Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Венхуа Лан, Хианглин Вей, Классификация семиточечных множеств с четырьмя расстояниями на плоскости, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 492–508

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:40:28

Классификация семиточечных множеств с четырьмя расстояниями на плоскости

Венхуа Лан, Хианлин Вей

Точечное множество X на плоскости называется множеством с k расстояниями, если оно определяет в точности k различных расстояний между двумя различными точками множества X . В данной работе приводится классификация семиточечных множеств с четырьмя расстояниями и показано, что с точностью до изоморфизма на плоскости существуют 42 семиточечных множества с четырьмя расстояниями; также приводятся некоторые результаты относительно диаметральных графов.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10172

1. Введение. Точечное множество X на евклидовой плоскости называется *множеством с k расстояниями*, если оно определяет в точности k различных расстояний. Будем говорить, что два точечных множества на плоскости *изоморфны* друг другу, если существует преобразование подобия из одного множества в другое. Через $d(x, y)$ обозначим евклидово расстояние между x и y . Пусть R_n – множество вершин правильного выпуклого n -угольника, через R_n^+ обозначим множество, состоящее из R_n и центральной точки этого многоугольника, а через $R_n - i$ обозначим множество, состоящее из $n - i$ вершин множества R_n . При $i \geq 2$ возможны различные варианты множества $R_n - i$ в зависимости от того, какие i точек исключаются из множества R_n . Пусть $g(k)$ – наибольшая возможная мощность множества с k расстояниями. Множество X с k расстояниями называется *максимальным*, если X состоит из $g(k)$ точек. Ясно, что выполняется неравенство $g(k) \geq 2k + 1$, так как R_{2k+1} является множеством с k расстояниями. Эрдеши и Фишбурна [1] определили величину $g(k)$ при $k \leq 5$. Напомним также, что $g(2) = 5$, но этот результат реализуется только для множества R_5 . Шиохара [2] классифицировал множества с тремя расстояниями, которые содержат по крайней мере пять точек. В данной работе приводится классификация семиточечных множеств с четырьмя расстояниями.

Пусть $D = D(X)$ – диаметр некоторого конечного множества X , и пусть

$$X_D = \{x \in X : d(x, y) = D \text{ для некоторого } y \in X\}$$

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (гранты №№ 10901045, 11071055), Фонда естественных наук провинции Хебей (гранты №№ A2010000828, A2010000351), Научного фонда университета науки и технологии провинции Хебей (грант № QD200955).

и $m = m(X) = |X_D|$. При индексации множества, состоящего из t точек, индексы отождествляются по модулю t . *Диаметральным графом* $DG(X)$ множества X называется граф с множеством вершин X такой, что любые две вершины $x, y \in X$ являются смежными, если $d(x, y) = D$. При $v \in X_D$ через $d(v)$ обозначим число отрезков длины D , соединенных с вершиной v в $DG(X_D)$. Ясно, что $DG(X_D)$ не имеет изолированных вершин. Через P_n и C_n обозначим соответственно путь и цикл, соединяющие n вершин. Ясно, что

$$DG(R_{2n+1}) = C_{2n+1} \quad \text{и} \quad DG(R_{2n}) = nP_2.$$

Как и в работе [3], обозначим множество всех n -точечных множеств с k расстояниями через $E_n(k)$. При $|X_D| = m$ обозначим $X_D = \{1, 2, 3, \dots, m\}$; здесь точки $1, 2, 3, \dots, m$ всегда нумеруются последовательно и всегда против часовой стрелки. Будем говорить, что отрезок $[i, i + 1]$ является *ребром* множества X_D при любом $i \in X_D$.

2. Предварительные леммы.

ЛЕММА 1 [4], [5]. Пусть S – множество вершин выпуклого n -угольника, $n \geq 3$, которое определяет в точности t различных расстояний. Тогда $t \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Кроме того,

- (i) если n нечетно и $t = (n - 1)/2$, то S совпадает с R_n ;
- (ii) если n четно, $t = n/2$ и $n \geq 8$, то S равно R_n или $R_{n+1} - 1$;
- (iii) если $(n, t) = (6, 3)$, то S совпадает с R_6 , $R_7 - 1$ или с множеством, подобным множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на рис. 1;
- (iv) если $(n, t) = (7, 4)$, то S равно $R_8 - 1$ или $R_9 - 2$.

Рис. 1. Девятиточечное множество с четырьмя расстояниями

ЛЕММА 2 [1]. Пусть D – диаметр некоторого n -точечного планарного множества X при $n \geq 3$ и $m = |X_D|$. Тогда

- (i) если $m \geq 3$, то точки множества X_D являются вершинами некоторого выпуклого m -угольника;
- (ii) D можно исключить из числа расстояний между внутренними точками, удалив не более чем $\lceil m/2 \rceil$ точек из множества X , где $\lceil m/2 \rceil$ – наименьшее целое число, по крайней мере равное $m/2$.

ЛЕММА 3 [3]. Пусть $G = DG(X)$ для множества X . Тогда

- (i) G не содержит цикла C_{2k} при любом $k \geq 2$;

- (ii) если G содержит цикл C_{2k+1} , то любые две вершины множества $V(G) \setminus V(C_{2k+1})$ не являются смежными, и каждая вершина, которая не принадлежит циклу, будет смежной не более чем с одной вершиной данного цикла; здесь через $V(G)$ обозначено множество вершин простого графа G ; в частности, G содержит не больше одного цикла.

Как и в работе [3], подмножество H множества $V(G)$ будет независимым множеством в $V(G)$, если никакие две вершины множества H не являются смежными; H называется *максимальным*, если нет других независимых множеств, содержащих H ; число независимости $\alpha(G)$ графа G – это максимальная мощность независимых множеств графа G .

ЛЕММА 4 [3]. Пусть $G = DG(X)$ – диаметральный граф множества X при $|X| = n$. Если $G \neq C_n$, то $\alpha(G) \geq \lceil n/2 \rceil$.

