Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Ласурия, Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 4, 530–543

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:58:32

Прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$

Р. А. Ласурия

Доказываются прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $m \geq 3$, в терминах наилучших приближений и модулей непрерывностей и рассматриваются конструктивные характеристики функциональных классов, задаваемых модулями непрерывности их элементов. Полученные утверждения обобщают результаты работы автора 2007 г.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10175

В статье доказываются прямые и обратные теоремы приближения функций суммами Фурье–Лапласа в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $m \geq 3$, в терминах наилучших приближений и модулей непрерывностей и рассматриваются конструктивные характеристики функциональных классов, задаваемых модулями непрерывности их элементов. Полученные утверждения обобщают результаты работы [1].

1. Определения, обозначения и постановка задач. Пусть $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, – m -мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \dots, x_m)$ – его векторы, σ^{m-1} – единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^m$ с центром в начале координат, $L_p(\sigma^{m-1})$, $p \in (0, \infty]$, – пространство вещественнозначных функций $f = f(x)$ с заданным на нем функционалом

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\sigma^{m-1})} = \begin{cases} \left(\frac{1}{|\sigma^{m-1}|} \int_{\sigma} |f(x)|^p d\sigma(x) \right)^{1/p} < \infty, & p \in (0, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \sigma^{m-1}} |f(x)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Функционал $\|\cdot\|_p$ при $p \geq 1$ задает норму, а при $p \in (0, 1)$ – квазинорму на $L_p(\sigma^{m-1})$. Пусть, далее,

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^{\lambda}(f, x), \quad \lambda = \frac{m-2}{2}, \quad (1.1)$$

– ряд Фурье–Лапласа функции $f(x) \in L(\sigma^{m-1}) \stackrel{\text{df}}{=} L_1(\sigma^{m-1})$,

$$Y_n^\lambda(f, x) = \sum_{j=1}^{a_n} \widehat{f}_j^{(n)} Y_j^{(n)}(x),$$

$$\widehat{f}_j^{(n)} = (f, Y_j^{(n)}), \quad j = 1, \dots, a_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

– коэффициенты Фурье–Лапласа функции $f(x)$, $\{Y_j^{(n)}(x)\}$, $j = 1, \dots, a_n$, – сферические гармоники степени n , образующие ортонормированный базис в пространстве H_n сферических гармоник степени n размерности

$$a_n = \frac{(2n + m - 2)(n + m - 3)!}{n!(m - 2)!},$$

$$(f, g) = \frac{1}{|\sigma^{m-1}|} \int_{\sigma^{m-1}} f(x)g(x) d\sigma(x).$$

При каждом фиксированном $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty)$ обозначим

$$S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}) = \left\{ f \in L(\sigma^{m-1}) : \sum_{n=0}^{\infty} \|Y_n^\lambda(f, x)\|_p^q < \infty \right\}.$$

Элементы $f, g \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ считаем тождественным, если $\widehat{f}_j^{(n)} = \widehat{g}_j^{(n)}$ при всех $j = 1, \dots, a_n$, $n = 0, 1, \dots$.

Будем говорить, что $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ порождается пространством $L(\sigma^{m-1})$, системой функций

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_{a_n}^{(n)}\} \quad (1.2)$$

и числами p, q . Определим в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ функционал посредством равенства

$$\|f\|_{S^{(p,q)}} = \|f(x)\|_{S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Y_n^\lambda(f, x)\|_p^q \right)^{1/q}. \quad (1.3)$$

Множество $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ при $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty)$ образует линейное нормированное пространство, содержащее систему (1.2), с операциями сложения и умножения на число, определенными на всем пространстве $L(\sigma^{m-1})$. При $p = q = 2$ в силу равенства Парсеваля в $L_2(\sigma^{m-1})$ имеем

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|Y_n^\lambda(f, x)\|_2^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{S^{(2,2)}}.$$

Пространства S_φ^p , содержащие ортонормированные системы φ , в частности, тригонометрическую, изучались в работах Степанца [2] (см. также [3]) в связи с задачами теории приближений в этих пространствах.

