Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Плотников, Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 750–762

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:56:15

Кратные ряды Уолша и множества Зигмунда

М. Г. Плотников

Классическая теорема А. Зигмунда утверждает, что для любой монотонно стремящейся к нулю последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ и каждого $\delta > 0$ существует множество единственности для класса тригонометрических рядов с коэффициентами, мажорируемыми последовательностью $\{\varepsilon_n\}$, мера которого больше, чем $2\pi - \delta$. В работе доказывается аналог теоремы Зигмунда для кратных рядов по системе Уолша, на коэффициенты которых наложены весьма мягкие ограничения.

Библиография: 16 названий

DOI: 10.4213/mzm10177

1. Введение. В теории единственности ортогональных рядов известен следующий фундаментальный результат, принадлежащий Зигмунду ([1], см. также [2; гл. 14], [3; гл. 9]).

ТЕОРЕМА А1. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ – монотонно стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует множество $A \subset [-\pi, \pi)$ меры большей, чем $2\pi - \delta$, причем любой тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

сходящийся к нулю при $x \in [-\pi, \pi) \setminus A$ и такой, что

$$|a_0| \leq \varepsilon_0, \quad |a_n| \leq \varepsilon_n, \quad |b_n| \leq \varepsilon_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

является тождественно нулевым, т.е. $a_0 = 0$, $a_n = b_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Несложно показать, что в теореме А1 можно не требовать монотонности последовательности $\{\varepsilon_n\}$. Пусть $\Theta_{\text{trig}}(\varepsilon)$ – класс тригонометрических рядов, коэффициенты которых удовлетворяют условию (1.1). Множества A из теоремы А1 называются множествами (относительной) единственности для тригонометрических рядов из класса $\Theta_{\text{trig}}(\varepsilon)$. Кахан и Кацнельсон усилили [4] теорему Зигмунда, показав, что можно найти множество A полной меры, удовлетворяющее остальным условиям

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00417) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3682.2014.1).

этой теоремы. Теоремы Зигмунда и Кахана–Кацнельсона показывают, что существуют множества сколь угодно малой и даже нулевой меры такие, что поведение ряда из класса $\Theta_{\text{trig}}(\varepsilon)$ в некотором смысле полностью определяется его поведением на любом из таких множеств. Если же не накладывать никаких ограничений на поведение коэффициентов тригонометрического ряда, либо вместо условия (1.1) рассмотреть чуть более слабое условие

$$a_n \rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

то утверждение теоремы типа Зигмунда не может выполняться ни для какого измеримого множества A положительной меры.

В работе [5] Тетунашвили установил следующий многомерный аналог теоремы Кахана–Кацнельсона.

ТЕОРЕМА А2. Пусть $\phi_0(x) \equiv 1$, $\phi_{2k-1}(x) = \sqrt{2} \cos 2\pi kx$, $\phi_{2k}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi kx$ для $x \in [0, 1]$, $(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$,

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} a_{n_1, \dots, n_d} \prod_{u=1}^d \phi_u(x_u) \quad (1.2)$$

– d -кратный тригонометрический ряд на $[0, 1]^d$. Рассмотрим произвольную d -мерную последовательность $\{\varepsilon_{n_1, \dots, n_d}\}_{n_1, \dots, n_d=0}^{\infty}$ положительных чисел такую, что при некотором j , $1 \leq j \leq d$, для каждого вектора $(n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_d)$ выполнено условие $\varepsilon_{n_1, \dots, n_j, \dots, n_d} \downarrow 0$, когда $n_j \rightarrow \infty$. Тогда существует множество $A \subset [0, 1]^d$ d -мерной лебеговой меры единица, обладающее следующим свойством. Любой ряд (1.2), сходящийся по прямоугольникам к нулю на множестве $[0, 1]^d \setminus A$ и такой, что $|a_{n_1, \dots, n_d}| \leq \varepsilon_{n_1, \dots, n_d}$ при $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, имеет все коэффициенты равные нулю.

В работе [6] Шапиро доказал теорему типа Зигмунда для рядов по еще одной хорошо известной системе функций – системе Уолша. Аналог теоремы Кахана–Кацнельсона для рядов Уолша установили Бахшецян [7] и Геворкян [8].

Мы рассмотрим d -кратные ряды Уолша

$$\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} b_{n_1, \dots, n_d} \prod_{u=1}^d \omega_{n_u}(t^u) \quad (1.3)$$

($\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^d)$) на группе G^d . Основными в работе являются следующие аналоги для рядов (1.3) теоремы Зигмунда.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ – произвольные стремящиеся к нулю и к ∞ , соответственно, последовательности положительных чисел. Тогда для всякого $\delta > 0$ существует совершенное множество $H \subset G^d$ меры Хаара большей, чем $1 - \delta$, обладающее следующим свойством. Любой ряд (1.3), сходящийся по двоичным кубам к нулю на множестве $G^d \setminus H$ и такой, что

$$|b_{n_1, \dots, n_d}| \leq \varepsilon_{n_d}, \quad n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}_+, \quad |n_u - n_d| \leq C_{n_d}, \quad u = 1, \dots, d-1, \quad (1.4)$$

имеет все коэффициенты равными нулю.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 1 для всякого $\delta > 0$ найдется совершенное множество $H \subset G^d$ меры Хаара большей, чем $1 - \delta$, обладающее следующим свойством. Если коэффициенты ряда (1.3), сходящегося по прямоугольникам или по кубам к нулю на множестве $G^d \setminus H$, удовлетворяют условию (1.4), то все они равны нулю.