ЛЕММА 5 [6]. Пусть для планарного точечного множества X при $t = |X_D|$ выполняется соотношение $X_D = \{1, 2, 3, \dots, t\}$, где t точек занумерованы последовательно против часовой стрелки. Если для подмножества $S \subset X_D$, $S = \{k, k+1, k+2, \dots, k+l-1\}$, отрезок $[k, k+l-1]$ является отрезком максимальной длины и

$$d(k, k+i) < d(k, k+l-1) \quad \text{при любом } i = 1, 2, 3, \dots, l-2,$$

то

$$d(k, k+1) < d(k, k+2) < d(k, k+3) < \dots < d(k, k+l-1) \leq D.$$

ЛЕММА 6. Пусть X – семиточечное множество с четырьмя расстояниями при $t = |X_D| = 5$, и пусть $DG(X_D) = C_5$. Тогда X_D изоморфно R_5 или одной из конфигураций, показанных на рис. 2.

Рис. 2. Две других конфигурации при $DG(X_D) = C_5$ с четырьмя расстояниями

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – множество с четырьмя расстояниями такими, что $D = d_1 > d_2 > d_3 > d_4$. Предположим, что $X_D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, где точки 1, 2, 3, 4, 5 занумерованы последовательно против часовой стрелки,

$$d(1, 3) = d(1, 4) = d(2, 4) = d(2, 5) = d(3, 5) = d_1.$$

Из леммы 2 следует, что X_D – выпуклое множество. Так как $g(2) = 5$, то X_D имеет по крайней мере два различных расстояния. Если X_D является множеством

с двумя расстояниями, то $X_D = R_5$, так как $g(2) = 5$ реализуется только множеством вершин R_5 .

Теперь предположим, что X_D – это множество с тремя расстояниями такими, что $D = d_1 > d_2 > d_3$. Без потери общности можно предположить, что $d(1, 2) = d_2$ и $d(2, 3) = d_3$.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(1, 5) = d_3$. Тогда точки 1, 2, 3, 5 лежат на окружности. Если $d(4, 5) = d_2$, то точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности и, следовательно, все точки множества X_D лежат на этой окружности, откуда вытекает, что $d_3 = d(2, 3) = d(4, 5) = d_2$, а это невозможно. Если $d(4, 5) = d_3$, то точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_2 = d(1, 2) = d(4, 5) = d_3$, а это невозможно.

Затем рассмотрим случай, когда $d(1, 5) = d_2$. Если $d(3, 4) = d_3$, то $\angle 215 = \angle 234$, т.е. $d_1 = d(2, 5) \neq d(2, 4) = d_1$, что противоречит условию. Если $d(3, 4) = d_2$, то точки 1, 2, 3, 4 лежат на окружности и точки 1, 3, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, точки 1, 2, 3, 5 также лежат на окружности, откуда следует, что $d_2 = d(1, 5) = d(2, 3) = d_3$, а это противоречит условию.

Теперь осталось рассмотреть случай множества X_D с четырьмя расстояниями. Без потери общности предположим, что $d(1, 2) = d_2$. Рассмотрим три различных случая.

Случай 1. Множество X_D имеет только одно ребро длины d_2 . Ясно, что если $d(1, 5) = d(2, 3)$, то

$$\angle 324 = \angle 321 - \angle 421 = \angle 512 - \angle 412 = \angle 514,$$

откуда следует, что $d(3, 4) = d(4, 5)$.

Сначала рассмотрим случай, когда

$$d(2, 3) = d(1, 5).$$

Если

$$d(2, 3) = d(1, 5) = d_3 \quad \text{и} \quad d(3, 4) = d(4, 5) = d_4,$$

то, очевидно, $\angle 123 > \angle 345 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(1, 3) > d(3, 5) = d_1$, а это противоречит условию. Если

$$d(2, 3) = d(1, 5) = d_4 \quad \text{и} \quad d(3, 4) = d(4, 5) = d_3,$$

то X_D имеет одну разумную конфигурацию с четырьмя расстояниями, как показано на рис. 2, а).

Затем рассмотрим случай, когда

$$d(2, 3) \neq d(1, 5).$$

Без потери общности можно считать, что $d(2, 3) = d_3$ и $d(1, 5) = d_4$.

Если

$$d(3, 4) = d(4, 5) = d_4,$$

то $\angle 215 > \angle 345 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(2, 5) > d(3, 5) = d_1$, а это противоречит условию.

Если

$$d(3, 4) = d(4, 5) = d_3,$$

то $\angle 234 > \angle 345 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(2, 4) > d(3, 5) = d_1$, что также противоречит условию.

Если

$$d(3, 4) = d_3 \quad \text{и} \quad d(4, 5) = d_4,$$

то $\angle 234 = \angle 451 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(2, 4) > d(1, 4) = d_1$, а это противоречит условию.

Если

$$d(3, 4) = d_4 \quad \text{и} \quad d(4, 5) = d_3,$$

точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности, точки 1, 3, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, точки 1, 2, 3, 5 также лежат на окружности, то отсюда следует, что $d_4 = d(1, 5) = d(2, 3) = d_3$, а это противоречит условию.

Случай 2. Множество X_D имеет две грани длины d_2 . Сначала рассмотрим случай, когда две грани длины d_2 расположены последовательно. Без ограничения общности можно считать, что

$$d(1, 2) = d(2, 3) = d_2.$$

Тогда $d(1, 5) = d(3, 4)$, так как

$$\angle 324 = \angle 325 - \angle 425 = \angle 124 - \angle 425 = \angle 125.$$

Если

$$d(1, 5) = d(3, 4) = d_3 \quad \text{и} \quad d(4, 5) = d_4,$$

то $\angle 123 > \angle 345 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(1, 3) > d(3, 5) = d_1$, а это противоречит условию.

Если

$$d(1, 5) = d(3, 4) = d_4 \quad \text{и} \quad d(4, 5) = d_3,$$

то $\angle 234 > \angle 345 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(2, 4) > d(3, 5) = d_1$, а это противоречит условию.

Затем рассмотрим случай, когда две грани длины d_2 не расположены последовательно. Без ограничения общности можно считать, что

$$d(1, 2) = d(3, 4) = d_2.$$

Тогда $d(1, 5) = d(4, 5)$, так как

$$\angle 125 = \angle 123 - \angle 523 = \angle 432 - \angle 532 = \angle 435.$$

Если

$$d(1, 5) = d(4, 5) = d_4 \quad \text{и} \quad d(2, 3) = d_3,$$

то $\angle 123 > \angle 345 > \pi/2$, т.е. $d_1 = d(1, 3) > d(3, 5) = d_1$, а это противоречит условию.