Пространство $S^{(p,2)}(\sigma^{m-1})$, $p \in [1, \infty]$, является гильбертовым. При всех остальных $q \in (0, \infty)$ пространство $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ наследует важнейшие свойства гильбертовых пространств – равенство Парсеваля в виде соотношения (1.3) и минимальное свойство частных сумм ряда Фурье–Лапласа; а именно, выполнено

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А [1]. Пусть

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n Y_k(x) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^{a_k} \alpha_j^{(k)} Y_j^{(k)}(x)$$

– произвольный полином по сферическим гармоникам $Y_k(x)$,

$$S_n^\lambda(f, x) = \sum_{k=0}^n Y_k^\lambda(f, x)$$

– частные суммы ряда (1.1). Среди всех сумм вида $P_n(x)$ при данном $n = 0, 1, 2, \dots$ наименее уклоняется от $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in (0, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, частная сумма Фурье–Лапласа $S_n^\lambda(f, x)$:

$$\inf_{P_n} \|f(x) - P_n(x)\|_{S^{(p,q)}} = \|f(x) - S_n^\lambda(f, x)\|_{S^{(p,q)}}, \quad (1.4)$$

причем

$$\|f(x) - S_n^\lambda(f, x)\|_{S^{(p,q)}}^q = \|f\|_{S^{(p,q)}}^q - \sum_{k=0}^n \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q. \quad (1.5)$$

Пусть, далее, $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$,

$$S_u f(x) = \frac{1}{|\sigma^{m-2}| \sin^{2\lambda} u} \int_{(x,y)=\cos u} f(y) dt(y), \quad 0 < u < \pi,$$

– сферический сдвиг с шагом $u \in (0, \pi)$, (x, y) – скалярное произведение векторов x, y в $\mathbb{R}^m$, $|\sigma^{m-2}|$ – “площадь” сферы σ^{m-2} . Известно [4], что

$$Y_n^\lambda(S_u f, x) = \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} Y_n^\lambda(f, x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $P_n^\lambda(t)$ – многочлены Гегенбауэра. Тогда ряд Фурье–Лапласа функции $S_u f(x)$ принимает вид

$$S[S_u f] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} \cdot Y_n^\lambda(f, x).$$

Отсюда, полагая $\Delta_u f(x) = f(x) - S_u f(x)$, получаем

$$\|\Delta_u f(x)\|_{S^{(p,q)}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)} \right)^q \cdot \|Y_n^\lambda(f, x)\|_p^q \right)^{1/q},$$

$$q \in [1, \infty), \quad p \in (0, \infty], \quad u \in (0, \pi).$$

Величину [1]

$$\omega(f, t)_{S^{(p,q)}} = \sup_{0 < u \leq t} \|\Delta_u f(x)\|_{S^{(p,q)}}$$

будем называть *модулем непрерывности* функции $f(x)$ в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$.

Пусть E есть тождественный оператор, r – положительное число, пусть $\psi_r(t) = (1-t)^{r/2}$. Введем в рассмотрение известный разностный оператор порядка $r > 0$:

$$\Delta_u^r = (E - S_u)^{r/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \psi_r^{(n)}(0) S_u^n.$$

Модулем непрерывности порядка $r > 0$ в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ назовем величину

$$\omega_r(f, t)_{S^{(p,q)}} = \sup_{0 < u \leq t} \|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,q)}}; \quad (1.6)$$

в частности, $\omega_2(f, t)_{S^{(p,q)}} = \omega(f, t)_{S^{(p,q)}}$. Принимая во внимание известные соотношения

$$Y_n(\Delta_u^r f; x) = \left(1 - \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)}\right)^{r/2} Y_n(f, x), \quad n = 0, 1, \dots,$$

получаем равенство

$$\|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,q)}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \|Y_n^\lambda(f, x)\|_p^q\right)^{1/q}. \quad (1.7)$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что $\omega_r(f, t)_{S^{(p,q)}}$ не убывает на $(0, \pi)$ и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \omega_r(f, t)_{S^{(p,q)}} = 0.$$

Далее, согласно предложению A, если

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = \inf_{P_{n-1}} \|f(x) - P_{n-1}(x)\|_{S^{(p,q)}} \quad (1.8)$$

– наилучшее приближение элемента f в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, то

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} = \|f(x)\|_{S^{(p,q)}}^q - \sum_{k=0}^n \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q = \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q, \quad (1.9)$$

$$q \in (0, \infty), \quad p \in (0, \infty].$$

Большое количество работ, в том числе работы Никольского и Лизоркина [5], Джафарова [6], Кушниренко [7], Петровой [8], Рустамова [9], Бутцера [10] (см. также [4]) посвящены теоремам типа Джексона–Стечкина и Бернштейна–Стечкина–Тимана для функций, заданных на сфере. Точные неравенства типа Джексона–Стечкина для наилучших приближений и для линейных методов суммирования в пространствах $C(\sigma^{m-1})$, $L_2(\sigma^{m-1})$, $L_p(\sigma^{m-1})$ исследовались в работах Шалаева [11], Арестова и Попова [12], Бабенко [13], Горбачева [14], Бабенко, Доронина, Лигуна, Шумейко [15], Попова [16]. Тригонометрический случай ($m = 2$) рассматривался в работах Черных [17], [18].

