Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Условия существования почти периодических решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 277–285

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:25:02

Условия существования почти периодических решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве

В. Е. Слюсарчук

Получены условия существования почти периодических решений нелинейных почти периодических разностных уравнений с непрерывным аргументом в банаховом пространстве, не использующие $\mathcal{H}$ -классы этих уравнений.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10174

1. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел и E – произвольное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$. Обозначим через C^0 банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в E с нормой

$$\|x\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_E.$$

Определим оператор сдвига $S_h: C^0 \rightarrow C^0$, $h \in \mathbb{R}$, с помощью соотношения

$$(S_h x)(t) = x(t + h), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Элемент $y \in C^0$ называется *почти периодическим* (см., например, [1], [2]), если замыкание множества $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ в пространстве C^0 является компактным подмножеством этого пространства.

Обозначим через B^0 банахово пространство почти периодических элементов пространства C^0 с нормой

$$\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}.$$

Пусть Ω – область пространства E , т.е. открытое связное множество пространства E , и $\mathcal{K}$ – множество всех непустых связных компактных подмножеств $K \subset \Omega$.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \times \Omega^m \rightarrow E$, где $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $f(t, x_1, \dots, x_m)$ равномерно непрерывно по $x_1, \dots, x_m$ на каждом множестве $\mathbb{R} \times K^m$, где $K \in \mathcal{K}$;
- 2) $f(t, x_1, \dots, x_m)$ почти периодически по t равномерно по $x_1, \dots, x_m$ на каждом множестве K^m , где $K \in \mathcal{K}$.

Нетрудно показать, что аналогично [2; дополнение, § 19], для каждого множества $K \in \mathcal{K}$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, x_1 \in K, \dots, x_m \in K} \|f(t, x_1, \dots, x_m)\|_E < +\infty$$

и для каждой последовательности $(h_k)_{k \geq 1}$ действительных чисел существует такая подпоследовательность $(h_{k_l})_{l \geq 1}$, что последовательность $(f(t + h_{k_l}, x_1, \dots, x_m))_{l \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K^m$.

Будем считать, что последовательность $(f(t + h_{k_l}, x_1, \dots, x_m))_{l \geq 1}$ сходится равномерно на каждом множестве $\mathbb{R} \times K^m$, $K \in \mathcal{K}$, и отображение $g: \mathbb{R} \times \Omega^m \rightarrow E$, которое определяется соотношением

$$g(t, x_1, \dots, x_m) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(t + h_{k_l}, x_1, \dots, x_m), \quad (1.2)$$

удовлетворяет условиям 1) и 2). Это требование выполняется, если, например, пространство E конечномерное, что проверяется аналогичным образом, как и в [2; дополнение, § 19] в случае $m = 1$. Заметим, что в статье это требование будет выполнять вспомогательную функцию при изложении материала и не будет использоваться при получении основного результата.

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(t) = f(t, x(t - \Delta_1), \dots, x(t - \Delta_m)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

где отклонения аргументов $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – произвольные действительные числа. Не исключено, что одни отклонения аргументов могут быть положительными, другие – отрицательными.

$\mathcal{H}$ -Классом уравнения (1.3) называется множество всех разностных уравнений

$$y(t) = g(t, y(t - \Delta_1), \dots, y(t - \Delta_m)), \quad t \in \mathbb{R},$$

правая часть которых определяется с помощью (1.2).

Цель статьи – нахождение условий почти периодичности ограниченных непрерывных решений уравнения (1.3), не использующие элементов $\mathcal{H}$ -класса этого уравнения. При исследовании уравнения (1.3) будем применять один функционал, определенный на множестве ограниченных решений этого уравнения (множества значений этих решений – подмножества компактных множеств $K \in \mathcal{K}$).

2. Функционал Δ . Обозначим через $\mathcal{N}(f, K)$ множество всех ограниченных решений $x = x(t)$ уравнения (1.3), для каждого из которых замыкание $\overline{R(x)}$ множества

$$R(x) = \{x(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

в пространстве E является подмножеством множества $K \in \mathcal{K}$ и

$$\overline{R(x)} \neq K. \quad (2.1)$$

Фиксируем произвольные множество $K \in \mathcal{K}$ и решение $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3). Считаем, что

$$\mathcal{N}(f, K) \neq \emptyset.$$

Положим

$$r(x^*, K, f) = \sup\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)}, y \in K\}.$$

Согласно (2.1)

$$r(x^*, K, f) > 0.$$

Также зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K, f)]$. Рассмотрим множество $\Omega(x^*, K, f, \varepsilon)$ всех элементов $y \in C^0$, для каждого из которых

$$x^*(t) + y(t) \in K$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\|_E - \varepsilon = 0.$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Delta(x^*, K, f, \varepsilon) &= \inf_{y \in \Omega(x^*, K, f, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x^*(t) + y(t) \\ &\quad - f(t, x^*(t - \Delta_1) + y(t - \Delta_1), \dots, x^*(t - \Delta_m) + y(t - \Delta_m))\|_E. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Применение функционала Δ к исследованию почти периодических нелинейного разностного уравнения (1.3), аналогичных линейных разностных уравнений, и нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений приведем в следующих пунктах.