Если

$$d(1, 5) = d(4, 5) = d_3 \quad \text{и} \quad d(2, 3) = d_4,$$

то множество X_D имеет другую разумную конфигурацию с четырьмя расстояниями, как показано на рис. 2, б).

Случай 3. Множество X_D имеет три грани длины d_2 . Если три грани длины d_2 расположены последовательно, то можно считать, что

$$d(1, 2) = d(2, 3) = d(3, 4) = d_2.$$

Теперь имеем $\angle 123 \neq \angle 234$, так как $d(1, 5) \neq d(4, 5)$, т.е.

$$d_1 = d(1, 3) \neq d(2, 4) = d_1,$$

а это противоречит условию.

Если все три грани длины d_2 не расположены последовательно, то можно считать, что $d(1, 2) = d(2, 3) = d(4, 5) = d_2$. Теперь $\angle 234 \neq \angle 345$, т.е.

$$d_1 = d(2, 4) \neq d(3, 5) = d_1,$$

а это также противоречит условию.

ЛЕММА 7. Пусть X – семиточечное множество с четырьмя расстояниями при $m = |X_D| = 6$, X_D также является множеством с четырьмя расстояниями, и $d(i) \leq 2$ при любом $i \in X_D$. Тогда X_D изоморфно множеству $R_8 - 2$ или $R_9 - 3$, как показано на рис. 3.

Рис. 3. Пять конфигураций с четырьмя расстояниями при $m = |X_D| = 6$ и $d(i) \leq 2$ для любого $i \in X_D$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 занумерованы последовательно и всегда против часовой стрелки. Если $DG(X_D)$ содержит некоторый цикл, то в силу леммы 3 этот цикл будет C_3 или C_5 , а остальные точки, которые не принадлежат циклу, будут смежными с точками, принадлежащими циклу. Таким образом, существует точка $p \in X_D$ такая, что $d(p) \geq 3$. Следовательно, $DG(X_D)$ не содержит цикла, и граф $DG(X_D)$ может быть

$$P_6, \text{ или } P_4 \cup P_2, \text{ или } 2P_3, \text{ или } 3P_2.$$

Рассмотрим эти четыре ситуации по отдельности. Предположим, что четыре расстояния множества X_D удовлетворяют условию $D = d_1 > d_2 > d_3 > d_4$.

Ситуация I: $DG(X_D) = 3P_2$. Пусть $D = d(3, 6) = d(2, 5) = d(1, 4) = d_1$. Из леммы 5 следует, что $d(x, x+1) \leq d_3$ при любом $x \in X_D$. Если все грани выпуклого шеститочечного множества X_D имеют одинаковую длину, то шесть точек множества X_D лежат на окружности и X_D должно совпадать с R_6 , однако R_6 является множеством с тремя расстояниями. Следовательно, должны существовать две последовательные грани, которые имеют различные расстояния. Без ограничения общности, можно считать, что $d(1, 2) = d_3$ и $d(1, 6) = d_4$. Тогда в силу леммы 5 $d(2, 6) = d(1, 3) = d_2$.

Пусть $d(2, 3) = d_3$. Тогда в силу леммы 5 $d(2, 4) = d_2$, а также $d(3, 4) = d(1, 6) = d_4$, так как

$$\angle 324 = \angle 326 - \angle 426 = \angle 124 - \angle 624 = \angle 126.$$

Если $d(5, 6) = d_3$, то $d(1, 5) = d(4, 6) = d_2$ в силу леммы 5, точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, точки 2, 3, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом точки 1, 2, 3, 6 также лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) = d(1, 6) = d_4$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(5, 6) = d_4$; аналогично, $d(4, 5) = d_4$.

Ясно, что можно вывести неравенство $d(3, 5) \leq d(4, 6) = d_2$, так как $\angle 456 \geq \angle 345 > \pi/2$. Теперь видно, что

$$\angle 465 = \angle 265 - \angle 264 = \angle 461 - \angle 264 = \angle 261,$$

откуда следует, что $d_3 = d(1, 2) = d(4, 5) = d_4$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(2, 3) = d_4$. Далее, возможны два случая.

Случай 1: $d(5, 6) = d_4$. Здесь точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности и точки 2, 3, 5, 6 лежат на окружности. Если

$$d(3, 4) = d_3,$$

то $d(2, 4) = d(3, 5) = d_2$ и точки 1, 2, 3, 4 также лежат на окружности. Таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(3, 4) = d(1, 6) = d_4$ или $d_3 = d(3, 4) = d(5, 6) = d_4$, так как $d_3 \leq d(4, 6) \leq d_2$, а это противоречит условию.

Если

$$d(3, 4) = d_4,$$

то точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, и таким образом все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d(4, 5) = d_3$. В силу леммы 5 имеем $d(3, 5) = d(4, 6) = d_2$ и $d(2, 4) = d(1, 5) = d_3$. Также видно, что линейные отрезки $[1, 4]$, $[2, 5]$, $[3, 6]$ – это три диаметра окружности, так как четырехугольники 1346 и 2356 являются прямоугольниками. Только теперь мы получили одну выпуклую шеститочечную конфигурацию с четырьмя расстояниями, где $DG(X_D) = 3P_2$, т.е. множество $R_8 - 2$ (расстояние между двумя исключенными точками равно D), как показано на рис. 3, а).

Случай 2: $d(5, 6) = d_3$. Тогда в силу леммы 5 имеем $d(1, 5) = d(4, 6) = d_2$, точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности и точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d(4, 5) = d_4$, $d(3, 4) = d_3$ и $d(2, 4) = d(3, 5) = d_2$. И теперь мы получили другую выпуклую шеститочечную конфигурацию с четырьмя расстояниями, где $DG(X_D) = 3P_2$, т.е. $R_9 - 3$, как показано на рис. 3, б).

Ситуация II: $DG(X_D) = 2P_3$. Пусть

$$D = d(2, 6) = d(3, 6) = d(1, 5) = d(1, 4) = d_1.$$

В силу леммы 5 имеем $d(2, 3) = d(3, 4) = d(4, 5) = d_4$ и $d(2, 4) = d(3, 5) = d_3$, $d(2, 5) = d_2$, точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности, и $25 \parallel 34$.