В настоящей статье устанавливаются прямые и обратные теоремы приближения в терминах наилучших приближений и модулей непрерывности порядка $r > 0$ в пространствах $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$. В частности, приводится достаточно общее неравенство

типа Джексона–Стечкина с константой, совпадающей с наименьшей константой, т.е. с величиной

$$K_{n,r,\lambda}(\tau)_{S^{(p,q)}} = \sup \left\{ \frac{E_n(f)_{S^{(p,q)}}}{\omega_r(f, \tau/n)_{S^{(p,q)}}} : f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}), f \neq \text{const} \right\}. \quad (1.10)$$

Точные значения величин $K_{n,r,\lambda}(\cdot)_{S^{(p,q)}}$ или их оценки, когда $p = q = 2$ (в этом случае $S^{(2,2)}(\sigma^{m-1}) = L_2(\sigma^{m-1})$), при различных значениях параметров $t = \tau/n$, n, m, r установлены в работах [1], [12], [13], [16].

В данной работе рассматриваются также конструктивные характеристики функциональных классов, заданных мажорантами модулей непрерывности r -го порядка их элементов. Случай $r = 2$ ранее рассматривался в работе [1]. При $m = 2$ эти вопросы изучались в [3].

2. Прямые теоремы. Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, $f \neq \text{const}$. Тогда для любого $\tau > 0$

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} \leq C_{n,r,\lambda}(\tau)_{S^{(p,q)}} \omega_r \left(f, \frac{\tau}{n} \right)_{S^{(p,q)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

где

$$C_{n,r,\lambda}(\tau)_{S^{(p,q)}} \stackrel{\text{df}}{=} \left(\inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_n}(\tau, \mu) \right)^{1/q}, \quad (2.2)$$

$$I_n(\tau, \mu) = I_{n,r,q,\lambda}(\tau, \mu) = \inf_{k \geq n} \int_0^\tau \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} d\mu(t), \quad (2.3)$$

и $M(\tau)$ – множество функций $\mu(\cdot)$, ограниченных, неубывающих, отличных от констант на $[0, \tau]$. При этом существует функция $\mu_* \in M(\tau)$, реализующая в определении (2.2) точную нижнюю грань. Неравенство (2.1) неулучшаемо на множестве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ в том смысле, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$C_{n,r,\lambda}(\tau)_{S^{(p,q)}} = K_{n,r,\lambda}(\tau)_{S^{(p,q)}}, \quad (2.4)$$

где $K_{n,r,\lambda}(\tau)_{S^{(p,q)}}$ – величина, определяемая равенством (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$. Принимая во внимание (1.6) и (1.9), находим

$$\begin{aligned} \|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,q)}}^q &\geq \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \\ &= \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \left(\left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} - \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где величина $I_n(\tau, \mu)$ определена равенством (2.3). Отсюда для любого $t \in [0, \tau]$ получаем

$$\begin{aligned} E_n^q(f)_{S(p,q)} &\leq \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_n(\tau, \mu)} \left(\|\Delta_{t/n}^r f\|_{S(p,q)}^q \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \cdot \left(\left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} - \frac{I_n(\tau, \mu)}{\mu(\tau) - \mu(0)} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу неравенства [4] $\max_{0 \leq u \leq \pi} |P_n^\lambda(\cos u)| \leq P_n^\lambda(1)$ имеем

$$\left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} \leq \left(\frac{\max_{0 \leq u \leq \pi} |P_k^\lambda(\cos u)|}{P_k^\lambda(1)} + 1 \right)^{rq/2} \leq 2^{rq/2}. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) заключаем, что ряд в правой части (2.6) равномерно по t мажорируется сходящимся положительным числовым рядом. На этом основании, интегрируя неравенство по $d\mu(t)$ в пределах от 0 до τ , получаем

$$\begin{aligned} E_n^q(f)_{S(p,q)} (\mu(\tau) - \mu(0)) &\leq \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_n(\tau, \mu)} \left(\int_0^\tau \|\Delta_{t/n}^r f(x)\|_{S(p,q)}^q d\mu(t) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_{s(p,q)}^q \left(\int_0^\tau \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} d\mu(t) - I_n(\tau, \mu) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В силу определения величины (2.3) из (2.8) следует

$$E_n^q(f)_{S(p,q)} \leq \frac{1}{I_n(\tau, \mu)} \int_0^\tau \|\Delta_{t/n}^r f(x)\|_{S(p,q)}^q d\mu(t) \leq \frac{1}{I_n(\tau, \mu)} \int_0^\tau \omega_r^q\left(f, \frac{t}{n}\right)_{S(p,q)} d\mu(t). \quad (2.9)$$