3. Основной результат. Приведем условия существования почти периодических решений уравнения (1.3), которые в отличие от известной теоремы Америо о почти периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений (см. [2], [3]) не используют $\mathcal{H}$ -класс уравнения (1.3) и условие разделенности ограниченных решений уравнений $\mathcal{H}$ -класса этого уравнения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если для решения $z \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) и некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon) > 0 \quad (3.1)$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, то это решение почти периодическое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что решение $z \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) не является элементом пространства B^0 . Тогда в силу компактности множества K существует последовательность $(z(t + h_p))_{p \geq 1}$, сходящаяся в точке $t = 0$, причем любая ее подпоследовательность $(z(t + k_p))_{p \geq 1}$ не сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|z(h_p) - z(h_q)\|_E = 0 \quad (3.2)$$

и для некоторых последовательностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ и числа $\gamma \in (0, \delta)$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r})\|_E > \gamma, \quad r \geq 1. \quad (3.3)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $(f(t + k_p, x_1, \dots, x_m))_{p \geq 1}$ — сходящаяся равномерно на $\mathbb{R} \times K^m$ последовательность. Тогда

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}, x_1 \in K, \dots, x_m \in K} \|f(t + k_p, x_1, \dots, x_m) - f(t + k_q, x_1, \dots, x_m)\|_E = 0. \quad (3.4)$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. На основании (3.2) и (3.3) для функций

$$y_r(t) = z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}), \quad r \geq 1,$$

выполняется соотношение

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0), \quad r \geq 1, \quad (3.5)$$

где S_h – оператор сдвига, определенный соотношением (1.1).

Покажем, что

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon_0) = 0. \quad (3.6)$$

В силу (2.2), (3.5) и того, что

$$z(t + k_{p_r}) - f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m)) \equiv 0, \quad r \geq 1,$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & \Delta(z, K, f, \varepsilon_0) \\ &= \inf_{y \in \Omega(z, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t) + y(t) - f(t, z(t - \Delta_1) + y(t - \Delta_1), \dots, z(t - \Delta_m) + y(t - \Delta_m))\|_E \\ &= \inf_{y \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{q_r}) + y(t) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r} - \Delta_1) + y(t - \Delta_1), \dots, z(t + k_{q_r} - \Delta_m) + y(t - \Delta_m))\|_E \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{q_r}) + y_r(t) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r} - \Delta_1) + y_r(t - \Delta_1), \dots, z(t + k_{q_r} - \Delta_m) + y_r(t - \Delta_m))\|_E \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E \\ &\quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m)) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m)) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r} - \Delta_1), \dots, z(t + k_{p_r} - \Delta_m))\|_E, \end{aligned}$$

из которых на основании (3.4) вытекает соотношение (3.6), что противоречит (3.1).

Таким образом, предположение, что решение $z \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) не является почти периодическим, ложное.

Теорема 1 доказана.

4. Случай линейного уравнения (1.3). Применим теорему 1 к исследованию линейных почти периодических разностных уравнений.

Обозначим через $L(E, E)$ банахово пространство всех линейных непрерывных операторов $A: E \rightarrow E$ с нормой

$$\|A\|_{L(E, E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

Рассмотрим непрерывные отображения $f_i: \mathbb{R} \times E^m \rightarrow E$, $i = 1, 2$, которые определяются равенствами

$$f_1(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^m A_k(t)x_k + h(t),$$

$$f_2(t, x_1, \dots, x_m) = \sum_{k=1}^m A_k(t)x_k,$$

где $A_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, – непрерывные и почти периодические на $\mathbb{R}$ функции со значениями в $L(E, E)$ и $h \in B^0$, а также соответствующие линейные разностные уравнения

$$x(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t)x(t - \Delta_k) + h(t), \quad (4.1)$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^m A_k(t)x(t - \Delta_k), \quad (4.2)$$

где $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – произвольные действительные числа, среди которых могут быть как положительные, так и отрицательные числа. Очевидно, что уравнения (4.1) и (4.2) – частные случаи уравнения (1.3).

