Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Голдаева, Границы экстремального индекса рекуррентных стохастических последовательностей, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 349–355

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 09:47:01

Границы экстремального индекса рекуррентных стохастических последовательностей

А. А. Голдаева

Работа посвящена изучению экстремального индекса некоторых стохастических рекуррентных последовательностей и получению границ для тех случаев, когда в явном виде его посчитать нельзя.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10179

1. Введение. Рассмотрим процесс Y_n , $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому разностному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \quad (1)$$

где (A_n, B_n) , $n \geq 1$, – независимые, одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Известно, что стационарные процессы вида (1) при довольно общих условиях обладают двумя важными свойствами, относящимися к поведению их экстремумов: маргинальное распределение стационарной последовательности имеет степенной хвост, а максимум $M_n = \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ при $n \rightarrow \infty$ растет асимптотически, как максимум $[\theta n]$ независимых случайных величин с тем же распределением, где θ есть экстремальный индекс процесса Y_n .

Напомним [1], что стационарная случайная последовательность Y_n с маргинальной функцией распределения $G(x)$ имеет экстремальный индекс θ , если для любого $\tau > 0$ существует такая последовательность $u_n(\tau)$, что

- 1) $n\bar{G}(u_n(\tau)) \rightarrow \tau$ при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $P(M_n \leq u_n(\tau)) \rightarrow \exp(-\theta\tau)$, $n \rightarrow \infty$.

Напомним также, что функция распределения $G(x)$ имеет степенной хвост со степенным индексом κ , если $\bar{G}(x) \sim Cx^{-\kappa}$, $x \rightarrow \infty$.

Процессы (1) изучаются, начиная с работы [2]. В работе [3], которая посвящена исследованию двух числовых характеристик – индекса хвоста κ и экстремального индекса θ , найдены общие формулы для них, но они не дают ответа в явном виде и результат может быть получен только численно. Так, в [3] доказана

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00050).

ТЕОРЕМА 1. Пусть процесс $Y_n, n \geq 1$, удовлетворяет уравнению (1), и пусть

- 1) существует такое число $\kappa > 0$, что $EA_1^\kappa = 1, EA_1^\kappa \ln^+ A_1 < \infty, 0 < EB_1^\kappa < \infty$;
- 2) распределение $B_1/(1 - A_1)$ невырожденное, а распределение $\ln A_1$ при условии, что $A_1 \neq 0$, не решетчатое.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) уравнение $Y_\infty \stackrel{d}{=} A_1 Y_\infty + B_1$, где Y_∞ и (A_1, B_1) независимы, имеет единственное решение $Y_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^\infty B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i$;
- 2) если в (1) положить $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_\infty$, то процесс $\{Y_n\}$ будет стационарным;
- 3) при любом начальном условии процесса $\{Y_n\}$ имеет место $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty, n \rightarrow \infty$;
- 4) существует постоянная $c > 0$ такая, что $P(Y_\infty > x) \sim cx^{-\kappa}$ при $x \rightarrow \infty$;
- 5) процесс Y_n имеет экстремальный индекс θ , вычисляемый по формуле

$$\theta = \int_1^\infty P\left(\max_{j=1, \infty} \prod_{i=1}^j A_i \leq y^{-1}\right) \kappa y^{-\kappa-1} dy,$$

причем $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n^{-1/\kappa} M_n \leq x) = \exp(-c\theta x^{-\kappa})$ для всех $x > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поведение процесса (1) в достаточно общем случае определяется только величинами A_n . Другими словами, если два процесса вида (1) заданы парами случайных величин (A_n, B_n) и $(A_n, \tilde{B}_n)$, $n \geq 1$, соответственно, причем эти пары удовлетворяют условиям 1, 2 теоремы 1, то оба процесса имеют одинаковые индексы хвоста κ и одинаковые экстремальные индексы θ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 утверждает, что индекс κ существует, но определяет его как решение некоторого уравнения, которое в общем случае не решается в явном виде, хотя может иметь решение в некоторых частных случаях. Также теорема 1 дает лишь общую формулу для экстремального индекса, применение которой на практике затруднительно.