Отсюда получаем (2.1) и неравенство

$$K_{n,r,\lambda}^q(\tau)_{S(p,q)} \leq \inf_{\mu \in M(\tau)} \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{I_n(\tau, \mu)} = C_{n,r,\lambda}^q(\tau)_{S(p,q)}. \quad (2.10)$$

Положим

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{n,r,q,\lambda} &= \left\{ \widetilde{\omega}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} : \rho_k \geq 0, \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1 \right\}, \\ \widetilde{I}_n(\tau) &= \widetilde{I}_{n,r,q,\lambda}(\tau) = \inf_{\widetilde{\omega} \in \widetilde{W}_{n,r,q,\lambda}} \|\widetilde{\omega}\|_{C[0,\tau]}, \quad \|\varphi\|_{C[0,\tau]} = \max_{0 \leq x \leq \tau} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенство

$$\omega_r^q(f, t)_{S(p,q)} = \sup_{0 < u \leq t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} \right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q, \quad (2.11)$$

а также соотношения (1.9) и (1.10), имеем

$$K_{n,r,\lambda}^q(\tau)_{S^{(p,q)}} = \sup_{\{\rho_k\}} \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k}{\sup_{0 < u \leq t} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k (1 - P_k^\lambda(\cos u)/P_k^\lambda(1))^{rq/2}}, \quad (2.12)$$

где $\sup$ рассматривается по всем последовательностям чисел $\{\rho_k\}$ таких, что выполнено $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty$. В точности повторяя рассуждения из работ [3] или [2; с. 392], приходим к равенству в соотношении (2.10). Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, имеет место неравенство

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{1}{I_{n,r,\lambda}(q)} \int_0^\pi \omega_r^q\left(f, \frac{t}{n}\right) \sin t \, dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.13)$$

где

$$I_{n,r,\lambda}(q) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{k \geq n} \int_0^\pi \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \sin t \, dt. \quad (2.14)$$

При этом

$$C_2 \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt \leq I_{n,r,\lambda}(q) \leq C_1 \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt, \quad (2.15)$$

и неравенство

$$E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{C_3}{\int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt} \int_0^\pi \omega_r^q\left(f, \frac{t}{n}\right) \sin t \, dt \quad (2.16)$$

неулучшаемо по порядку на множестве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $C_i = C_i(\lambda, r, q)$, $i = 1, 2, 3$, – положительные константы, зависящие от указанных в скобках параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в неравенстве (2.9)

$$\tau = \pi, \quad \mu(t) = 1 - \frac{P_1^\lambda(\cos t)}{P_1^\lambda(1)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} P_1^\lambda(\cos t) &= 2 \binom{\lambda-1}{0} \binom{\lambda}{1} \cos t = 2\lambda \cos t, \\ P_1^\lambda(1) &= \frac{\Gamma(1+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)} = \frac{2\lambda\Gamma(2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)} = 2\lambda, \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, то $\mu(t) = 1 - \cos t$. Отсюда приходим к (2.13). В дальнейшем понадобятся соотношения (см., например, [4])

$$\left| \frac{P_n^\lambda(\cos t)}{P_n^\lambda(1)} - 1 \right| \geq C n^2 t^2, \quad C = C(\lambda), \quad (2.17)$$

$$\left| \frac{P_n^\lambda(\cos t)}{P_n^\lambda(1)} - 1 \right| \leq C_1 n^2 t^2, \quad C_1 = C_1(\lambda), \quad t \in [0, \pi], \quad (2.18)$$

Применяя (2.17), получаем

$$\begin{aligned} I_{n,r,\lambda}(q) &= \inf_{k \geq n} \int_0^\pi \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos t/n)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \sin t \, dt \\ &\geq \inf_{k \geq n} \int_0^\pi \left(Ck^2 \frac{t^2}{n^2}\right)^{rq/2} \sin t \, dt = C^{rq/2} \inf_{k \geq n} \left(\frac{k}{n}\right)^{rq} \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt \\ &= C^{rq/2} \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt, \quad C = C(\lambda). \end{aligned}$$

Аналогично, применяя (2.18), приходим к неравенствам (2.15), а значит, из (2.13) получим (2.16).