На основании теоремы 1 имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если линейное уравнение (4.1) имеет ограниченное решение $z \in \mathcal{N}(f_1, K)$ и для некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(z, K, f_1, \varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, то это решение почти периодическое.

Также правильным является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если линейное уравнение (4.2) имеет ограниченное решение $z \in \mathcal{N}(f_2, K)$ и для некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(z, K, f_2, \varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, то это решение почти периодическое.

5. Применение теоремы 1 к нелинейным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x), \quad (5.1)$$

где $h: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow E$ – непрерывное отображение.

Чтобы не усложнять дальнейшее изложение материала, будем считать, что $\Omega = E$.

Также предположим, что для каждого числа $t_0 \in \mathbb{R}$ и вектора $x_0 \in E$ дифференциальное уравнение (5.1) имеет единственное решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \quad (5.2)$$

Условия выполнения этого требования можно найти, например, в [4].

Решение задачи (5.1), (5.2) обозначим через $x = x(t, t_0, x_0)$.

Далее определим отображение $V: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ с помощью соотношения

$$V(t, y) = x(t, t - 1, y), \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times E. \quad (5.3)$$

Очевидно, что каждое определенное на $\mathbb{R}$ решение $y = y(t)$ дифференциального уравнения (5.1) удовлетворяет соотношению

$$y(t) = x(t, t - 1, y(t - 1)), \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. на основании (5.3) функция $y = y(t)$ является решением разностного уравнения

$$x(t) = V(t, x(t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

которое аналогично разностному уравнению (1.3). Поэтому уравнение (5.4) можно использовать для исследования ограниченных решений дифференциального уравнения (5.1).

В силу теоремы 1 имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) дифференциальное уравнение (5.1) имеет ограниченное решение z со значениями в компактном множестве $K \in \mathcal{K}$ и $R(z) \neq K$;
- 2) отображение $V: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ удовлетворяет условиям 1) и 2) п. 1 (как и отображение f в разностном уравнении (1.3));
- 3) для некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(z, K, V, \varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Тогда ограниченное решение z уравнения (5.1) почти периодически.

Заметим, что приведенные условия существования почти периодических решений уравнения (5.1) являются новыми для дифференциальных уравнений. Теорема 4 в отличие от упоминаемой ранее теоремы Американо не использует $\mathcal{H}$ -класс уравнения (1.3) и условие разделенности ограниченных решений уравнений $\mathcal{H}$ -класса этого уравнения и банахово пространство E может быть бесконечномерным.

6. Применение теоремы 1 к нелинейным дифференциально-функциональным уравнениям. Приведем аналог теоремы 4 для дифференциально-функциональных уравнений.

Обозначим через $C([-1, 0], E)$ банахово пространство непрерывных на отрезке $[-1, 0]$ функций $z = z(\theta)$ со значениями в E и нормой

$$\|z\|_{C([-1, 0], E)} = \sup_{\theta \in [-1, 0]} \|z(\theta)\|_E,$$

а через $C^0(\mathbb{R}, C([-1, 0], E))$ – банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $Y = Y(t)$ со значениями в $C([-1, 0], E)$ и нормой

$$\|Y\|_{C^0(\mathbb{R}, C([-1, 0], E))} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|Y(t)\|_{C([-1, 0], E)}.$$

Функции $x \in C^0$ и числу $t \in \mathbb{R}$ сопоставим элемент x_t пространства $C([-1, 0], E)$, который определяется соотношением

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-1, 0],$$

и определим линейный непрерывный оператор $T: C^0 \rightarrow C^0(\mathbb{R}, C([-1, 0], E))$ формулой

$$(Tx)(t) = x_t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.1)$$

Рассмотрим непрерывное отображение $h: \mathbb{R} \times C([-1, 0], E) \rightarrow E$ и дифференциально-функциональное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = h(t, x_t). \quad (6.2)$$

Укажем для этого уравнения условия почти периодичности его ограниченных решений с предкомпактными множествами значений.

Предположим, что для каждой функции $\varphi \in C([-1, 0], E)$ и числа $t_0 \in \mathbb{R}$ уравнение (6.2) имеет на промежутке $[t_0 - 1, +\infty)$ единственное непрерывное решение $x = x(t)$, удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-1, 0]. \quad (6.3)$$

Это требование выполняется, если, например, отображение h удовлетворяет условию Липшица:

$$\|h(t, y_1) - h(t, y_2)\|_E \leq L \|y_1 - y_2\|_{C([-1, 0], E)}.$$

Здесь y_1 и y_2 – произвольные элементы пространства $C([-1, 0], E)$, а L – положительная постоянная.