В теореме 1 и следствии 2 накладываются ограничения лишь на те коэффициенты ряда (1.3), которые находятся не очень далеко от “большой диагонали”. Значит, классы рядов, удовлетворяющих таким условиям, не слишком узки. В связи с этим интересен вопрос: верен ли аналог данных результатов в том случае, если вообще не накладывать ограничений на коэффициенты кратных рядов Уолша? Данный вопрос приводит к следующей фундаментальной для теории кратных ортогональных рядов проблеме, которая не решена ни для кратных тригонометрических рядов, ни для кратных рядов Уолша (причем при сходимости как по прямоугольникам, так и по кубам): существует ли множество положительной меры такое, что любой сходящийся к нулю вне этого множества ряд является тождественно нулевым? Эта проблема была поставлена Холщевниковой в работе [9]. Заметим также, что при построении множеств H в теореме 1 и следствии 2 (как и при построении множеств A в теореме Зигмунда) существенно используются их арифметические свойства.

2. Основные определения и некоторые факты. Ниже $\mathbb{N}$ означает множество натуральных, а $\mathbb{Z}_+$ – целых неотрицательных чисел. Пусть $d \in \mathbb{N}$. Символом $\mathbf{1}$ обозначим d -мерный вектор $(1, \dots, 1)$, а $\mathbf{0}$ – d -мерный вектор $(0, \dots, 0)$. Для $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ будем писать $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, если $a_u \leq b_u$ для всех $u = 1, \dots, d$. Положим

$$\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} c_{\mathbf{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1=a_1}^{b_1} \cdots \sum_{n_d=a_d}^{b_d} c_{n_1, \dots, n_d}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Мы используем также следующие понятия (см., например, [10]–[13]). Пусть $n, m \in \mathbb{Z}_+$, а

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j 2^j, \quad m = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j 2^j, \quad \varepsilon_j, \delta_j \in \{0, 1\} \quad \text{для всех } j \in \mathbb{Z}_+,$$

– двоичные разложения чисел n и m . Двоичное сложение $n \oplus m$ задается формулой

$$n \oplus m = \sum_{j=0}^{\infty} |\varepsilon_j - \delta_j| 2^j. \quad (2.1)$$

Ясно, что $n \oplus n = 0$ для всякого $n \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $n, m, s, p \in \mathbb{Z}_+$, причем $n \leq 2^s - 1$, $m = p 2^s$. Тогда $n \oplus m = n + m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение вытекает из формулы (2.1) и того факта, что в двоичном разложении числа n коэффициенты при $2^s, 2^{s+1}, \dots$ равны нулю, а в двоичном разложении числа m коэффициенты при $2^0, \dots, 2^{s-1}$ равны нулю.

Если $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, то двоичное сложение $\mathbf{n} \oplus \mathbf{m}$ определим равенством

$$\mathbf{n} \oplus \mathbf{m} = (n_1 \oplus m_1, \dots, n_d \oplus m_d) \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Пара $(\mathbb{Z}_+^d, \oplus)$ является абелевой группой. Не приведет к путанице то, что символ $\oplus$ мы используем и для двоичного сложения чисел из $\mathbb{Z}_+$, и для двоичного сложения векторов из $\mathbb{Z}_+^d$, и (ниже) для сложения элементов групп G и G^d .

Рассмотрим двоичную группу G , введенную Н. Я. Виленкиным [14] и Н. Файном [10] (см. также [11], [12], [13; гл. 1]) и служащую естественной областью определения системы Уолша. G является множеством последовательностей $t = \{t_j\}_{j=0}^\infty$ с $t_j \in \{0, 1\}$, а групповой операцией $\oplus$ служит покоординатное сложение mod 2. Каждому элементу $t \in G$ можно приписать его двоичное разложение, т.е. ряд $\sum_{j=0}^\infty t_j 2^{-j-1}$. Отображение, сопоставляющее любому $t \in G$ сумму данного ряда, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между группой G и модифицированным отрезком $[0, 1]^*$, т.е. отрезком $[0, 1]$, в котором точки вида $i/2^k$, $i, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 2^k - 1$, считаются дважды: ‘левая’ точка $i/2^k - 0$, соответствующая бесконечному двоичному разложению, и ‘правая’ точка $i/2^k + 0$, соответствующая конечному двоичному разложению. Ниже мы не различаем G и $[0, 1]^*$. До конца работы будем писать $i/2^k$ для элемента $i/2^k + 0 \in [0, 1]^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $i_1, \dots, i_p \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. Тогда

$$\frac{i_1 \oplus \dots \oplus i_p}{2^k} = \bigoplus_{u=1}^p \frac{i_u}{2^k}. \quad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим двоичные разложения чисел $i_1, \dots, i_p$:

$$i_u = \sum_{j=0}^\infty \varepsilon_j^u 2^j, \quad u = 1, \dots, p. \quad (2.3)$$