Покажем, что на всем множестве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ неравенство (2.16) по порядку нельзя улучшить. Пусть

$$Y_n^*(x) = \sum_{j=1}^{a_n} \alpha_j^{(n)} Y_j^{(n)}(x)$$

– произвольная сферическая гармоника степени n . Учитывая (2.18) и (2.11), будем иметь

$$\begin{aligned} \omega_r^q\left(Y_n^*, \frac{t}{n}\right) &= \sup_{0 < u \leq t/n} \|\Delta_u^r Y_n^*(x)\|_{S^{(p,q)}}^q = \sup_{0 < u \leq t/n} \left(1 - \frac{P_n^\lambda(\cos u)}{P_n^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \|Y_n^\lambda(Y_n^*, x)\|_p^q \\ &= C_1^{rq/2} \sup_{0 < u \leq t/n} (u^2 n^2)^{rq} \|Y_n^\lambda(Y_n^*, x)\|_p^q = C_1^{rq/2} t^{rq} \|Y_n^\lambda(Y_n^*, x)\|_p^q. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \omega_r^q\left(Y_n^*, \frac{t}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \sin t \, dt &\leq C_1^{rq/2} \|Y_n^\lambda(Y_n^*, x)\|_p^q \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt \\ &= C_1^{rq/2} \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt E_n^q(Y_n^*)_{S^{(p,q)}} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} E_n^q(Y_n^*)_{S^{(p,q)}} &\geq \frac{\int_0^\pi \omega_r^q(Y_n^*, t/n)_{S^{(p,q)}} \sin t \, dt}{C_1^{rq/2} \int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt} = \frac{C}{\int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt} \int_0^\pi \omega_r^q\left(Y_n^*, \frac{t}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \sin t \, dt, \\ C &= C(\lambda, r, q) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{C_1^{rq/2}}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Вследствие того, что

$$\int_0^\pi t^{rq} \sin t \, dt \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{rq} \int_{\pi/2}^\pi \sin t \, dt \geq 1,$$

приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой функции $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, имеет место неравенство

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} \leq C \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r > 0, \quad C = C(\lambda, r). \quad (2.19)$$

Пусть теперь $S^{(p,\infty)}(\sigma^{m-1})$ – множество функций $f(x) \in L(\sigma^{m-1})$ с конечной нормой

$$\|f(x)\|_{S^{(p,\infty)}} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p, \quad p \in (0, \infty],$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$,

$$\omega_r(f, t)_{S^{(p,\infty)}} = \sup_{0 < u \leq t} \|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,\infty)}}.$$

Функция $\omega_r(f, t)_{S^{(p,\infty)}}$ не убывает при $t > 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} \omega_r(f, t)_{S^{(p,\infty)}} = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Для любой функции $f(x) \in S^{(p,\infty)}(\sigma^{m-1})$, $p \in (0, \infty]$, выполняется неравенство

$$E_n(f)_{S^{(p,\infty)}} \leq C \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,\infty)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r > 0, \quad C = C(\lambda, r),$$

причем данное неравенство на множестве $S^{(p,\infty)}(\sigma^{m-1})$ по порядку нельзя улучшить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого элемента $f \in S^{(p,\infty)}(\sigma^{m-1})$ имеем

$$E_n(f)_{S^{(p,\infty)}} = \|f(x) - S_{n-1}^\lambda(f, x)\|_{S^{(p,\infty)}} = \max_{k \geq n} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p.$$

С учетом (2.17) получаем

$$\begin{aligned} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,\infty)}} &= \sup_{0 < u \leq \pi/n} \|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,\infty)}} \\ &= \sup_{0 < u \leq \pi/n} \max_{k \in \mathbb{N}_0} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{r/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p \\ &\geq C^{r/2} \max_{k \geq n} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p \sup_{0 < u \leq \pi/n} (ku)^r \geq C^{r/2} \max_{k \geq n} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p = \\ &= C^{r/2} E_n(f)_{S^{(p,\infty)}} = C_1 E_n(f)_{S^{(p,\infty)}}, \quad C_1 = C_1(\lambda, r) \stackrel{\text{df}}{=} C^{r/2}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое неравенство.

Пусть теперь элемент $f \in S^{(p,\infty)}(\sigma^{m-1})$, для которого $\|Y_k^\lambda(f, x)\|_p = 0$ при всех $k < n$. На основании оценки (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,\infty)}} &= \sup_{0 < u \leq \pi/n} \max_{k \geq n} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{r/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p \\ &= \max_{k \geq n} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p \sup_{0 < u \leq \pi/n} \left|1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right|^{r/2} \leq 2^{r/2} E_n(f)_{S^{(p,\infty)}}, \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство теоремы 3.