Если $d(1, 3) = d_3$, то $d(1, 2) = d_4$, точки 1, 2, 3, 4 лежат на окружности, и таким образом можно считать, что точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, откуда следует, что $d_1 = d(1, 4) = d(2, 5) = d_2$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(1, 3) = d_2$, и аналогично, $d(4, 6) = d_2$.

Пусть теперь точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, $16 \parallel 34$, и $d(1, 2) = d(5, 6)$.

Если

$$d(1, 2) = d(5, 6) = d_4,$$

то

$$\frac{\pi}{2} < \angle 123 = \angle 126 + \angle 623 < \angle 436 + \angle 632 = \angle 234,$$

и таким образом, $d_2 = d(1, 3) < d(2, 4) = d_3$, а это противоречит условию.

Если

$$d(1, 2) = d(5, 6) = d_3,$$

то точки 1, 2, 3, 5 лежат на окружности, точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d(1, 6) = d_3$. Теперь мы получили выпуклую шеститочечную конфигурацию с четырьмя расстояниями, где $DG(X_D) = 2P_3$, т.е. $R_9 - 3$, как показано на рис. 3, с).

Ситуация III: $DG(X_D) = P_4 \cup P_2$. Пусть

$$D = d(1, 4) = d(3, 6) = d(2, 5) = d(2, 6) = d_1.$$

Из леммы 5 следует, что $d(x, x+1) \leq d_3$ при любом $x \in X_D$. Приведем два утверждения, а затем выделим два случая для доказательства.

Во-первых, если $d(2, 3) = d(5, 6) = d_3$, то

$$d(1, 5) = d(4, 6) = d(1, 3) = d(2, 4) = d_2$$

в силу леммы 5, и $d(3, 4) = d(4, 5)$, так как

$$\angle 324 = \angle 326 - \angle 426 = \angle 562 - \angle 462 = \angle 564,$$

и $d(1, 2) = d(1, 6)$, так как

$$\angle 231 = \angle 235 - \angle 135 = \angle 653 - \angle 153 = \angle 651.$$

Во-вторых, если $d(1, 2) = d(1, 6) = d_3$, то $d(1, 3) = d(1, 5) = d_2$ в силу леммы 5, и $d(2, 3) = d(5, 6)$, так как

$$\angle 213 = \angle 215 - \angle 315 = \angle 613 - \angle 513 = \angle 615.$$

Случай 1: $d(2, 3) = d_3$. Тогда из леммы 5 следует, что $d(2, 4) = d(1, 3) = d_2$.

Пусть $d(4, 5) = d_3$. Тогда $d(3, 5) = d(4, 6) = d_2$ в силу леммы 5, точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности и точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности. Если $d(1, 5) = d_2$, то точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) \neq d(1, 6) = d(4, 5) = d_3$, а это противоречит условию. Если $d(1, 5) = d_3$, то $d(1, 6) = d(5, 6) = d_4$ в силу леммы 5. Ясно, что $d(1, 2) = d_3$, так как иначе было бы $\angle 216 = \angle 165$, откуда следует, что $d_1 = d(2, 6) = d(1, 5) = d_3$, а это противоречит условию. Тогда точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) = d(5, 6) = d_4$, а это противоречит условию. Таким образом, $d(4, 5) = d_4$.

Пусть $d(5, 6) = d_3$. Тогда в силу леммы 5 имеем $d(1, 5) = d(4, 6) = d_2$. Из утверждения 1 получим, что $d(3, 4) = d(4, 5) = d_4$ и $d(1, 2) = d(1, 6)$. Если $d(1, 2) = d(1, 6) = d_4$, то $\angle 216 = \angle 345$, откуда следует, что $d_1 = d(2, 6) = d(3, 5) \leq d_2$, а это противоречит условию. Таким образом, $d(1, 2) = d(1, 6) = d_3$. Если $d(3, 5) = d_2$, то

$\angle 216 = \angle 123$, откуда следует, что $d_1 = d(2, 6) = d(1, 3) = d_2$, а это противоречит условию. Если $d(3, 5) = d_3$, то

$$\angle 215 = \angle 216 - \angle 516 = \angle 356 - \angle 156 = \angle 153,$$

откуда следует, что $d_1 = d(2, 5) = d(1, 3) = d_2$, а это противоречит условию. Таким образом, $d(5, 6) = d_4$.

Пусть $d(1, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 5) = d_2$ в силу леммы 5, и $d(1, 2) = d_4$ по утверждению 2, и точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности. Если $d(3, 5) = d_2$, то $\angle 123 \geq \angle 216 > \pi/2$, откуда следует, что $d_1 = d(2, 6) \leq d(1, 3) = d_2$, а это противоречит условию. Если $d(3, 5) = d_3$, и таким образом $d(3, 4) = d_4$ в силу леммы 5, то $\angle 456 > \angle 345 > \pi/2$, откуда следует, что $d(4, 6) = d_2$, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 3, 4 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) = d(5, 6) = d_4$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(1, 6) = d_4$.

Пусть $d(3, 4) = d_3$. Тогда $d(3, 5) = d_2$ в силу леммы 5. Ясно, что $\angle 456 > \angle 561 > \pi/2$, откуда следует, что $d_2 = d(4, 6) > d(1, 5) = d_3$, и точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности. Если $d(1, 2) = d_4$, то $\angle 216 = \angle 561$, откуда следует, что $d_1 = d(2, 6) = d(1, 5) = d_3$, а это противоречит условию. Если $d(1, 2) = d_3$, то точки 1, 2, 3, 4 лежат на окружности, и таким образом, точки 1, 2, 4, 6 лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(1, 2) = d(4, 6) = d_2$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(3, 4) = d_4$.

Аналогично, получим $\angle 456 > \angle 345 > \pi/2$ и $\angle 456 > \angle 561 > \pi/2$, откуда следует, что $d_2 = d(4, 6) > d(3, 5) = d(1, 5) = d_3$, и точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности. Если $d(1, 2) = d_4$, то точки 1, 2, 3, 4 лежат на окружности, точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) = d(5, 6) = d_4$, а это противоречит условию. Если $d(1, 2) = d_3$, то

$$\angle 612 = \angle 615 + \angle 512 = \angle 435 + \angle 532 = \angle 432,$$

откуда следует, что $d_2 = d(2, 4) = d(2, 6) = d_1$, а это противоречит условию.

