Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. К. Кусаинова, А. Ж. Монашова, А. А. Шкаликов,
Асимптотика собственных значений несамосопряженного
дифференциального оператора второго порядка на
оси, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 4, 630–633

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 16:07:40

Асимптотика собственных значений несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на оси

Л. К. Кусаинова, А. Ж. Монашова, А. А. Шкаликов

В работе изучается оператор, порожденный в пространстве $H = L_2(\mathbb{R})$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + p(x)y' + q(x)y, \quad x \in \mathbb{R},$$

где p и q – комплекснозначные непрерывные функции. Представим $q(x)$ как

$$q(x) = q_0(x) + iq_1(x),$$

где $q_0(x) = \operatorname{Re} q(x)$, $q_1(x) = \operatorname{Im} q(x)$, и далее будем полагать выполненными следующие условия:

- (i) $\inf_{x \in \mathbb{R}} q_0(x) = c > -\infty$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_x^{x+a} q_0(t) dt = \infty$ при любых $a > 0$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{q_1(x)}{q_0(x) - c + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{\sqrt{q_0(x) - c + 1}} = 0$.

Обозначим через L_0 дифференциальный оператор в $H = L_2(\mathbb{R})$, определенный дифференциальным выражением

$$l_0(y) = -y'' + q_0(x)y, \quad x \in \mathbb{R},$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(L_0) = \{y \in H : y \in W_{2,\text{loc}}^2, l_0(y) \in H\}.$$

Здесь $W_{2,\text{loc}}^2$ – пространство всех функций f таких, что $f \in W_2^2(\Delta)$ на любом отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$, $W_2^2(\Delta)$ – пространство Соболева. Оператор L_0 определен на этой области корректно и является полуограниченным. Более того, из теоремы Левинсона [1; VII, § 23.6] следует, что L_0 является самосопряженным оператором, а из условий (i), (ii) и теоремы Молчанова [1; VII, § 24.5] следует, что L_0 имеет дискретный спектр.

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что $c > 0$ в условии (i) (в противном случае сделаем замену спектрального параметра). Тогда L_0 равномерно положителен и порождает шкалу компактно вложенных $(H_\alpha \hookrightarrow H_\beta \text{ при } \alpha > \beta)$ гильбертовых пространств H_θ , $-\infty < \theta < +\infty$. По определению $H_0 = H$; при $\theta > 0$ полагаем $H_\theta = \mathcal{D}(L_0^{\theta/2})$ (область определения $L_0^{\theta/2}$) с нормой $\|y\|_\theta = \|L_0^{\theta/2}y\|_0$, где $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_H$. При $\theta < 0$ пространство H_θ определяем как замыкание H по норме $\|y\|_\theta = \|L_0^\theta y\|_0$. Непосредственно из определения пространств H_θ следует, что L_0 изоморфно переводит пространство $H_{\theta+2}$ в H_θ . Более того, оператор L_0 , рассматриваемый как оператор в H_θ с областью определения $\mathcal{D}(L_0) = H_{\theta+2}$, является самосопряженным и во всех пространствах H_θ имеет один и тот же (дискретный) спектр (см. [2], [3]). В частности, L_0 с областью определения

Работа первого автора выполнена при поддержке МОН РК по направлению “Фундаментальные исследования в области естественных наук”. Работа третьего автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00423).

DOI: 10.4213/mzm10173

$\mathcal{D}(L_0) = H_{-1}$ является самосопряженным оператором в пространстве H_{-1} , являющимся двойственным к H_1 . Норма в H_1 определяется как замыкание квадратичной формы $(L_0 u, u)$ и задается равенством

$$\|y\|_1^2 = \|L_0^{1/2} y\|^2 = (y', y') + (q_0 y, y) = \|y'\|_0^2 + \|q_0^{1/2} y\|_0^2.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (i)–(iii). Тогда

- оператор L_1 , определенный равенством $L_1 u = p(x)u' + i q_1(x)u$, корректно определен на $D(L_0) = H_1$ и действует, как компактный оператор из H_1 в H_{-1} ;
- оператор $L = L_0 + L_1$ корректно определен в пространстве H_{-1} (с областью определения $\mathcal{D}(L) = H_1$) и имеет дискретный спектр; при любом $\varepsilon > 0$ этот спектр асимптотически (т.е. за исключением конечного числа собственных значений) лежит в угле $|\arg \lambda| < \varepsilon$; сужение этого оператора на пространство $H = L_2(\mathbb{R})$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(L) = \{y \in H_1 : y \in W_{2,\text{loc}}^2, l(y) \in L_2(\mathbb{R})\};$$

при этом спектры оператора L в пространствах H_{-1} и в H совпадают.