Следующее утверждение устанавливает неравенство типа Джексона с точной константой в некоторых частных случаях. Предварительно приведем ряд обозначений и определений. Положим

$$\mu_n(\delta) = \sup_{0 < h < \delta} \inf_{i \geq n} \left(1 - \frac{P_i^\lambda(\cos h)}{P_i^\lambda(1)}\right), \quad \delta \in (0, \pi),$$

и пусть

$$t_{s,i} = t_s(i-1, \lambda+1), \quad s = 1, 2, \dots, \left[\frac{i-1}{2} \right],$$

– нули функции $P_{i-1}^{\lambda+1}(t)/P_{i-1}^{\lambda+1}(1)$, пронумерованные влево от точки $t = 1$ в порядке убывания, $h_{s,i} = h_s(i-1, \lambda+1)$ – соответствующие значения углов h , $\cos h_{s,i} = t_{s,i}$, $\bar{\delta} = \bar{\delta}(n)$ – единственный в интервале $(0, h_{1,n})$ корень уравнения

$$\frac{P_n^\lambda(\cos h)}{P_n^\lambda(1)} = \frac{P_n^\lambda(\cos h_{2,n})}{P_n^\lambda(1)}, \quad h \in (0, h_{1,n}).$$

Функцию $\lambda_n(\delta)$, $\delta \in (0, \bar{\delta}]$, определим формулой

$$\lambda_n(\delta) = 1 - \frac{P_n^\lambda(\cos \delta)}{P_n^\lambda(1)}.$$

В работе [16] было установлено, что

$$\mu_n(\delta) = \lambda_n(\delta), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \delta \in (0, \bar{\delta}].$$

В этих обозначениях с учетом этого равенства, а также первого неравенства в соотношениях (2.5) нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}), \quad m \geq 3, \quad q \in [1, \infty), \quad p \in (0, \infty], \quad f \neq \text{const.}$$

Тогда для любого числа $\delta \in (0, \bar{\delta}]$ и для любого $r > 0$ имеет место неравенство

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{\omega_r(f, \delta)_{S^{(p,q)}}}{\lambda_n^{r/2}(\delta)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем константа $\lambda_n^{-r/2}(\delta)$ в этом неравенстве точная.

Точность последнего неравенства показывается на n -й гармонике:

$$Y_n(x) = \sum_{j=1}^{a_n} \alpha_j^{(n)} Y_j^{(n)}(x).$$

3. Обратные теоремы. Основным в этом направлении является утверждение, содержащее неравенство типа Бернштейна–Стечкина–Тимана.

ТЕОРЕМА 5. Для любой функции $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, выполняется неравенство

$$\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{C}{n^r} \left(\sum_{k=1}^n (k^{rq} - (k-1)^{rq}) E_k^q(f)_{S^{(p,q)}} \right)^{1/q}, \quad r > 0, \quad (3.1)$$

где $C = C(\lambda, r)$ – положительная константа, зависящая от указанных в скобках параметров. При этом неравенство (3.1) на множестве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ по порядку нельзя улучшить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $u \in (0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда на основании (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,q)}}^q &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \\ &\quad + \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \stackrel{\text{df}}{=} I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая (1.9) и (2.7), находим

$$I_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\left| \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)} \right| + 1 \right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \leq 2^{rq/2} \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q = 2^{rq/2} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}. \quad (3.3)$$

Применяя (2.18), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos u)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \\ &\leq C_1^{rq/2} \sum_{k=1}^{n-1} k^{rq} u^{rq} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \leq C_1^{rq/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{rq} \sum_{k=1}^{n-1} k^{rq} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно (3.3) и (3.4) из (3.2) получаем

$$\|\Delta_u^r f(x)\|_{S^{(p,q)}}^q \leq 2^{rq/2} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}} + C_1^{rq/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{rq} \sum_{k=1}^{n-1} k^{rq} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q. \quad (3.5)$$

Далее, используем равенство (см., например, [2; с. 401])

$$\sum_{k=j}^M \alpha_k c_k = \alpha_m \sum_{k=j}^{\infty} c_k + \sum_{k=j+1}^M (\alpha_k - \alpha_k - 1) \sum_{i=k}^{\infty} c_i - \alpha_M \sum_{k=M+1}^{\infty} c_k \quad (3.6)$$