Случай 2: $d(2, 3) = d_4$. Из утверждения в случае 1 следует, что $d(5, 6) = d_4$. Тогда точки 2, 3, 5, 6 лежат на окружности.

Подслучай 2.1: $d(3, 4) = d_4$ и $d(4, 5) = d_3$ (если $d(3, 4) = d_3$ и $d(4, 5) = d_4$, то доказательство аналогично в силу симметрии). В этом подслучае $d(3, 5) = d(4, 6) = d_2$ в силу леммы 5, и точки 3, 4, 5, 6 лежат на окружности. Если $d(2, 4) = d_2$, то $\angle 456 > \angle 345 > \pi/2$, откуда следует, что $d_2 = d(4, 6) \neq d(3, 5) = d_2$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(2, 4) = d_3$. Если $d(1, 2) = d_4$, то $\angle 234 > \angle 123 > \pi/2$, откуда следует, что $d_3 = d(2, 4) > d(1, 3) \geq d_3$, а это противоречит условию. Следовательно, $d(1, 2) = d_3$, и аналогично, $d(1, 6) = d_3$. Таким образом, $d(1, 5) = d(1, 3) = d_2$. Тогда точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, и следовательно все точки множества X_D лежат на окружности. Мы получили выпуклую шеститочечную конфигурацию с четырьмя расстояниями, где $DG(X_D) = P_4 \cup P_2$, т.е. множество $R_9 - 3$, как показано на рис. 3, d).

Подслучай 2.2: $d(3, 4) = d(4, 5) = d_3$. В этом случае в силу леммы 5 $d(3, 5) = d(2, 4) = d(4, 6) = d_2$. Если $d(1, 6) = d_3$, то $d(1, 5) = d_2$, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 1, 4, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(3, 4) = d(5, 6) = d_4$,

а это противоречит условию. Следовательно, $d(1, 6) = d_4$, и аналогично, $d(1, 2) = d_4$. Ясно, что $d(1, 3) = d(1, 5) = d_3$, так как иначе было бы $d(1, 3) = d(1, 5) = d_2$ и $\angle 123 = \angle 216$, откуда следует, что $d_2 = d(1, 3) = d(2, 6) = d_1$, а это противоречит условию. Тогда

$$\angle 234 = \angle 231 + \angle 134 > \angle 213 + \angle 315 = \angle 215,$$

откуда следует, что $d_2 = d(2, 4) > d(2, 5) = d_1$, а это также противоречит условию.

Подслучай 2.3: $d(3, 4) = d(4, 5) = d_4$. Если $d(1, 2) = d(1, 6) = d_4$, то $\angle 234 > \angle 216 > \pi/2$, откуда следует, что $d_2 \geq d(2, 4) > d(2, 6) = d_1$, а это противоречит условию. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $d(1, 6) = d_3$, и таким образом $d(1, 5) = d_2$ в силу леммы 5.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d_4$. Тогда точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности.

Если $d(2, 4) = d_3$, то точки 1, 2, 4, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_2 = d(1, 5) = d(2, 6) = d_1$, а это противоречит условию.

Если $d(2, 4) = d_2$, то можно вывести равенства $d(4, 6) = d_2$ и $d(3, 5) = d(1, 3) = d_3$, и таким образом,

$$\angle 326 = \angle 325 + \angle 526 = \angle 126 + \angle 526 = \angle 125,$$

откуда следует, что $d_2 = d(1, 5) = d(3, 6) = d_1$, а это противоречит условию.

Затем рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d_2$ в силу леммы 5. Если $d(3, 5) = d_3$, то

$$\frac{\pi}{2} < \angle 235 = \angle 236 + \angle 536 < \angle 265 + \angle 162 = \angle 165,$$

откуда следует, что $d_2 = d(1, 5) > d(2, 5) = d_1$, а это противоречит условию. Если $d(3, 5) = d_2$, то ясно, что $d(2, 4) = d(4, 6) = d_3$ и

$$\angle 245 = \angle 246 + \angle 546 = \angle 465 + \angle 164 = \angle 165,$$

откуда следует, что $d_2 = d(1, 5) = d(2, 5) = d_1$, а это противоречит условию.

Ситуация IV: $DG(X_D) = P_6$. Пусть

$$D = d(1, 4) = d(2, 4) = d(2, 5) = d(3, 5) = d(3, 6) = d_1.$$

Из леммы 5 следует, что $d(3, 4) \leq d_2$ и $d(x, x+1) \leq d_3$ при любом $x \in X_D \setminus \{3\}$. В дальнейшем мы приведем три рассуждения и выделим два случая для доказательства.

Рассуждение 1: Пусть $d(1, 6) = d_3$. Тогда в силу леммы 5 $d(1, 5) = d(2, 6) = d_2$. Если $d(1, 2) = d(5, 6)$, то

$$\angle 415 = \angle 512 - \angle 412 = \angle 265 - \angle 365 = \angle 263,$$

откуда следует, что $d(2, 3) = d(4, 5)$. Если $d(2, 3) = d(4, 5)$, то

$$\angle 536 = \angle 532 - \angle 236 = \angle 245 - \angle 541 = \angle 142,$$

откуда следует, что $d(1, 2) = d(5, 6)$.

Рассуждение 2: (1) Пусть $d(1, 2) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 5) = d(2, 6) = d_2$ в силу леммы 5, и

$$\angle 425 = \angle 421 - \angle 521 = \angle 356 - \angle 256 = \angle 352,$$

откуда следует, что $d(2, 3) = d(4, 5)$.

(2) Пусть $d(2, 3) = d(4, 5) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(4, 6) = d_2$ в силу леммы 5, и

$$\angle 231 = \angle 234 - \angle 134 = \angle 543 - \angle 643 = \angle 546,$$

откуда следует, что $d(1, 2) = d(5, 6)$.