Обозначим решение задачи (6.2), (6.3) через $x = x(t, t_0, \varphi)$. Очевидно, что если $y = y(t)$ – ограниченное решение уравнения (6.2), то

$$y(t) = x(t, t_0, y_{t_0})$$

для всех t и t_0 , для которых $t \geq t_0$, в частности,

$$y(t + \theta) = x(t + \theta, t - 1, y_{t-1}) \quad (6.4)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\theta \in [-1, 0]$.

Определим отображение $W: \mathbb{R} \times C([-1, 0], E) \rightarrow C([-1, 0], E)$ формулой

$$W(t, \varphi) = x(t + \theta, t - 1, \varphi), \quad \theta \in [-1, 0].$$

Тогда в силу (6.4) для ограниченного решения $y = y(t)$ уравнения (6.2) выполняется соотношение

$$y_t = W(t, y_{t-1}), \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. функция $Y = (Ty)(t)$, если учесть (6.1), является решением уравнения

$$X(t) = W(t, X(t - 1)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Таким образом, если функция y является ограниченным решением дифференциально-функционального уравнения (6.2), то функция Ty является ограниченным решением разностного уравнения (6.5).

Разностное уравнение (6.5) аналогично разностному уравнению (1.3). Поэтому к нему применима теорема 1.

Обозначим через $\mathcal{K}_{C([-1,0],E)}$ множество всех связных компактных подмножеств пространства $C([-1,0],E)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) дифференциально-функциональное уравнение (6.2) имеет решение $z \in C^0$ такое, что множество значений $R(Tz)$ функции Tz является подмножеством некоторого компактного множества $K \in \mathcal{K}_{C([-1,0],E)}$ и $\overline{R(Tz)} \neq K$;
- 2) отображение

$$W: \mathbb{R} \times C([-1,0],E) \rightarrow C([-1,0],E)$$

удовлетворяет условиям, аналогичным условиям 1) и 2) п. 1 (как и отображение f в уравнении (1.3));

- 3) для некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(Tz, K, W, \varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Тогда ограниченное решение z уравнения (5.1) почти периодически.

Это утверждение вытекает из теоремы 1. Действительно, поскольку z – ограниченное решение уравнения (6.2), то Tz – ограниченное решение разностного уравнения (6.5). На основании соотношений $R(Tz) \subset K$, $\overline{R(Tz)} \neq K$ и теоремы 1 Tz – почти периодический элемент пространства $C^0(\mathbb{R}, C([-1,0],E))$. Следовательно, $z \in B^0$.

Завершая статью, заметим, что исследованию почти периодических уравнений посвящено много публикаций. Выделим лишь часть из них. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первые теоремы о почти периодических решениях были доказаны Фаваром в работе [5], а для нелинейных дифференциальных уравнений – Америо в работе [3]. В этих работах существенно используются $\mathcal{H}$ -классы исследуемых уравнений, а в [3] – также требование разделенности ограниченных решений уравнений. Результаты Фавара были существенно улучшены Мухамадиевым [6], [7]. Обобщениям теорем Мухамадиева посвящены работы [8]–[10]. Важные результаты в этом направлении также принадлежат Левитану [1], Америо [11] и Жикову [12].

Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений (требование существования таких решений в теоремах 4 и 5 существенно) получены в [13]–[16].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, ГИТТЛ, М., 1953.
- [2] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [3] L. Amerio, “Soluzioni quasiperiodiche, o limitati, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **39**:1 (1955), 97–119.
- [4] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [5] J. Favard, “Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques”, *Acta Math.*, **51** (1927), 31–81.

- [6] Э.М. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 269–274.
- [7] Э.М. Мухамадиев, “Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **30**:3 (1981), 443–460.
- [8] В.Е. Слюсарчук, “Обратимость почти периодических s -непрерывных функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **116**:4 (1981), 483–501.
- [9] В.Е. Слюсарчук, “Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **130**:1 (1986), 86–104.
- [10] В.Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **42**:2 (1987), 262–267.
- [11] L. Amerio, “Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte”, *Ricerche Mat.*, **30** (1960), 288–301.
- [12] В.В. Жиков, “Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 121–126.
- [13] В.Ю. Слюсарчук, “Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь”, *Укр. матем. журн.*, **61**:11 (2009), 1541–1556.
- [14] В.Е. Слюсарчук, “Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 103–126.
- [15] В.Ю. Слюсарчук, “Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабо регулярними операторами”, *Укр. матем. журн.*, **63**:12 (2012), 1685–1698.
- [16] В.Е. Слюсарчук, “Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 135–160.

В. Е. Слюсарчук

Национальный университет водного хозяйства и
природопользования, г. Ровно, Украина

E-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.edu.ua

Поступило

23.11.2012