Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Акбаров, Преобразование Гельфанда как C^* -оболочка, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 777–779

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 11:25:57

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Преобразование Гельфанда как C^* -оболочка

С. С. Акбаров

В работе [1] автором было введено понятие *стереотипного пространства* как локально выпуклого пространства X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, канонически изоморфного своему второму сопряженному пространству X^{**} ,

$$X \cong X^{**},$$

где под сопряженным пространством X^* понимается пространство линейных непрерывных функционалов $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X . Известно [1], что класс стереотипных пространств весьма широк, поскольку включает в себя все квазиполные бочечные пространства (в частности, все банаховы пространства и все пространства Фреше).

Стереотипное пространство A над $\mathbb{C}$ называется *стереотипной алгеброй* [1], [2], если на нем задана структура ассоциативной алгебры с единицей, причем операция умножения непрерывна в следующем смысле: для всякой окрестности нуля U и любого вполне ограниченного множества K в A существует окрестность нуля V в A такая, что

$$V \cdot K \subseteq U, \quad K \cdot V \subseteq U.$$

Условимся стереотипную алгебру A над $\mathbb{C}$ называть *инволютивной*, если на ней задана операция инволюции, т.е. сопряженно-линейное отображение $a \mapsto \bar{a}$ такое, что $\bar{\bar{a}} = a$ и $\overline{a \cdot b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (см., например, [3] или [4]), причем эта операция непрерывна как отображение A в A . Инволютивные стереотипные алгебры образуют категорию InvSteAlg , в которой морфизмами считаются непрерывные инволютивные сохраняющие единицу гомоморфизмы $\varphi: A \rightarrow B$ (мы будем называть такие отображения *гомоморфизмами инволютивных стереотипных алгебр*):

$$\varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot \varphi(x) + \mu \cdot \varphi(y), \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y), \quad \varphi(1) = 1, \quad \varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}.$$

Гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow B$ в категории InvSteAlg мы называем *плотным эпиморфизмом*, если образ $\varphi(A)$ алгебры A плотен в алгебре B . Класс всех плотных эпиморфизмов в InvSteAlg мы обозначаем DEpi . Классы Mor всех морфизмов и Epi всех эпиморфизмов определяются обычным образом.

Приводимая ниже конструкция C^* -оболочки обобщает на стереотипный случай определение, данное Кузнецовой в [5].

Гомоморфизм $\sigma: A \rightarrow A'$ инволютивных стереотипных алгебр условимся называть *стереотипным C^* -расширением алгебры A в классе гомоморфизмов Ω* , если $\sigma \in \Omega$, и для

любой C^* -алгебры B и любого гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ найдется единственный гомоморфизм $\varphi': A' \rightarrow B$, замыкающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \Omega \ni \sigma \swarrow & & \searrow \varphi \\ A' & \text{---} \text{---} \text{---} & B \\ & \varphi' & \end{array}$$

Стереотипное C^* -расширение $\rho: A \rightarrow E$ инволютивной стереотипной алгебры A в классе гомоморфизмов Ω мы называем *стереотипной C^* -оболочкой* алгебры A в классе гомоморфизмов Ω , и мы будем обозначать это записью

$$\rho = \text{env}_{C^*}^{\Omega} A,$$

если для любого другого стереотипного C^* -расширения $\sigma: A \rightarrow A'$ (алгебры A в классе Ω) найдется единственный гомоморфизм $v: A' \rightarrow E$, для которого будет коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \rho \\ A' & \text{---} \text{---} \text{---} & E \\ & v & \end{array}$$

Саму алгебру E мы также будем называть *стереотипной C^* -оболочкой* алгебры A (в классе гомоморфизмов Ω) и обозначать это будем записью

$$E = \text{Env}_{C^*}^{\Omega} A.$$

Стереотипная C^* -оболочка не обязана быть C^* -алгеброй; как правило, это просто проактивный предел C^* -алгебр в категории стереотипных алгебр, см. [6].

Инволютивным спектром $\text{Spec}(A)$ инволютивной стереотипной алгебры A над $\mathbb{C}$ мы называем множество ее инволютивных характеров, т.е. гомоморфизмов $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$ (также непрерывных, инволютивных и сохраняющих единицу). Это множество мы наделяем топологией равномерной сходимости на компактах в A .

Пусть A – инволютивная стереотипная алгебра с локально компактным паракомпактным инволютивным спектром $M = \text{Spec}(A)$. Ее *преобразованием Гельфанда* мы называем естественное отображение $\mathcal{G}_A: A \rightarrow C(M)$ в алгебру $C(M)$ непрерывных функций на $M = \text{Spec}(A)$:

$$\mathcal{G}_A(x)(t) = t(x), \quad t \in M = \text{Spec}(A), \quad x \in A. \quad (1)$$

Алгебру $C(M)$ мы при этом наделяем топологией равномерной сходимости на компактах в M (и это превращает ее в инволютивную стереотипную алгебру, а преобразование Гельфанда – в гомоморфизм инволютивных стереотипных алгебр).

ТЕОРЕМА 1. *Если A – коммутативная инволютивная стереотипная алгебра с паракомпактным локально компактным инволютивным спектром $M = \text{Spec}(A)$, то ее стереотипной C^* -оболочкой в классах Mor всех морфизмов, Epi всех эпиморфизмов и DEpi всех плотных эпиморфизмов является алгебра $C(M)$ непрерывных функций на M :*

$$\text{Env}_{C^*}^{\text{Mor}} A = \text{Env}_{C^*}^{\text{Epi}} A = \text{Env}_{C^*}^{\text{DEpi}} A = C(M).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. S. Akbarov, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **113**:2 (2003), 179–349. [2] С. С. Акбаров, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 941–944. [3] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, М., 1989. [4] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997. [5] Yu. Kuznetsova, *J. Oper. Theory*, **69**:2 (2013), 571–600. [6] S. S. Akbarov, *Envelopes and Imprints in Categories*, arXiv: 1110.2013.

С. С. Акбаров

Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: sergei.akbarov@gmail.com

Поступило

25.12.2012