не выше ν , $q(z)$ – многочлен степени $s - \nu$, определяемый из разложения

$$\delta_0 \frac{q(z)}{z^{s-\nu}q(1/\bar{z})} = \bar{c}_{m-s} + \bar{c}_{m-s+1}z + \cdots + \bar{c}_m z^s + \cdots, \quad |z| \leq 1.$$

Следующая лемма является основным компонентом доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 2. Пусть заданы натуральные числа m и s , $s \leq (2m - 1)/3$, и набор $b^* = (b_{m-s}^*, \dots, b_m^*)$, $b_k^* > 0$. Тогда для любого набора $b = (b_{m-s}, \dots, b_m)$, $b_k \in \mathbb{R}$, со свойством

$$|b_k| \leq b_k^*, \quad k = m - s, \dots, m, \quad (2.3)$$

и любого нечетного полинома $G(\theta)$ степени m

$$G(\theta) = \sum_{k=1}^m \beta_k \sin(k\theta) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^m \bar{\gamma}_k e^{ik\theta}, \quad \gamma_k = 0 + i\beta_k,$$

справедливо неравенство

$$\frac{|\omega[G, ib]|}{L[G]} \leq \frac{\pi \lambda^*}{2}, \quad (2.4)$$

где λ^* – наибольшее собственное число матрицы

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} b_m^* & b_{m-1}^* & \cdots & b_{m-s}^* \\ b_{m-1}^* & b_{m-2}^* & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-s}^* & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Собственное число λ^* превосходит модули всех других собственных чисел, имеет алгебраическую кратность 1, и ему соответствует собственный вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_s)^\top$ с положительными координатами: $\alpha_k > 0$, $k = 0, \dots, s$.

Неравенство (2.4) обращается в равенство в том и только том случае, когда для некоторых $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $\nu \in \{0, 1\}$ имеет место представление

$$b_k = \varepsilon(-1)^{\nu k} b_k^*, \quad k = m - s, \dots, m, \quad (2.6)$$

и полином

$$G(\theta) = aG^*(\theta + \nu\pi), \quad a \neq 0,$$

где

$$G^*(\theta) = \sum_{j=0}^s \sum_{k=0}^s \alpha_j \alpha_k \sin((m-j-k)\theta) = \sum_{k=1}^m \beta_k^* \sin(k\theta). \quad (2.7)$$

При этом старшие $s+1$ коэффициентов полинома $G^*(\theta)$ положительны:

$$\beta_k^* > 0, \quad k = m-s, \dots, m. \quad (2.8)$$

Доказательство проведем в несколько этапов.

1. Установим неравенство (2.4). По теореме А

$$\frac{|\omega[G, ib]|}{L[G]} \leq \frac{\pi\delta_0}{2},$$

где δ_0 – наибольший корень уравнения (2.2) $C(\delta, ib) = 0$.

Обозначим

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_{m-s} \\ b_{m-1} & b_{m-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m-s} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{m-s} & b_{m-s+1} & \cdots & b_m \\ 0 & b_{m-s} & \cdots & b_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{m-s} \end{pmatrix}.$$

Из свойств блочных матриц [15; гл. II, § 5, п. 3] для любого δ имеет место равенство

$$C(\delta, ib) = \begin{vmatrix} \delta E & -iB \\ iB^\top & \delta E \end{vmatrix} = |\delta^2 E - BB^\top|, \quad E = E_{s+1}.$$

Непосредственным умножением проверяется равенство $BB^\top = \mathbf{B}^2$, поэтому

$$C(\delta, ib) = |\delta^2 E - \mathbf{B}^2| = |\delta E - \mathbf{B}| |\delta E + \mathbf{B}|. \quad (2.9)$$

Аналогично получаем равенства

$$C(\delta, ib^*) = |\delta^2 E - \mathbf{B}^{*2}| = |\delta E - \mathbf{B}^*| |\delta E + \mathbf{B}^*|. \quad (2.10)$$

Нетрудно проверить, что матрица $(\mathbf{B}^*)^2$ положительна, поэтому по теореме Перрона [15; гл. XIII, § 2, теорема 1] она имеет собственное число $(\lambda^*)^2$, $\lambda^* > 0$, которое превосходит модули всех других собственных чисел и имеет кратность 1. Матрица $\mathbf{B}^*$ неотрицательна и по лемме 1 неразложима. Поэтому из равенства (2.10) и теоремы Фробениуса [15; гл. XIII, § 2, теорема 2] следует, что λ^* является собственным числом $\mathbf{B}^*$ кратности 1, превосходит модули всех других собственных чисел $\mathbf{B}^*$ и ему соответствует собственный вектор $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_s)^\top$ с положительными координатами $\alpha_k > 0$, $k = 0, \dots, s$.