Рассуждение 3: (1) Пусть $d(1, 2) = d(1, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 5) = d(1, 3) = d(2, 6) = d_2$ в силу леммы 5, и

$$\angle 516 = \angle 316 - \angle 315 = \angle 512 - \angle 315 = \angle 312,$$

откуда следует, что $d(2, 3) = d(5, 6)$, и следовательно $d(3, 4) \neq d(4, 5)$. Ясно, что $d(2, 3) = d(5, 6) = d_4$, так как иначе было бы $d_2 = d(1, 5) = d(3, 4) \leq d_3$.

(2) Пусть $d(2, 3) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d(4, 6) = d(1, 5) = d(1, 3) = d_2$ в силу леммы 5 и

$$\angle 231 = \angle 235 - \angle 135 = \angle 653 - \angle 153 = \angle 651,$$

откуда следует, что $d(1, 2) = d(1, 6)$, и следовательно $d(3, 4) \neq d(4, 5)$. Ясно, что $d(1, 2) = d(1, 6) = d_4$, так как иначе было бы $d_2 = d(1, 5) = d(3, 4) \leq d_3$.

Случай 1: $d(3, 4) = d_2$. Если все другие грани множества X_D имеют одинаковую длину d_4 , то все точки множества X_D лежат на окружности, а это невозможно. Следовательно, существует по крайней мере одна грань длины d_3 . Если же множество X_D имеет по крайней мере три грани длины d_3 , то легко видеть, что это противоречит предыдущим трем утверждениям. Следовательно, X_D имеет не более, чем две грани длины d_3 .

Подслучай 1.1: Пусть X_D имеет одну грань длины d_3 . В силу симметрии достаточно рассмотреть три типичных случая.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(1, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 5) = d(2, 6) = d_2$ в силу леммы 5 точки 2, 3, 5, 6 лежат на окружности, точки 2, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d(1, 3) = d(4, 6) = d_3$, и мы получили выпуклую шеститочечную конфигурацию с четырьмя расстояниями, где $DG(X_D) = P_6$, т.е. множество $R_9 - 3$, как показано на рис. 3, е).

Затем рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(2, 6) = d_2$ в силу леммы 5, точки 2, 3, 4, 5, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(1, 2) = d(4, 5) = d_4$, а это противоречит условию.

Наконец, рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d_2$ в силу леммы 5, и легко видеть, что также $d(2, 6) = d_2$, точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, точки 2, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 1, 4, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) = d(5, 6) = d_4$, а это противоречит условию.

Подслучай 1.2: Пусть X_D имеет две грани длины d_3 . Из рассуждения 1 следует, что $d(1, 6) \neq d_3$. В силу симметрии достаточно рассмотреть четыре типичных случая.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d(1, 2) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(2, 6) = d(1, 5) = d_2$ в силу леммы 5, точки 1, 4, 5, 6 лежат на окружности, точки 2, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 1, 3, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(4, 5) = d(1, 2) = d_3$, а это противоречит условию.

Затем рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(4, 6) = d(1, 5) = d_2$ в силу леммы 5, точки 1, 4, 5, 6 лежат на окружности, точки 2, 3, 5, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(4, 5) = d(2, 3) = d_3$, а это противоречит условию.

Далее рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d(4, 5) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(4, 6) = d_2$ в силу леммы 5, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, и точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности. Если $d(2, 6) = d_2$, то точки 2, 3, 4, 6 лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(5, 6) = d(2, 3) = d_3$, что противоречит условию. Следовательно, $d(2, 6) = d_3$, и аналогично, $d(1, 5) = d_3$. Пусть x – точка пересечения двух отрезков $[2, 4]$ и $[3, 6]$, y – точка пересечения двух отрезков $[2, 4]$ и $[3, 5]$. Ясно, что $d(3, x) = d(6, x) = d_1/2$, $d(3, y) < d_1/2$, $\angle 3xy = \pi/2$, но тогда $d(3, x) > d(3, y)$ в прямоугольном треугольнике $\triangle 3xy$, а это противоречит условию.

Наконец, рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(2, 6) = d(4, 6) = d(1, 5) = d_2$ в силу леммы 5, точки 2, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности, точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(4, 5) = d(1, 2) = d_3$, а это противоречит условию.

Случай 2: $d(3, 4) \leq d_3$. Из трех вышеперечисленных утверждений следует, что множество X_D имеет самое большее три грани длины d_3 . Если множество X_D имеет пять граней длины d_4 , то все точки множества X_D лежат на окружности, а это невозможно. Следовательно, X_D имеет по крайней мере две грани длины d_3 .

Подслучай 2.1: Пусть X_D имеет две грани длины d_3 . Рассмотрим по отдельности две возможности.

(1) Пусть $d(3, 4) = d_3$. В силу симметрии достаточно рассмотреть три типичных случая.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(1, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 5) = d(2, 6) = d_2$ в силу леммы 5, и получим $d_2 = d(2, 6) = d(3, 4) = d_3$, а это противоречит условию.

Затем рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d_3$. Тогда аналогично $d_2 = d(2, 6) = d(1, 3)$ в силу леммы 5, и получим $d_2 = d(2, 6) = d(3, 4) = d_3$, а это противоречит условию.

Наконец, рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d_2$ в силу леммы 5. Ясно, что $d(2, 6) = d_3$. Как мы уже видели, $\pi/2 < \angle 456 < \angle 165$, откуда следует, что $d(4, 6) = d_3$ и $d(1, 5) = d_2$. Теперь имеем $\angle 326 = \angle 462$ для квадрата 2346, $\angle 126 = \angle 162$ при $d(1, 2) = d(1, 6) = d_4$, и таким образом $\angle 123 = \angle 164$, откуда следует, что $d_2 = d(1, 3) = d(1, 4) = d_1$, а это противоречит условию.

(2) Пусть $d(3, 4) = d_4$. В силу утверждения 1 получим неравенство $d(1, 6) \neq d_3$. В силу симметрии достаточно рассмотреть четыре типичных случая.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d(2, 3) = d_3$. Тогда получим $d_2 = d(2, 6) = d(3, 4) = d_4$ в силу леммы 5, а это противоречит условию.

Затем рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d(1, 3) = d(1, 5) = d(4, 6) = d_2$ в силу леммы 5, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, точки 2, 3, 5, 6

лежат на окружности, точки 1, 4, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(4, 5) = d(2, 3) = d_3$, а это противоречит условию.