при условии, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty,$$

где (α_k) , $k \in \mathbb{N}$, – произвольная последовательность чисел, $M \in \mathbb{N}$, $j \leq M$. Полагая в (3.6) $\alpha_k = k^{rq}$, $c_k = \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q$, $j = 1$, $M = n - 1$, находим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} k^{rq} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q - (n-1)^{rq} \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (k^{rq} - (k-1)^{rq}) E_k^q(f)_{S^{(p,q)}} - (n-1)^{rq} E_n^q(f)_{S^{(p,q)}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Следовательно, из (3.5) с учетом (3.7) получаем

$$\begin{aligned} & \|\Delta_u^r f(x)\|_{S(p,q)}^q \\ & \leq C_1^{rq/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{rq} \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k^{rq} - (k-1)^{rq}) E_k^q(f)_{S(p,q)} - (n-1)^{rq} E_n^q(f)_{S(p,q)} \right) \\ & \quad + 2^{rq/2} E_n^q(f)_{S(p,q)} \\ & \leq C_2 \left(\frac{\pi}{n}\right)^{rq} \sum_{k=1}^n (k^{rq} - (k-1)^{rq}) E_k^q(f)_{S(p,q)}, \quad C_2 = C_2(\lambda, r, q). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Соотношение (3.1) вытекает из (3.8).

Покажем, что (3.1) нельзя улучшить по порядку. Для любого элемента $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ имеем

$$\begin{aligned} \omega_r^q\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S(p,q)} & \geq \|\Delta_{\pi/n}^r f(x)\|_{S(p,q)}^q = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{P_k^\lambda(\cos \pi/n)}{P_k^\lambda(1)}\right)^{rq/2} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q \\ & \geq C^{rq/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{rq} \sum_{k=1}^{n-1} k^{rq} \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Применяя равенство (3.6) при $\alpha_k = k^{rq}$, $c_k = \|Y_k^\lambda(f, x)\|_p^q$, $j = 1$, $M = n$, из (3.9) получаем

$$\omega_r^q\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S(p,q)} \geq C^{rq/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{rq} \left(\sum_{k=1}^n (k^{rq} - (k-1)^{rq}) E_k^q(f)_{S(p,q)} - n^{rq} E_{n+1}^q(f)_{S(p,q)} \right). \quad (3.10)$$

Пусть $f = P_n$ — полином по сферическим гармоникам степени не выше n . Тогда $E_{n+1}(P_n)_{S(p,q)} = 0$. Поэтому из (3.10) следует неравенство

$$\omega_r\left(P_n, \frac{\pi}{n}\right)_{S(p,q)} \geq C^{r/2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^r \left(\sum_{k=1}^n (k^{rq} - (k-1)^{rq}) E_k^q(P_n)_{S(p,q)} \right)^{1/q}, \quad C = C(\lambda).$$

Теорема доказана.

Из неравенства (3.1) вытекает оценка

$$\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S(p,q)} \leq \frac{C_1}{n^r} \left(\sum_{k=1}^n k^{rq-1} \cdot E_k^q(f)_{S(p,q)} \right)^{1/q}, \quad C_1 = C_1(\lambda, r, q). \quad (3.11)$$

Отсюда, в частности, получаем такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $q \in [1, \infty)$, $p \in (0, \infty]$, и при некотором $\alpha > 0$

$$E_n(f)_{S(p,q)} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при всех $r > 0$

$$\omega_r(f, t)_{S(p,q)} = \begin{cases} O(t^\alpha), & 0 < \alpha < r, \\ O(t^r |\ln t|^{1/q}), & \alpha = r, \\ O(t^r), & \alpha > r. \end{cases}$$

4. Конструктивные характеристики. Полученные утверждения позволяют сделать заключения о конструктивных характеристиках классов функций, заданных на сфере σ^{m-1} , определяющихся r -ми модулями непрерывности в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$.

Пусть функция $\varphi(t)$ определена на $[0, \pi]$ и выполнены следующие условия:

- 1) $\varphi(t)$ монотонно возрастает и непрерывна на $[0, \pi]$;
- 2) $\varphi(0) = 0$.

В этом случае будем говорить, что φ принадлежит классу Φ .

Обозначим через $H_{r,S^{(p,q)}}^\omega(\sigma^{m-1})$, $r > 0$, $\omega \in \Phi$, класс всех функций

$$f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}), \quad q \in [1, \infty), \quad p \in (0, \infty],$$

удовлетворяющих условию

$$\omega_r(f, t)_{S^{(p,q)}} \leq C\omega(t), \quad t \in (0, \pi], \quad (4.1)$$