Так как $i_1, \dots, i_p \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$, то $\varepsilon_j^u = 0$ для всех $j \geq k$, $u = 1, \dots, p$. Отсюда вытекает, с учетом (2.3), что

$$\frac{i_u}{2^k} = \sum_{j=0}^{k-1} \varepsilon_j^u 2^{j-k}, \quad u = 1, \dots, p. \quad (2.4)$$

Из (2.4) вытекает, что u -ое слагаемое в правой части формулы (2.2) есть элемент

$$t^u = (\varepsilon_{k-1}^u, \dots, \varepsilon_1^u, \varepsilon_0^u, 0, 0, \dots) \in G. \quad (2.5)$$

Положим

$$\varepsilon_j = \bigoplus_{u=1}^p \varepsilon_j^u, \quad j = 0, 1, \dots. \quad (2.6)$$

Тогда левая часть формулы (2.2) совпадает с элементом

$$t = (\varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_1, \varepsilon_0, 0, 0, \dots) \in G. \quad (2.7)$$

Из (2.5)–(2.7) вытекает равенство

$$t = \bigoplus_{u=1}^p t^u,$$

из которого следует формула (2.2). Предложение доказано.

Система Уолша $\{\omega_n\}_{n=0}^\infty$ в нумерации Пэли на G определяется так:

$$\omega_n(t) = \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{t_j \varepsilon_j}, \quad t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G, \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j 2^j, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.8)$$

Если $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $y, z \in G$, то

$$\omega_n \cdot \omega_m \equiv \omega_{n \oplus m}, \quad \omega_n(y) \omega_n(z) = \omega_n(y \oplus z). \quad (2.9)$$

Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$, причем $a + 1 \leq b \leq c$. Символом $V_{a,b,c}$ обозначим подгруппу группы $(\mathbb{Z}_+, \oplus)$, состоящую из всех $n \in \mathbb{Z}_+$, представимых в виде

$$n = \sum_{j=0}^{a-1} \varepsilon_j 2^j + \sum_{j=b}^{c-1} \varepsilon_j 2^j, \quad \varepsilon_j \in \{0, 1\} \quad \text{для всех } j. \quad (2.10)$$

Если $a = 0$, то первая, а если $b = c$, то вторая сумма в (2.10) равна нулю по определению. Из определения множеств $V_{a,b,c}$ сразу вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Мощность множества $V_{a,b,c}$ равна 2^{a+c-b} .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть $a, b, c, n \in \mathbb{Z}_+$, причем $a + 1 \leq b \leq c$, $a \leq 2^c - 1$. Тогда*

$$\sum_{l=0}^{2^{b-a}-1} \omega_n \left(\frac{l}{2^b} \right) = \begin{cases} 2^{b-a}, & \text{если } n \in V_{a,b,c}; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l \in \{0, \dots, 2^{b-a} - 1\}$, $n = \sum_{j=0}^\infty \varepsilon_j 2^j$ – двоичное разложение числа n ,

$$\frac{l}{2^b} = \sum_{j=0}^{\infty} l_j 2^{-j-1}, \quad l_j \in \{0, 1\}$$

– двоичное разложение элемента $l/2^b \in [0, 1]^*$. Тогда

$$l_j = 0 \quad \text{если } j \notin \{a, \dots, b-1\}, \quad (2.11)$$

причем все наборы $(l_a, \dots, l_{b-1})$ из нулей и единиц встречаются ровно по одному разу, когда l пробегает множество $\{0, \dots, 2^{b-a} - 1\}$. Рассмотрим 2 случая.

Сначала предположим, что $n \in V_{a,b,c}$. Тогда $\varepsilon_j = 0$ для всех $j \in \{a, \dots, b-1\}$. Отсюда, с учетом (2.11), $\sum_{j=0}^\infty l_j \varepsilon_j = 0$,

$$\omega_n \left(\frac{l}{2^b} \right) \stackrel{(2.8)}{=} 1,$$

$$\sum_{l=0}^{2^{b-a}-1} \omega_n \left(\frac{l}{2^b} \right) = 2^{b-a}, \quad \text{если } n \in V_{a,b,c}. \quad (2.12)$$

Если же $n \notin V_{a,b,c}$, то найдется $j_0 \in \{a, \dots, b-1\}$ такое, что $\varepsilon_{j_0} = 1$. Ясно, что все $l \in \{0, \dots, 2^{b-a}-1\}$ можно разбить на пары (l', l'') так, что двоичные разложения элементов $l'/2^b, l''/2^b \in [0, 1]^*$ различаются только в j_0 -м разряде. Тогда

$$\omega_n\left(\frac{l'}{2^b}\right) \stackrel{(2.8)}{=} -\omega_n\left(\frac{l''}{2^b}\right),$$

$$\sum_{l=0}^{2^{b-a}-1} \omega_n\left(\frac{l}{2^b}\right) = 0, \quad \text{если } n \notin V_{a,b,c}. \quad (2.13)$$

Формулы (2.12) и (2.13) доказывают предположение.