Докажем, что $\delta_0 \leq \lambda^*$, и исследуем случаи равенства. Пусть δ_1 – наибольшее по модулю собственное число матрицы $\mathbf{B}$. В силу равенства (2.9) имеем $|\delta_1| = \delta_0$. Условие (2.3) влечет неравенство $\mathbf{B}^+ \leq \mathbf{B}^*$. Таким образом, выполнены все условия леммы [15; гл. XIII, § 2, лемма 2], откуда

$$|\delta_1| = \delta_0 \leq \lambda^*;$$

равенство достигается только в том случае, когда

$$\mathbf{B} = e^{i\varphi} D \mathbf{B}^* D^{-1}, \quad (2.11)$$

где $e^{i\varphi} = \delta_1/\lambda^*$, $D = \|d_{j,k}\|_0^s$ – комплексная диагональная матрица, у которой все диагональные элементы по модулю равны единице: $d_{jj} = d_j$, $|d_j| = 1$.

Докажем, что в данном случае условие (2.11) эквивалентно (2.6). Прежде всего нетрудно видеть, что если выполняется (2.6), то выполняется и (2.11) с $e^{i\varphi} = \varepsilon(-1)^{\nu m}$ и $d_j = (-1)^{\nu j}$.

Допустим теперь, что выполняется условие (2.11). Матрица $\mathbf{B}$ симметричная, поэтому все ее характеристические числа вещественны. Значит, отношение δ_1/λ^* может равняться только 1 или -1 . Пусть для определенности $\delta_1/\lambda^* = 1$. Приравнявая поэлементно (2.11), получаем соотношения

$$b_{m-k} = \frac{d_j}{d_{k-j}} b_{m-k}^*, \quad j = 0, \dots, s, \quad j, \dots, s. \quad (2.12)$$

При $j = 0$ поделим друг на друга равенства (2.12) для k и $k-1$ и получим

$$\frac{b_{m-k}}{b_{m-k}^*} = \frac{d_{k-1}}{d_k} \frac{b_{m-(k-1)}}{b_{m-(k-1)}^*}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Поделим друг на друга равенства (2.12) при $j = 1$ и $j = 0$:

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{d_{k-1}}{d_k}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Сравнивая последние два выражения, находим, что

$$\frac{b_{m-k}}{b_{m-k}^*} = \frac{d_1}{d_0} \frac{b_{m-(k-1)}}{b_{m-(k-1)}^*}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Все b_j и b_j^* вещественны, поэтому $d_1/d_0 \in \{-1, 1\}$. Отсюда легко следует (2.6) с $\varepsilon = d_0 e^{i\varphi}$ и

$$\nu = \begin{cases} 0 & \text{при } d_1/d_0 = 1, \\ 1 & \text{при } d_1/d_0 = -1. \end{cases}$$

2. Докажем равенство (2.7). Как уже было замечено, кратность λ^* , а значит, и наибольшего корня уравнения $\mathbf{C}(\lambda, ib^*) = 0$, равна единице. Поэтому по теореме А экстремальный многочлен в неравенстве (2.4) для $b = b^*$ единственный с точностью до числового множителя и равен

$$G^*(\theta) = \operatorname{Re}(q^2(z)z^{m-2s}), \quad z = e^{i\theta}, \quad (2.13)$$

где $q(z)$ – многочлен степени s , определяемый из разложения

$$i\lambda^* \frac{q(z)}{z^s q(1/\bar{z})} = b_{m-s}^* + b_{m-s+1}^* z + \dots + b_m^* z^s + \dots, \quad |z| \leq 1. \quad (2.14)$$

3. Доказательство теоремы 1. Запишем величину $C(n, \ell)$ в виде

$$C(n, \ell) = \sup_{P \in \mathcal{P}_n} \frac{\|P^{(\ell)}\|_\infty}{\|P\|_1}. \quad (3.1)$$

Многочлен $P \in \mathcal{P}_n$ разложим по многочленам Чебышева второго рода:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \tau_k U_k(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k U_{k-1}(x),$$

и поставим ему в соответствие тригонометрический полином

$$G(\theta) = \sum_{k=1}^m \beta_k \sin(k\theta), \quad m = n+1. \quad (3.2)$$

Знаменатель (3.1) с помощью замены $\theta = \arccos x$ преобразуем к виду

$$\|P\|_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left| \sum_{k=1}^m \beta_k \frac{\sin(k \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| dx = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^m \beta_k \sin(k\theta) \right| d\theta = \frac{\pi}{2} L[G].$$

Хорошо известно, что $\|U_k^{(\ell)}\|_\infty = U_k^{(\ell)}(1)$ для всех k и ℓ . Рассмотрим всевозможные наборы чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=\ell+1}^m$, где ε_k принимает значение 1 или -1 . Тогда числитель (3.1) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \|P^{(\ell)}\|_\infty &\leq \sum_{k=1}^m \|\beta_k U_{k-1}^{(\ell)}\|_\infty \\ &= \sum_{k=\ell+1}^m |\beta_k| U_{k-1}^{(\ell)}(1) = \max_{\{\varepsilon_k\}_{k=\ell+1}^m} \sum_{k=\ell+1}^m \varepsilon_k U_{k-1}^{(\ell)}(1) \beta_k. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Положим $s = m - (\ell + 1) = n - \ell$,

$$b_k^* = U_{k-1}^{(\ell)}(1), \quad b_k = \varepsilon_k U_{k-1}^{(\ell)}(1), \quad b^* = (b_{m-s}^*, \dots, b_m^*), \quad b = (b_{m-s}, \dots, b_m).$$