Доказательство теоремы 1 получается на следующем пути. Из компактности оператора L_0^{-1} в пространстве H (а потому во всех пространствах H_θ , $\theta \in \mathbb{R}$) следует компактность вложения $H_1 \hookrightarrow H_{-1}$. Поэтому утверждение а) теоремы эквивалентно оценке

$$\|L_1 y\|_{-1} \leq \varepsilon \|y\|_1 + M \|y\|_{-1},$$

справедливость которой нужно установить при любом $\varepsilon > 0$ с постоянной $M = M(\varepsilon)$. Доказательство этой оценки проводится с помощью условия (iii) и равенства

$$\|L_1 y\|_{-1} = \sup_{\|f\|_1=1} |(L_1 y, f)| = \sup_{\|f\|_1=1} \left(\int_{|x|>a} + \int_{|x|<a} \right) L_1 y(x) \overline{f(x)} dx,$$

где $a = a(\varepsilon)$ – достаточно большое число. Каждый из интегралов в правой части этого равенства оценивается отдельно.

Для доказательства утверждения б) заметим, что утверждение а) теоремы 1 равносильно следующему: оператор L_1 является L_0 -компактным в пространстве H_{-1} , т.е. произведение $L_1 L_0^{-1}$ является компактным оператором в H_{-1} . Тогда дискретность спектра оператора L в пространстве H_{-1} и его асимптотическая локализация в произвольно малых секторах $|\arg \lambda| < \varepsilon$ следует из теоремы Келдыша о компактных возмущениях (см. [4; гл. 5, § 11]). Далее, воспользуемся равенством

$$L = L_0^{1/2} (1 + S) L_0^{1/2}, \quad S = L_0^{-1/2} L_1 L_0^{-1/2}. \quad (1)$$

Можно считать, что оператор L обратим в пространстве H_{-1} , в противном случае нужно сделать сдвиг спектра. Тогда оператор $1 + S$ обратим в H , причем из утверждения а) следует, что S компактный в H . Таким образом, из (1) получаем, что L^{-1} компактный в H , а потому L имеет дискретный спектр. Доказательство совпадения дискретных спектров оператора L в пространствах H и H_{-1} имеется в работе [3].

На интервале $(c, +\infty)$ (здесь c – число, фигурирующее в условии (i)) определим функцию

$$M(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda \geq q_0(x)} \sqrt{\lambda - q_0(x)} dx. \quad (2)$$

Эта функция участвует в формулах Карлемана–Тичмарша, устанавливающих асимптотику собственных значений самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка (см. [5]). Очевидно, $M(\cdot)$ монотонно строго возрастает на интервале (c, ∞) . Поэтому корректно определена обратная к ней функция, которую обозначим через $F(\cdot)$. Через $\{\lambda_n(L_0)\}$ и $\{\lambda_n(L)\}$ обозначим собственные значения операторов L_0 и L соответственно. Их нумерацию проводим в порядке возрастания модулей и с учетом алгебраической кратности. Далее пишем $\alpha_n \sim \beta_n$ в случае, если справедливо соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n^{-1} = 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть найдется число $x_0 \in \mathbb{R}$ такое, что функция $q_0(\cdot)$ монотонно убывает на интервале $(-\infty, -x_0)$ и монотонно возрастает на $(x_0, +\infty)$. Пусть выполнены равенство $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q_0(x) = +\infty$ и условие (iii). Тогда для оператора $L = L_0 + L_1$ справедливы соотношения

$$\lambda_n(L) \sim \lambda_n(L_0) \sim F(n).$$

Сформулируем также аналог теоремы 2 для более сложного случая, когда функция $q_0(\cdot)$ не является асимптотически монотонной. В этом случае введем функцию Отелбаева [6]

$$q_0^*(x) = \inf_{d>0} \left\{ d^{-2} : d \int_{x-d/2}^{x+d/2} q_0(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Из определения следует $q_0^*(x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а условие (ii) оказывается эквивалентным условию $q_0^*(x) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ (см. [6; I.3]).

Функцию $q_0(\cdot)$ назовем *K-регулярной*, если существует непрерывная функция $K: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ такая, что $\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x) = \infty$ и

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (q(t) - q^*(t)) dt \right| \leq K^{-1}(x) [q_0^*(x)]^{1/2}$$

для всех α, β из интервала

$$(x - K(x)[q_0^*(x)]^{-1/2}, x + K(x)[q_0^*(x)]^{-1/2}).$$

Пусть $M^*(\cdot)$ – функция, определенная посредством равенства (2) с заменой q_0 на q_0^* и постоянной c на $c^* = \inf_{\mathbb{R}} q_0^*$. Пусть $F^*(\cdot)$ – обратная к $M^*(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (i)–(iii), и пусть функция $q_0(\cdot)$ является *K-регулярной*. Тогда

$$\lambda_n(L) \sim \lambda_n(L_0) \sim F^*(n).$$

Доказательства теорем 2 и 3 получаются с помощью выше приведенной теоремы 1 и асимптотических формул

$$\lambda_n(L_0) \sim F(n) \quad \text{и} \quad \lambda_n(L_0) \sim F^*(n),$$

полученных Отелбаевым [6; теорема 1.3.1 и теорема 1.7.1] для монотонной и немонотонной функции q_0 соответственно. Используется также теорема Крейна [4; гл. V, теорема 11.3] и соотношение (1), в котором оператор S компактен в пространстве H .