Для каждого $d \in \mathbb{N}$ рассмотрим топологическую абелеву группу G^d , являющуюся прямым произведением d экземпляров группы G . Группу G^d можно представлять как *модифицированный куб* $([0, 1]^*)^d$; далее мы не будем различать эти объекты.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $i = \sum_{j=0}^{k-1} a_j 2^j$, $a_j \in \{0, 1\}$ для всех j ,

$$\Delta_k^i = \{t = \{t_j\}_{j=0}^\infty \in G : t_j = a_j, j = 0, \dots, k-1\} \quad (2.14)$$

– двоичный интервал ранга k на G . Если $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq (2^k - 1) \cdot \mathbf{1}$, то выражение $\Delta_k^{\mathbf{i}}$ далее будет означать *двоичный куб* ранга k на G^d в следующей форме:

$$\Delta_k^{\mathbf{i}} = \Delta_k^{i_1} \times \dots \times \Delta_k^{i_d}. \quad (2.15)$$

Здесь $\Delta_k^{i_u}$ ($u = 1, \dots, d$) определяются формулой (2.14). Куб $\Delta_k^{\mathbf{i}}$ можно представлять как множество

$$\left[\frac{i_1}{2^k}, \frac{i_1+1}{2^k} - 0 \right] \times \dots \times \left[\frac{i_d}{2^k}, \frac{i_d+1}{2^k} - 0 \right] \subset ([0, 1]^*)^d.$$

Топология на G^d состоит из всевозможных объединений двоичных кубов, причем последние одновременно открыты и замкнуты в такой топологии. Под *мерой* μ на G^d понимается нормированная мера Хаара [15; приложение 1], которая определена, по крайней мере, на всех борелевских подмножествах $E \subset G^d$. При этом

$$\mu(\Delta_k^{\mathbf{i}}) = \frac{1}{2^{kd}}. \quad (2.16)$$

Пусть $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_d) \in \mathbb{N}^d$, $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}-1} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$ – $\mathbf{N}$ -я *прямоугольная частичная сумма* ряда (1.3) в точке $\mathbf{t} \in G^d$. Ряд (1.3) *сходится по прямоугольникам*, по кубам или по двоичным кубам к значению A в точке $\mathbf{t}$, если соответственно $S_{\mathbf{N}}(\mathbf{t}) \rightarrow A$ при $\min_i \{N_i\} \rightarrow \infty$, $\lim_{N \rightarrow \infty} S_{N \cdot \mathbf{1}}(\mathbf{t}) = A$ или $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2^k \cdot \mathbf{1}}(\mathbf{t}) = A$. Если зафиксировать точку $\mathbf{t}$, то из сходимости ряда (1.3) по прямоугольникам следует его сходимость к тому же значению по кубам, а сходимость по кубам влечет сходимость к тому же значению по двоичным кубам.

Пусть $\mathcal{I}$ – кольцо, состоящее из конечных объединений двоичных кубов. Конечнo-аддитивные функции $\psi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ называются *квазимерами*. Каждый ряд (1.3) порождает квазимеру ψ , значение которой на любом двоичном кубе Δ ранга k определяется так:

$$\psi(\Delta) = S_{2^k \cdot \mathbf{1}}(\mathbf{t}) \mu(\Delta). \quad (2.17)$$

Здесь $\mathbf{t}$ – произвольная точка куба Δ . Соответствие между рядами (1.3) и порожденными ими квазимерами является линейным изоморфизмом, если естественным образом наделить множество рядов (1.3) и множество квазимер структурой линейного пространства. Следующий технический результат, доказанный в работе [16; лемма 1], играет ключевую роль при доказательстве теоремы 1.

ЛЕММА А1. Пусть (S) – ряд вида (1.3), ψ – порожденная этим рядом квазимера, а Δ – двоичный куб. Если ряд (S) сходится по двоичным кубам к нулю всюду на Δ , то $\psi(\Delta) = 0$.

3. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть заданы $k \in \mathbb{Z}_+$, а также натуральные $r \geq k$ и q . Для каждого вектора $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ такого, что $\mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq (2^k - 1) \cdot \mathbf{1}$, рассмотрим множество

$$W_{\mathbf{p}, k, r, q} = \{\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}_+^d : (2^{r+q-k} \mathbf{p} \leq \mathbf{i} \leq 2^{r+q-k}(\mathbf{p} + \mathbf{1}) - \mathbf{1}) \wedge (i_1 \oplus \dots \oplus i_d = 0 \pmod{2^q})\}. \quad (3.1)$$

Тогда отображение $\mathbf{l} \mapsto \mathbf{l} \oplus 2^{r+q-k} \mathbf{p}$ взаимно-однозначно отображает $W_{\mathbf{0}, k, r, q}$ на $W_{\mathbf{p}, k, r, q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что пара $(\mathbb{Z}_+^d, \oplus)$ является абелевой группой,

$$(\mathbf{l}_1 \oplus 2^{r+q-k} \mathbf{p} = \mathbf{l}_2 \oplus 2^{r+q-k} \mathbf{p}) \iff (\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2). \quad (3.2)$$

Выберем и зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in W_{\mathbf{0}, k, r, q}$. Пусть

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d) = \mathbf{l} \oplus 2^{r+q-k} \mathbf{p}. \quad (3.3)$$

Легко видеть, что

$$(\mathbf{0} \leq \mathbf{l} \leq (2^{r+q-k} - 1)\mathbf{1}) \iff (2^{r+q-k} \mathbf{p} \leq \mathbf{l} + 2^{r+q-k} \mathbf{p} \leq 2^{r+q-k}(\mathbf{p} + \mathbf{1}) - \mathbf{1}). \quad (3.4)$$