Далее рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d(4, 5) = d_3$. Тогда $\angle 123 \geq \angle 234 > \pi/2$, откуда следует, что $d_1 = d(2, 4) \leq d(1, 3) \leq d_2$, а это противоречит условию. Наконец, предположим, что $d(1, 2) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d_2 = d(2, 6) = d(1, 3) = d(1, 5) = d(4, 6)$ в силу леммы 5, точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, точки 1, 4, 5, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(4, 5) = d(1, 2) = d_3$, а это невозможно.

Подслучай 2.2: Пусть X_D имеет три грани длины d_3 .

Если $d(3, 4) = d_4$, то из предыдущих трех рассуждений следует, что нам нужно рассмотреть случай $d(1, 6) = d(2, 3) = d(4, 5) = d_3$. В этом случае $d_2 = d(2, 6) = d(1, 3) = d(1, 5) = d(4, 6)$ в силу леммы 5, точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(1, 2) = d(4, 5) = d_3$, а это невозможно. Следовательно, можно заключить, что $d(3, 4) = d_3$. Из рассуждения 1 следует, что $d(1, 6) \neq d_3$. В силу симметрии достаточно рассмотреть четыре типичных случая.

Сначала рассмотрим случай, когда $d(4, 5) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d_2 = d(1, 5) = d(4, 6)$ в силу леммы 5 и $d_2 = d(1, 5) = d(3, 4) = d_3$, а это противоречит условию.

Затем рассмотрим случай, когда $d(2, 3) = d(4, 5) = d_3$. Тогда $d_2 = d(1, 3) = d(4, 6)$ в силу леммы 5, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, и точки 2, 3, 4, 5 лежат на окружности. Если $d(2, 6) = d_3$, то точки 2, 3, 4, 6 лежат на окружности, и таким образом, точки 2, 3, 5, 6 лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(2, 3) = d(5, 6) = d_4$, а это противоречит условию. Если $d(2, 6) = d_2$, то

$$\angle 162 = \angle 164 - \angle 264 = \angle 265 - \angle 264 = \angle 465,$$

откуда следует, что $d_4 = d(1, 2) = d(4, 5) = d_3$, а это противоречит условию.

Далее, рассмотрим случай, когда $d(4, 5) = d(1, 2) = d_3$. Тогда $d_2 = d(2, 6) = d(1, 3) = d(4, 6)$ в силу леммы 5, точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 4, 5 лежат на окружности, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_4 = d(2, 3) = d(4, 5) = d_3$, а это противоречит условию.

Наконец, рассмотрим случай, когда $d(1, 2) = d(5, 6) = d_3$. Тогда $d_2 = d(2, 6) = d(1, 3) = d(1, 5) = d(4, 6)$ в силу леммы 5, точки 1, 2, 3, 6 лежат на окружности, точки 1, 2, 5, 6 лежат на окружности, точки 1, 3, 4, 6 лежат на окружности, и таким образом, все точки множества X_D лежат на окружности, откуда следует, что $d_3 = d(1, 2) = d(4, 5) = d_4$.

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА 8. *На плоскости, с точностью до изоморфизма, имеется только 42 семиточечных множества с четырьмя расстояниями, как показано на рис. 4.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – семиточечное множество с четырьмя расстояниями. Если $m = |X_D| = 7$, то из леммы 1, iv) следует, что $X = R_9 - 2$, как показано

на рис. 4(701, 702, 703). Теперь предположим, что $m = |X_D| \leq 6$. Пусть $DG(X_D)$ – диаметральный граф множества X_D .

Ситуация I: $m = 6$. Пусть $X_D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и точки $1, 2, 3, 4, 5, 6$ занумерованы последовательно против часовой стрелки. Если X_D – множество с тремя расстояниями, то из леммы 1 следует, что $X_D = R_6$ или $R_7 - 1$ или совпадает с множеством, подобным множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, представленному на рис. 1. Легко проверить, что существуют следующие способы добавления точки к множеству X_D так, чтобы новая точка создавала новое расстояние и не создавала расстояние D : добавить центр множества R_7 и, следовательно, получить семиточечное множество с четырьмя расстояниями $X = R_7^+ - 1$, как показано на рис. 4(704), или добавить новую точку к множеству $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ на рис. 1 и, следовательно, получить семиточечное подмножество с четырьмя расстояниями X (см. рис. 1), как показано на рис. 4(705). В дальнейшем, предположим, что X_D – это множество с четырьмя расстояниями. Если существует вершина, скажем, i , такая, что $d(i, i+1) = D$, то известно, что X содержит подмножество $E_5(k)$, $k \leq 3$, которое можно получить, убрав две точки i и $i+1$ из множества X_D с удаленным диаметром D , так как два отрезка длины D в X должны пересекаться, если только они не имеют общей концевой точки. Этот случай рассматривается в ситуации II. Теперь нам нужно рассмотреть случай $d(i, i+1) \neq D$.

Случай 1: Существует точка $i \in X_D$ такая, что $d(i) = 3$. Без потери общности можно считать, что $d(1, 3) = d(1, 4) = d(1, 5) = D$.

Пусть $d(3, 5) = D$, тогда ясно, что $d(2, 5) = d(3, 6) = D$. Если $4 \in \perp_{35}$, то $2 \in \perp_{13}$, $6 \in \perp_{15}$, и множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ является множеством с тремя расстояниями, как показано на рис. 1. Если $4 \notin \perp_{35}$, то точку 4 можно переместить, так чтобы

$$\angle 314 = \angle 536 = \angle 152 = \arccos\left(\frac{13}{14}\right), \quad \angle 216 = \angle 456 = \angle 234 = 90^\circ,$$

и точка 7 была бы центральной точкой отрезка $[2, 4]$. Тогда получим семиточечное множество с четырьмя различными расстояниями $1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{7}$, как показано на рис. 4(706). Это будет подмножество множества

$$L_\Delta = \{a(1, 0) + b(1/2, \sqrt{3}/2) : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Теперь предположим, что $d(3, 5) \neq D$.

Пусть $d(2, 6) = d(2, 5) = d(3, 6) = D$. Тогда в силу леммы 6, $\{1, 3, 6, 2, 5\}$ равно R_5 или одному из двух конфигураций с четырьмя расстояниями, показанных на рис. 2. Ясно, что $R_5 \cup \{4\}$ с $4 \in \perp_{35}$ является шеститочечным множеством с четырьмя расстояниями, как показано на рис. 5, а), но невозможно добавить новую точку к множеству X_D , так чтобы не возникло новое расстояние. Также невозможно добавить новую точку к множеству на рис. 2, так чтобы не возникло новое расстояние.