Задача об эквивалентности считающих функций собственных значений

$$n(L_0, \lambda) = \sum_{\lambda_n(L_0) < \lambda} 1, \quad n(L, \lambda) = \sum_{|\lambda_n(L)| < \lambda} 1,$$

является более сложной. Для доказательства эквивалентности этих функций при $\lambda \rightarrow \infty$ необходимо требовать дополнительные условия на регулярность поведения функции $q_0(\cdot)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ (типа Карлемана–Тичмарша) и тауберовы условия на функцию $M(\cdot)$ (типа Карлемана–Келдыша). При выполнении таких дополнительных условий (см. детали в [5] и [6]) с помощью выше приведенной теоремы 1 и теоремы Келдыша (см. [1; гл. V, § 11]) можно получить соотношения

$$n(L, \lambda) \sim n(L_0, \lambda) \sim M(\lambda).$$

Здесь мы не будем формулировать соответствующие дополнительные условия на регулярность функции $q_0(\cdot)$ и тауберовы условия на функцию $M(\cdot)$. Но приведем один результат, позволяющий оценить считающие функции $n(L_0, \lambda)$ и $n(L, \lambda)$ при выполнении простых условий на потенциал q_0 .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $q_0(x)$ асимптотически монотонна при $|x| \rightarrow \infty$ и подчинена оценкам

$$c_1|x|^\alpha \leq q_0(x) \leq c_2|x|^\beta \quad \text{при} \quad |x| > x_0, \quad (3)$$

где $c_1, c_2, \alpha, \beta > 0$ ($\alpha \leq \beta$), а x_0 – достаточно большое число. Обозначим

$$a(\alpha) := \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - \xi^\alpha} d\xi = \frac{1}{\alpha\pi} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{2\alpha\sqrt{\pi}\Gamma(1/\alpha + 3/2)},$$

где B и Γ – бета- и гамма-функции Эйлера. Тогда при всех $0 < \varepsilon < a(\beta)$ справедливы оценки

$$c_2^{-1/\beta} [a(\beta) - \varepsilon] t^{1/2+1/\beta} \leq n(L_0, t) \leq c_1^{-1/\alpha} [a(\alpha) + \varepsilon] t^{1/2+1/\alpha} \quad (4)$$

при достаточно больших $t > t_0 = t_0(\varepsilon)$. Если к тому же выполнено условие (iii), то оценка (4) справедлива для функции $n(L, \lambda)$.

Доказательство теоремы 3 получается с помощью равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{(\lambda/c)^{1/\alpha}} \sqrt{\lambda - cx^\alpha} dx = c^{-1/\alpha} a(\alpha) \lambda^{1/\alpha+1/2},$$

теоремы 2 и вариационной техники для собственных значений самосопряженных операторов. Для доказательства оценки (4) с функцией $n(L, t)$ вместо $n(L_0, t)$ используются теоремы Маркуса–Мацаева [7; гл. 1, § 8] о сравнении спектров для компактных возмущений самосопряженных операторов и представление (1), в котором S – компактный оператор в H .

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнено условие (iii) и оценка (3) при $\alpha = \beta$ (т.е. $q_0(x) \asymp x^\alpha$), то

$$n(L_0, t) \asymp n(L, t) \asymp t^{1/2+1/\alpha}.$$

Если $q(x) \sim cx^\alpha$ и выполнено условие (iii), то

$$n(L_0, t) \sim n(L, t) \sim c^{-1/\alpha} a(\alpha) t^{1/2+1/\alpha}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969. [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978. [3] А. А. Шкаликов, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989, 140–224. [4] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965. [5] А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1979. [6] М. О. Отелбаев, *Оценки спектра оператора Штурма–Лиувилля*, Гылым, Алма-Ата, 1990. [7] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Штиинца, Кишинев, 1986.

Л. К. Кусаинова

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана
E-mail: leili2006@mail.ru

Поступило

29.10.2012

А. Ж. Монашова

Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилева, г. Астана
E-mail: aygul_monashova@mail.ru

А. А. Шкаликов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ashkalikov@yahoo.com