Из предложения 3 вытекает, что двоичная сумма векторов $\mathbf{l}$ и $2^{r+q-k} \mathbf{p}$ совпадает с обычной их суммой. В связи с этим, из (3.3) и (3.4) получаем, что

$$(\mathbf{0} \leq \mathbf{l} \leq (2^{r+q-k} - 1)\mathbf{1}) \iff (2^{r+q-k} \mathbf{p} \leq \mathbf{i} \leq 2^{r+q-k}(\mathbf{p} + \mathbf{1}) - \mathbf{1}). \quad (3.5)$$

Наконец, в силу того, что $r \geq k$ и двоичная сумма векторов $\mathbf{l}$ и $2^{r+q-k} \mathbf{p}$ совпадает с обычной их суммой, соответствующие координаты векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{l}$ равны между собой $\pmod{2^q}$. Отсюда получаем, что

$$(l_1 \oplus \dots \oplus l_d = 0 \pmod{2^q}) \iff (i_1 \oplus \dots \oplus i_d = 0 \pmod{2^q}). \quad (3.6)$$

Теперь утверждение леммы следует из формул (3.2), (3.5) и (3.6).

ЛЕММА 2. Пусть заданы $k \in \mathbb{Z}_+$, а также натуральные $r \geq k$ и q . Тогда

- 1) множество $W_{\mathbf{0},k,r,q}$, определяемое формулой (3.1), совпадает с множеством $\widehat{W}_{\mathbf{0},k,r,q}$ векторов $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ таких, что $0 \leq l_1, \dots, l_{d-1} \leq 2^{r+q-k} - 1$ и

$$l_d = l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus (2^q v) \quad (3.7)$$

при некотором $v \in \{0, \dots, 2^{r-k} - 1\}$;

- 2) при фиксированных $l_1, \dots, l_d$ число v из (3.7) определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in W_{\mathbf{0},k,r,q}$, в частности, $l_1 \oplus \dots \oplus l_d = 0 \pmod{2^q}$. Отсюда получаем, с учетом неравенства $\mathbf{l} \leq (2^{r+q-k} - 1) \cdot \mathbf{1}$, соотношение

$$l_1 \oplus \dots \oplus l_d = 2^q v, \quad v \in \{0, \dots, 2^{r-k} - 1\}.$$

Тогда $l_d = l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus (2^q v)$ и $\mathbf{l} \in \widehat{W}_{\mathbf{0},k,r,q}$.

Пусть, обратно, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d) \in \widehat{W}_{\mathbf{0},k,r,q}$. Тогда $l_1, \dots, l_{d-1}, 2^q v \leq 2^{r+q-k} - 1$, в связи с чем

$$l_d = l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus (2^q v) \leq 2^{r+q-k} - 1. \quad (3.8)$$

Далее для вектора $\mathbf{l}$ при некотором $v \in \{0, \dots, 2^{r-k} - 1\}$ справедливо равенство (3.7). Значит,

$$l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus l_d = l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus (2^q v) = 2^q v.$$

Поэтому $l_1 \oplus \dots \oplus l_d = 0 \pmod{2^q}$, откуда с учетом (3.8) получаем, что $\mathbf{l} \in W_{\mathbf{0},k,r,q}$. Утверждение 1) леммы доказано.

Докажем утверждение 2). Если $l_d = l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus (2^q v)$, то

$$2^q v = l_d \oplus l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1}$$

и v определяется однозначно. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть заданы $k \in \mathbb{Z}_+$, вектор $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ такой, что $\mathbf{0} \leq \mathbf{p} \leq (2^k - 1) \cdot \mathbf{1}$, а также натуральные $r \geq k$ и q . Рассмотрим множество $W_{\mathbf{p},k,r,q}$, определяемое формулой (3.1), ряд (S) вида (1.3), квазимеру ψ , порожденную этим рядом, а также двоичные кубы $\Delta_{r+q}^{\mathbf{i}}$ в форме (2.15). Тогда

$$\sum_{\mathbf{i} \in W_{\mathbf{p},k,r,q}} \psi(\Delta_{r+q}^{\mathbf{i}}) = \frac{1}{2^{q+kd}} \sum \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}}, \quad (3.9)$$

где сумма справа распространяется на все $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ такие, что