Пусть $d(2, 6) \neq D$ и $d(2, 5) = d(3, 6) = D$, как показано на рис. 5, б). Ясно, что пятиточечное множество $\{1, 3, 6, 2, 5\}$ не равно R_5 , и оно определяет по крайней мере три расстояния, так что X_D определяет по крайней мере пять расстояний в силу леммы 5.

Пусть $d(3, 6) \neq D$ и $d(2, 5) = d(2, 6) = D$, как показано на рис. 5, в) (в случае $d(2, 5) \neq D$ и $d(2, 6) = d(3, 6) = D$, конфигурация подобна). Множество X содержит подмножество $E_5(k)$ ($k \leq 3$), которое можно получить, убрав две точки 1 и 2 из

Рис. 4. Сорок два семиточечных множества с четырьмя расстояниями на плоскости с точностью до изоморфизма

Рис. 5

множества X_D с удаленным диаметром D , так как два отрезка длины D в X должны пересекаться, если только они не имеют общей концевой точки. Этот случай рассматривается в ситуации II.

Случай 2: Для любой точки $i \in X_D$ имеем $d(i) \leq 2$. Из леммы 7 следует, что $X_D = R_9 - 3$ или $R_8 - 2$, как показано на рис. 3. Напомним, что при $|X_D| = 6$, можно получить два других семиточечных множества с четырьмя расстояниями $X = R_8 - 1$, $R_9 - 2$ как показано на рис. 4 (707, 708).

Ситуация II: $m \leq 5$. Если $m = 5$ и $DG(X_D) = C_5$, то из леммы 6 следует, что X_D равно R_5 или одной из двух конфигураций с четырьмя расстояниями, как показано на рис. 2, но добавление каких-либо двух точек к конфигурациям, представленным на рис. 2 не приводит к появлению новых множеств с четырьмя расстояниями. Если $DG(X_D) \neq C_5$, то из леммы 4 следует, что $\alpha(DG(X_D)) \geq 3$ и множество X содержит подмножество $Y \in \bigcup_{k \leq 3} E_5(k)$, которое можно получить, убрав две точки из множества X_D с удаленным диаметром D .

Если $m \leq 4$, то $7 - \lceil m/2 \rceil \geq 5$, и в силу леммы 3 множество X содержит подмножество $Y \in \bigcup_{k \leq 3} E_5(k)$. Напомним, что $E_5(2) = \{R_5\}$ и $E_5(3)$ имеет тридцать четыре неподобных конфигурации, как показано на рис. 2 в работе [2]. Пусть Y – одно из пятиточечных множеств с тремя расстояниями таких, что $A(Y) = \{1, \alpha, \beta\}$. Если $O_p(Y) = \{q \in Y \mid d(p, q) \in A(Y)\}$ для новой точки p , то $X = Y \cup \{p\}$ является множеством с четырьмя расстояниями, таким что $A(X) = \{1, \alpha, \beta, \gamma\}$, тогда и только тогда, когда $Y \neq O_p(Y)$ и $d(p, q) = \gamma$ при любом $q \in Y \setminus O_p(Y)$. Для любого множества с тремя расстояниями, мы здесь перечислим возможные шеститочечные множества с четырьмя расстояниями. Аналогично доказательству теоремы 1.2 (а) в работе [3], методом перебора, с точностью до изоморфизма, можно получить другие тридцать четыре семиточечных множества с четырьмя расстояниями на плоскости, как показано на рис. 4 (709–742). Как мы уже видели, девять множеств на рис. 4 (705, 709–716) являются подмножествами девятиточечного множества с четырьмя расстояниями, представленными на рис. 1; двадцать множеств на рис. 4 (706, 721–739) являются подмножествами множества

$$L_{\Delta} = \{a(1, 0) + b(1/2, \sqrt{3}/2) : a, b \in \mathbb{Z}\};$$

два множества на рис. 4 (717–718) являются подмножествами восьмиточечного множества с четырьмя расстояниями, как показано на рис. 1 (е) в работе [3]; два множества, представленных на рис. 4 (719–720), которые получены добавлением двух точек к R_5 , являются подмножествами десятиточечного множества с пятью расстояниями, которое получено удвоением множества R_5 с той же самой центральной

точкой; множество на рис. 4(740) имеет расстояния $1 : \sqrt{2} : 2 : \sqrt{5}$; множество на рис. 4(741) имеет расстояния $1 : \sqrt{2 + \sqrt{3}} : \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} : \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$; и множество на рис. 4(742) имеет расстояния $1 : \sqrt{2} : \sqrt{2 + \sqrt{3}} : \sqrt{4 + \sqrt{3}}$.

Из рис. 4 следует, что существуют только пять максимальных (т.е. не содержащихся в других множествах с четырьмя расстояниями) семиточечных множеств с четырьмя расстояниями. Эти множества показаны на рис. 4(719, 720, 740, 741 и 742).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, P. Fishburn, “Maximum planar sets that determine k distances”, *Discrete Math.*, **160**:1-3 (1996), 115–125.
- [2] M. Shinohara, “Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space”, *European J. Combin.*, **25**:7 (2004), 1039–1058.
- [3] M. Shinohara, “Uniqueness of maximum planar five-distance sets”, *Discrete Math.*, **308**:14 (2008), 3048–3055.
- [4] P. Erdős, P. Fishburn, “Convex nonagons with five intervertex distances”, *Geom. Dedicata*, **60**:3 (1996), 317–332.
- [5] P. Fishburn, “Convex polygons with few intervertex distances”, *Comput. Geom.*, **5**:2 (1995), 65–93.
- [6] Xianglin Wei, “Classification of eleven-point five-distance sets in the plane”, *Ars Combin.*, **102** (2011), 505–515.

Венхуа Лан

Hebei Normal University, Китай

E-mail: lanwenhua2006@126.com

Поступило

04.03.2011

Исправленный вариант

30.08.2012

Хианлин Вей

Hebei University of Science and Technology, Китай

E-mail: wxlhebttu@126.com