В этих обозначениях неравенство (3.3) принимает вид

$$\|P^{(\ell)}\|_\infty \leq \max_{\{\varepsilon_k\}_{k=\ell+1}^m} \sum_{k=\ell+1}^m \varepsilon_k U_{k-1}^{(\ell)}(1) \beta_k = \max_b |\omega[G, ib]|.$$

Из неравенства $(n-1)/3 \leq \ell \leq n-1$ следует, что

$$1 \leq s \leq \frac{2n+1}{3} = \frac{2m-1}{3}.$$

Поэтому выполняются условия леммы 2, и, применяя ее, мы получаем оценку

$$\frac{\|P^{(\ell)}\|_\infty}{\|P\|_1} \leq \max_b \frac{2}{\pi} \frac{|\omega[G, ib]|}{L[G]} \leq \lambda^*, \quad (3.4)$$

где λ^* есть наибольшее характеристическое число матрицы (2.5). При этом правое неравенство в (3.4) обращается в равенство только на полиномах (2.7). Полиному $G^*(\theta)$ по формуле (3.2) соответствует многочлен

$$P^*(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \beta_k^* U_{k-1}(x),$$

полиному $G^*(\theta + \pi)$ соответствует многочлен $P^*(-x)$. В силу условия (2.8) на коэффициенты β_k^* справедливы равенства

$$\begin{aligned} \|P^{*(\ell)}(x)\|_\infty &= \|P^{*(\ell)}(-x)\|_\infty = P^{*(\ell)}(1) = \sum_{k=\ell+1}^{n+1} \beta_k^* U_{k-1}(1) = |\omega[G^*, ib^*]|, \\ \|P^*(x)\|_1 &= \|P^*(-x)\|_1 = \frac{\pi}{2} L[G^*]. \end{aligned}$$

Следовательно, $C(n, \ell) = \lambda^*$ и $P^*(x)$, $P^*(-x)$ — экстремальные многочлены.

Доказательство теоремы завершено.

Автор благодарен П. Ю. Глазыриной за постановку задачи и содействие в выполнении работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Sci., Singapore, 1994.
- [2] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **26**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [3] В. И. Иванов, “Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках”, *Матем. заметки*, **18**:4 (1975), 489–498.
- [4] С. В. Конягин, “Оценки производных от многочленов”, *ДАН СССР*, **243**:5 (1978), 1116–1118.
- [5] А. А. Марков, “Об одном вопросе Д. И. Менделеева”, *Зап. Императорск. АН*, **62** (1889), 1–24.
- [6] В. А. Марков, *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке*, Типография Императорской АН, СПб, 1892.
- [7] B. D. Bojanov, “An extension of the Markov inequality”, *J. Approx. Theory*, **35**:2 (1982), 181–190.
- [8] B. Bojanov, “Markov-type inequalities for polynomials and splines”, *Approximation Theory, X. Abstract and Classical Analysis*, Innov. Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002, 31–90.
- [9] E. Hille, G. Szegő, J. D. Tamarkin, “On some generalizations of a theorem of A. Markoff”, *Duke Math. J.*, **3**:4 (1937), 729–739.
- [10] P. Dörfler, “New inequalities of Markov type”, *SIAM J. Math. Anal.*, **18**:2 (1987), 490–494.
- [11] A. Kroó, “On the exact constant in the L_2 Markov inequality”, *J. Approx. Theory*, **151**:2 (2008), 208–211.
- [12] G. Labelle, “Concerning polynomials on the unit interval”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 321–326.
- [13] П. Л. Чебышев, “Теория механизмов, известных под названием параллелограммов”, *Полн. собр. соч.: в 5 т. Т. 2. Математический анализ*, Изд-во АН СССР, М., 1947, 23–51.

- [14] A. Korkine, G. Zolotareff, “Sur un certain minimum”, *Nouv. Ann. Math.* (2), **12** (1873), 337–356.
- [15] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 2010.
- [16] О. Б. Цехан, *Матричный анализ*, ФОРУМ, М., 2010.
- [17] Я. Л. Геронимус, “О некоторых экстремальных задачах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **1**:2 (1937), 185–202.
- [18] Я. Л. Геронимус, “Об одной экстремальной задаче Чебышева”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **2**:4 (1938), 445–456.

И. Е. Симонов

Институт математики и компьютерных наук,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург

E-mail: isimonov@k66.ru

Поступило

18.04.2012