$$(n_d \in V_{k,r,r+q}) \wedge (n_u \oplus n_d \in \{0, \dots, 2^k - 1\}) \text{ для всех } u = 1, \dots, d-1. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{i} \in W_{\mathbf{p}, k, r, q}} \psi(\Delta_{r+q}^{\mathbf{i}}) \stackrel{(2.16), (2.17)}{=} \frac{1}{2^{(r+q)d}} \sum_{\mathbf{i} \in W_{\mathbf{p}, k, r, q}} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{(2^{r+q}-1) \cdot \mathbf{1}} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{r+q}} \right) \\
 &= \frac{1}{2^{(r+q)d}} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{(2^{r+q}-1) \cdot \mathbf{1}} b_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i} \in W_{\mathbf{p}, k, r, q}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{i}}{2^{r+q}} \right) \\
 &\stackrel{\text{лемма 1}}{=} \frac{1}{2^{(r+q)d}} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{(2^{r+q}-1) \cdot \mathbf{1}} b_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{l} \in W_{\mathbf{0}, k, r, q}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{l} \oplus 2^{r+q-k} \mathbf{p}}{2^{r+q}} \right) \\
 &\stackrel{(2.2), (2.9)}{=} \frac{1}{2^{(r+q)d}} \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{(2^{r+q}-1) \cdot \mathbf{1}} b_{\mathbf{n}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) \sum_{\mathbf{l} \in W_{\mathbf{0}, k, r, q}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{l}}{2^{r+q}} \right). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Вычислим последнюю сумму в формуле (3.11). Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d)$. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mathbf{l} \in W_{\mathbf{0}, k, r, q}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{l}}{2^{r+q}} \right) \\
 &\stackrel{(2.8), \text{лемма 2}}{=} \sum_{l_1, \dots, l_{d-1}=0}^{2^{r+q-k}-1} \sum_{v=0}^{2^{r-k}-1} \omega_{n_d} \left(\frac{l_1 \oplus \dots \oplus l_{d-1} \oplus 2^q v}{2^{r+q}} \right) \prod_{u=1}^{d-1} \omega_{n_u} \left(\frac{l_u}{2^{r+q}} \right) \\
 &\stackrel{(2.2), (2.9)}{=} \sum_{l_1, \dots, l_{d-1}=0}^{2^{r+q-k}-1} \sum_{v=0}^{2^{r-k}-1} \omega_{n_d} \left(\frac{v}{2^r} \right) \prod_{u=1}^{d-1} \omega_{n_d} \left(\frac{l_u}{2^{r+q}} \right) \prod_{u=1}^{d-1} \omega_{n_u} \left(\frac{l_u}{2^{r+q}} \right) \\
 &\stackrel{(2.9)}{=} \left(\sum_{v=0}^{2^{r-k}-1} \omega_{n_d} \left(\frac{v}{2^r} \right) \right) \prod_{u=1}^{d-1} \left(\sum_{l_u=0}^{2^{r+q-k}-1} \omega_{n_u \oplus n_d} \left(\frac{l_u}{2^{r+q}} \right) \right). \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Правая часть формулы (3.12) не равна нулю в том и только том случае, когда все суммы в ней являются ненулевыми, т.е., в силу предложения 6, тогда и только тогда, когда

$$(n_d \in V_{k, r, r+q}) \wedge (n_1 \oplus n_d \in V_{k, r+q, r+q}) \wedge \dots \wedge (n_{d-1} \oplus n_d \in V_{k, r+q, r+q}).$$

Согласно определению множеств $V_{a, b, c}$ последнее отношение равносильно тому, что

$$(n_d \in V_{k, r, r+q}) \wedge (n_u \oplus n_d \in \{0, \dots, 2^{k-1}\} \text{ для всех } u = 1, \dots, d-1).$$

Отсюда, снова учитывая предложение 6, а также формулу (3.12), получаем, что если $\mathbf{0} \leq \mathbf{n} \leq (2^{r+q}-1) \mathbf{1}$, то

$$\sum_{\mathbf{l} \in W^{\mathbf{0}}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{l}}{2^{r+q}} \right) = \begin{cases} 2^{(r+q-k)d-q}, & \text{если } n_d \in V_{k, r, r+q} \text{ и } n_u \oplus n_d \in \{0, \dots, 2^k - 1\} \\ & \text{для всех } u = 1, \dots, d-1; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.13}$$

Из формул (3.11) и (3.13) получаем

$$\sum_{\mathbf{i} \in W^{\mathbf{p}}} \psi(\Delta_{r+q}^{\mathbf{i}}) = \frac{1}{2^{(r+q)d}} 2^{(r+q-k)d-q} \sum \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2^{q+kd}} \sum \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}}, \quad (3.14)$$

где две последние суммы распространяются на те $\mathbf{n}$, для которых выполнено условие (3.10). Формула (3.14) доказывает лемму.

4. Доказательство основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Зафиксируем последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$, а также $\delta > 0$. Выберем произвольную последовательность $\{q_s\}_{s=1}^{\infty}$ натуральных чисел такую, что

$$\prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{q_s}} \right) > 1 - \delta. \quad (4.1)$$

Воспользуемся тем, что $\varepsilon_n \rightarrow 0$, а $C_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждого $s = 1, 2, \dots$ выберем достаточно большое натуральное r_s таким образом, чтобы

$$\varepsilon_n < \frac{1}{s2^{q_s}} \quad \text{для всех } n \geq 2^{r_s}, \quad (4.2)$$

$$2^{q_s} \leq C_n \quad \text{для всех } n \geq 2^{r_s}. \quad (4.3)$$

Потребуем также, чтобы последовательность $\{r_s\}_{s=1}^{\infty}$ обладала тем свойством, что

$$r_{s+1} \geq r_s + q_s + 1 \quad \text{для всех } s = 1, 2, \dots. \quad (4.4)$$

Рассмотрим множества

$$U_s = \cup \Delta_{r_s+q_s}^{\mathbf{i}}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

где объединение берется по всем векторам $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_+^d$ таким, что

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{i} \leq (2^{r_s+q_s} - 1) \cdot \mathbf{1}, \quad i_1 \oplus \dots \oplus i_d = 0 \pmod{2^{q_s}}. \quad (4.6)$$

Пусть

$$U = \bigcup_{s=1}^{\infty} U_s, \quad H = G^d \setminus U. \quad (4.7)$$

В рамках доказательства теоремы установим следующий результат.