где $C = C(f)$ – положительная константа, вообще говоря, зависящая от f . Функция $\varphi(t) \in \Phi$ удовлетворяет условию Бари (B_s), $s > 0$, если

$$\sum_{k=1}^n k^{s-1} \varphi\left(\frac{\pi}{k}\right) = O\left(n^s \varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\omega(t) \in \Phi$ такова, что $\omega^q(t)$, $q \in [1, \infty)$, удовлетворяет условию (B_{rq}). Тогда для того, чтобы функция $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$, $p \in (0, \infty]$, принадлежала классу $H_{r,S^{(p,q)}}^\omega(\sigma^{m-1})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = O\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in H_{r,S^{(p,q)}}^\omega(\sigma^{m-1})$. Тогда из (4.1) и (2.19) следует (4.2). С другой стороны, согласно неравенству (3.11)

$$\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} \leq \frac{C}{n^r} \left(\sum_{k=1}^n k^{rq-1} E_k^q(f)_{S^{(p,q)}} \right)^{1/q}, \quad f \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1}), \quad C = C(\lambda, r),$$

и с учетом (4.1) находим

$$\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} = O\left(\frac{1}{n^r} \left(\sum_{k=1}^n k^{rq-1} \omega^q\left(\frac{\pi}{k}\right) \right)^{1/q}\right).$$

Вследствие того, что $\omega^q(t)$ удовлетворяет условию B_{rq} , получаем

$$\omega_r\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{S^{(p,q)}} = O\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad r > 0,$$

и тогда $f \in H_{r,S^{(p,q)}}^\omega(\sigma^{m-1})$.

Функция $\omega(t) = t^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 6 при $\alpha \in (0, r)$. Поэтому, если $H_{r,S^{(p,q)}}^\alpha(\sigma^{m-1})$ – класс $H_{r,S^{(p,q)}}^\omega(\sigma^{m-1})$ при $\omega(t) = t^\alpha$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\alpha \in (0, r)$, $r > 0$. Для того, чтобы $f(x) \in S^{(p,q)}(\sigma^{m-1})$ принадлежала классу $H_{r,S^{(p,q)}}^\alpha(\sigma^{m-1})$, $p \in (0, \infty]$, $q \in [1, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f)_{S^{(p,q)}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Анализ доказательств теорем 1, 2, 5 показывает, что утверждение этих теорем остаются в силе и при $q \in (0, 1)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. А. Ласурия, “Прямые и обратные теоремы приближения функций, заданных на сфере в пространстве $S^{(p,q)}(\sigma^m)$ ”, *Укр. матем. журн.*, **59**:7 (2007), 901–911.
- [2] А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, Ч. 2, Праці Ін-ту матем. НАН України, **40**, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2002.
- [3] А. И. Степанец, А. С. Сердюк, “Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p ”, *Укр. матем. журн.*, **54**:1 (2002), 106–124.
- [4] H. Berens, P. L. Butzer, S. Pawelke, “Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A*, **4**:2 (1968), 201–268.
- [5] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, “Аппроксимация функций на сфере”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:3 (1987), 635–651.
- [6] Ар. С. Джафаров, “О сферических аналогах классических теорем Дж. Джексона и С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **203**:2 (1972), 278–281.
- [7] Г. Г. Кушниренко, “О приближении функций, заданных на единичной сфере, конечными сферическими суммами”, *Научные доклады высшей школы. Физ.-матем. науки*, **4** (1958), 47–53.
- [8] И. В. Петрова, “Теорема Джексона и пространство Бесова на сфере”, *Докл. АН СССР*, **278**:3 (1984), 544–549.
- [9] Х. П. Рустамов, “О приближении функций на сфере”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:5 (1993), 127–148.
- [10] P. L. Butzer, “A survey of work on approximation at Aachen, 1968–1972”, *Approximation Theory*, Academic Press, New York, 1973, 31–100.
- [11] В. В. Шалаев, “Точные оценки приближения непрерывных на сфере функций линейными операторами типа свертки”, *Укр. матем. журн.*, **43**:4 (1991), 565–567.
- [12] В. В. Арестов, В. Ю. Попов, “Неравенства Джексона на сфере в L_2 ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 8, 13–20.
- [13] А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 333–355.
- [14] Д. В. Горбачев, “Точное неравенство Джексона в пространстве L_p на сфере”, *Матем. заметки*, **66**:1 (1999), 50–62.
- [15] В. Ф. Бабенко, В. Г. Доронин, А. А. Лигун, А. А. Шумейко, “О неравенствах типа Джексона для функций, заданных на сфере”, *Укр. матем. журн.*, **57**:3 (2005), 291–304.
- [16] В. Ю. Попов, “Приближение на сфере в L_2 ”, *Докл. АН СССР*, **301**:4 (1988), 793–797.
- [17] Н. И. Черных, “О неравенстве Джексона в L_2 ”, *Приближение функций в среднем*, Тр. МИАН СССР, **88**, 1967, 71–74.
- [18] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.

Р. А. Ласурия

Абхазский государственный университет

E-mail: rlasuria67@yandex.ru

Поступило

30.11.2012

Исправленный вариант

05.03.2015