ЛЕММА 4. Имеем $\mu(H) > 1 - \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Рассмотрим множества

$$H_0 = G^d, \quad H_s = G^d \setminus \left(\bigcup_{l=1}^s U_l \right), \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (4.8) вытекает, что

$$H_{s-1} \supset H_s \quad \text{для всех } s \in \mathbb{N}, \quad H = \bigcap_{s=0}^{\infty} H_s, \quad (4.9)$$

$$H_s = H_{s-1} \setminus (H_{s-1} \cap U_s) \quad \text{для всех } s \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Выберем и зафиксируем произвольное $s \in \mathbb{N}$. Из (4.4), (4.5) и (4.8) получаем, что множество H_{s-1} можно разбить на конечное число непересекающихся двоичных кубов ранга r_s . При этом в каждом кубе Δ из этого разбиения будет лежать ровно $2^{(d-1)q_s}$ непересекающихся двоичных кубов ранга $r_s + q_s$ из правой части формулы (4.5). Учитывая (2.16), имеем

$$\begin{aligned}\mu(\Delta \cap U_s) &= 2^{(d-1)q_s} \frac{1}{2^{d(r_s+q_s)}} = \frac{1}{2^{q_s}} \frac{1}{2^{dr_s}} = \frac{1}{2^{q_s}} \mu(\Delta) \\ \implies \mu(H_{s-1} \cap U_s) &= \frac{1}{2^{q_s}} \mu(H_{s-1}),\end{aligned}$$

откуда с учетом (4.10)

$$\mu(H_s) = \left(1 - \frac{1}{2^{q_s}}\right) \mu(H_{s-1}). \quad (4.11)$$

Тогда

$$\mu(H) \stackrel{(4.9), (4.11)}{=} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{q_s}}\right) \stackrel{(4.1)}{>} 1 - \delta,$$

что доказывает лемму.

Вернемся к доказательству теоремы. Множество H , определенное формулами (4.5)–(4.7), является замкнутым, как разность замкнутого и открытого множеств. Из (4.5)–(4.7) также вытекает, что множество H не имеет изолированных точек, т.е. оно совершенно. Согласно лемме 4 $\mu(H) > 1 - \delta$. Остается доказать, что если коэффициенты ряда (1.3), сходящегося по двоичным кубам к нулю на множестве $G^d \setminus H$, удовлетворяют условию (1.4), то все они равны нулю. Предположим, что это не так, и найдется не тождественно нулевой ряд (S) вида (1.3), коэффициенты которого удовлетворяют условию (1.4), и сходящийся по двоичным кубам к нулю на множестве $G^d \setminus H$. Рассмотрим квазимеру ψ , порожденную рядом (S) (см. формулу (2.17)). Квазимера ψ вместе с рядом (S) не равна нулю тождественно, т.е. $\psi(\Delta_k^{\mathbf{P}}) \neq 0$ для некоторого двоичного куба $\Delta_k^{\mathbf{P}}$. Заменяя, если необходимо, ряд (S) на ряд с противоположными коэффициентами, получим, что

$$\psi(\Delta_k^{\mathbf{P}}) = M_0 > 0. \quad (4.12)$$

Фиксируем $\mathbf{p}$ и k . Возьмем множества $W_{\mathbf{p},k,r,q}$, определяемые формулой (3.1). Пусть

$$L_s = \psi(\Delta_k^{\mathbf{P}}) - 2^{q_s} \sum_{\mathbf{i} \in W_{\mathbf{p},k,r_s,q_s}} \psi(\Delta_{r_s+q_s}^{\mathbf{i}}). \quad (4.13)$$

С одной стороны, из (2.16), (2.17), (3.9) и (3.10) вытекает, что формулу (4.13) можно записать в виде

$$L_s = \Omega_1 - 2^{q_s} \Omega_2 - 2^{q_s} \Omega_3, \quad (4.14)$$

$$\Omega_1 = \frac{1}{2^{kd}} \sum_{\mathbf{n}=0}^{(2^k-1) \cdot 1} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}}, \quad (4.15)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2^{q_s+kd}} \sum_1 \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}}, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2^{q_s+kd}} \sum_2 \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}}. \quad (4.16)$$

Первая сумма в (4.16) распространяется на все $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ такие, что

$$n_d, \quad n_1 \oplus n_d, \quad \dots, \quad n_{d-1} \oplus n_d \in \{0, \dots, 2^k - 1\}, \quad (4.17)$$

а вторая – на такие, что

$$(n_d \in V_{k, r_s, r_s+q_s} \setminus \{0, \dots, 2^k - 1\}) \\ \wedge (n_u \oplus n_d \in \{0, \dots, 2^k - 1\} \text{ для всех } u = 1, \dots, d-1). \quad (4.18)$$

В рамках доказательства теоремы установим следующий результат.

ЛЕММА 5. Число векторов $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, координаты которых удовлетворяют условию (4.18), не превосходит 2^{q_s+kd} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Будем выбирать всевозможные $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, координаты которых удовлетворяют условию (4.18). Из предложения 5 вытекает, что мощность множества V_{k, r_s, r_s+q_s} равна 2^{k+q_s} . Поэтому координату n_d вектора $\mathbf{n}$ можно выбрать менее чем 2^{k+q_s} способами. При фиксированном n_d любую из остальных $d-1$ координат вектора $\mathbf{n}$ можно выбрать 2^k способами. Тогда вектор $\mathbf{n}$ можно выбрать не более чем

$$2^{k+q_s} \cdot (2^k)^{d-1} = 2^{q_s+kd}$$

способами, что и требовалось.

Вернемся к доказательству теоремы. Из формул (4.16) и (4.17) вытекает, что

$$\Omega_2 = \frac{1}{2^{q_s+kd}} \sum_{\mathbf{n}=0}^{(2^k-1) \cdot \mathbf{1}} \omega_{\mathbf{n}} \left(\frac{\mathbf{p}}{2^k} \right) b_{\mathbf{n}}, \quad (4.19)$$

откуда, с учетом (4.15), следует равенство

$$\Omega_1 = 2^{q_s} \Omega_2. \quad (4.20)$$

Далее, возьмем и зафиксируем произвольное достаточно большое натуральное s такое, что

$$\frac{1}{s} < M_0. \quad (4.21)$$

Так как коэффициенты $b_{\mathbf{n}}$ ряда (S) удовлетворяют условию (1.4), из формул (4.2), (4.3) и (4.21) получаем, что если

$$(n_d \geq 2^{r_s}) \wedge (|n_u - n_d| \leq 2^{q_s} \text{ для всех } u = 1, \dots, d-1), \quad (4.22)$$

то

$$|b_{n_1, \dots, n_d}| < \frac{M_0}{2^{q_s}}. \quad (4.23)$$

Пусть координаты вектора $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$ удовлетворяют условию (4.18). Тогда для них справедливо и условие (4.22), а, значит, и условие (4.23). Из этого факта и формулы (4.16) получаем

$$|2^{q_s} \Omega_3| \leq 2^{q_s} \frac{1}{2^{q_s+kd}} \sum_2 |b_{\mathbf{n}}| \stackrel{\text{лемма 5, (4.23)}}{<} 2^{q_s} \frac{1}{2^{q_s+kd}} 2^{q_s+kd} \frac{M_0}{2^{q_s}} = M_0. \quad (4.24)$$

Из (4.14)–(4.16), (4.20) и (4.24) получаем, в силу произвольности s , что

$$|L_s| < M_0 \quad \text{для всех достаточно больших } s. \quad (4.25)$$

С другой стороны, из (3.1), (4.5) и (4.6) вытекает, что при $r_s \geq k$

$$\Delta_{r_s+q_s}^{\mathbf{i}} \subset G^d \setminus H \quad \text{для всех } \mathbf{i} \in W_{\mathbf{p},k,r_s,q_s}. \quad (4.26)$$

Так как ряд (S) сходится по двоичным кубам к нулю на множестве $G^d \setminus H$, то (4.26) означает, в силу леммы A1, что

$$\psi(\Delta_{r_s+q_s}^{\mathbf{i}}) = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{i} \in W_{\mathbf{p},k,r_s,q_s}. \quad (4.27)$$

Из (4.12), (4.13) и (4.27) вытекает равенство

$$L_s = M_0 \quad \text{для всех достаточно больших } s. \quad (4.28)$$

Соотношения (4.25) и (4.28) противоречат друг другу, что означает справедливость утверждения теоремы. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Zygmund, “Contribution á l’unicité du développement trigonométrique”, *Math. Zeit.*, **24** (1926), 40–46.
- [2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, ГИФМЛ, М., 1961.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [4] J.-P. Kahane, Y. Katznelson, “Sur les ensembles d’unicité $U(\varepsilon)$ de Zygmund”, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A*, **277** (1973), 893–895.
- [5] Ш. Т. Тетунашвили, “О единственности кратных тригонометрических рядов”, *Матем. заметки*, **58:4** (1995), 596–603.
- [6] V. L. Shapiro, “ $U(\varepsilon)$ -sets for Walsh series”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16:5** (1965), 867–870.
- [7] А. В. Бахшеян, “Об $U(\varepsilon)$ -множествах полной меры для системы Уолша”, *Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем.*, **16** (1981), 431–443.
- [8] Г. Г. Геворкян, “О множествах единственности для систем Хаара и Уолша”, *Докл. АН Арм. ССР*, **73:2** (1981), 91–96.
- [9] Н. Н. Холщевникова, “Объединение множеств единственности кратных рядов – Уолша и тригонометрических”, *Матем. сб.*, **193:4** (2002), 135–160.
- [10] N. J. Fine, “On the Walsh functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65:3** (1949), 372–414.
- [11] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, ЭЛМ, Баку, 1981.
- [12] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применение*, Наука, М., 1987.
- [13] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
- [14] Н. Я. Виленкин, “Об одном классе полных ортонормальных систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11:4** (1947), 363–400.
- [15] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал Пресс, М., 2004.
- [16] М. Г. Плотников, “О множествах единственности для кратных рядов Уолша”, *Матем. заметки*, **81:2** (2007), 265–279.

М. Г. Плотников

Вологодская государственная молочнохозяйственная
академия им. Н. В. Верещагина
E-mail: mgplotnikov@mail.ru

Поступило

27.12.2012

Исправленный вариант

16.04.2013