В работе [4] была найдена явная формула индекса хвоста κ , для чего был предложен новый подход, состоящий в рассмотрении некоторых последовательностей, удовлетворяющих (1), как последовательностей наблюдений процесса с непрерывным временем, заданного стохастическим дифференциальным уравнением, и доказана

ТЕОРЕМА 2 [4]. Пусть

$$A \stackrel{d}{=} e^{a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi}, \quad \text{где } \xi \sim N(0; 1),$$

случайная величина $\Delta \geq 0$, не зависит от ξ и

$$E\Delta^{-2a/\sigma^2+1} < \infty, \quad a < 0, \quad \sigma > 0.$$

Рассмотрим процесс $(X_t)_{t \geq 0}$, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$dX_t = \left(c + \left(a + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot X_t\right) dt + \sigma X_t dW_t, \quad X_0 = x,$$

где W – стандартное броуновское движение, $c > 0, a + \sigma^2/2 < 0, \sigma > 0$; $\Delta_n \stackrel{d}{=} \Delta$ независимы в совокупности и не зависят от процесса W ; $T_n = \sum_{i=1}^n \Delta_i, Y_n = X_{T_n}$,

$n \geq 1$. Тогда последовательность Y_n удовлетворяет всем условиям теоремы 1 с $A_n \stackrel{d}{=} A$, $n \geq 1$, и индекс $\kappa = -2a/\sigma^2$.

К данному классу распределений, помимо нормального, относятся, в частности, асимметричное лапласовское, для которого θ находится в явном виде (см. [5]), и обобщенные гиперболические распределения (см. [6; с. 261]), введенные Барндорф-Нильсеном и нашедшие приложения в геологии, теории турбулентности и финансовой математике.

В работе [7] была найдена равномерная верхняя граница экстремального индекса θ и доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда имеет место неравенство

$$\theta \leq \mu \cdot \frac{2a^2}{\sigma^2}, \quad \text{где } \mu = E\Delta.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если $\Delta \stackrel{d}{=} \mu\Delta_0$, где $E\Delta_0 = 1$, то экстремальный индекс θ зависит только от величины $(a/\sigma)\sqrt{\mu}$.

Целью данной работы является получение границ индекса θ для тех случаев, когда в явном виде его посчитать невозможно.

2. Границы экстремального индекса. Рассмотрим одномерный процесс Y_n , $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому рекуррентному уравнению (1). Обозначим $Z_n = \ln A_n$, $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, $n \geq 1$, $T = \max_{n=1, \dots, \infty} S_n$. Тогда верна следующая формула для экстремального индекса (см. [3]):

$$\theta = 1 - Ee^{\kappa \min(T, 0)}.$$

Обозначая $T^+ = \max(0, S_1, S_2, \dots)$, получим $T \stackrel{d}{=} Z_1 + T^+$. Пусть

$$T_{\sup} = \sup_{t \in [0; +\infty)} W_a(t),$$

где $W_a(t) = \sigma W(t) + at$, $W(t)$ – стандартное броуновское движение. Тогда в [6; с. 935] показано, что

$$P(T_{\sup} \leq x) = 1 - e^{(2ax)/\sigma^2}, \quad x > 0.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $Z_n \stackrel{d}{=} a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi$, $n \geq 1$, $\xi \sim N(0, 1)$, Δ – неотрицательная случайная величина, не зависящая от ξ . Тогда имеет место неравенство

$$\check{\theta} \leq \theta \leq \hat{\theta}, \quad \text{где } \check{\theta} = 1 - Ee^{\kappa \min(Z_1 + T_{\sup}, 0)}, \quad \hat{\theta} = 1 - Ee^{\kappa \min(Z_1, 0)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $Z_n \stackrel{d}{=} a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi$, то $S_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, $n \geq 1$, можно рассматривать как наблюдения процесса $W_a(t) = \sigma W(t) + at$, взятые через независимые случайные моменты времени Δ_n , распределенные как Δ . Верхняя грань процесса $W_a(t)$ по всем значениям переменной $t \in [0; +\infty)$ не меньше максимума наблюдений того же процесса в моменты $\Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2, \dots$; отсюда $0 \leq T^+ \leq_d T_{\sup}$. Поскольку $T \stackrel{d}{=} Z_1 + T^+$, то $Z_1 \leq_d T \leq_d Z_1 + T_{\sup}$. Отсюда получаем, что $\check{\theta} \leq \theta \leq \hat{\theta}$. Теорема доказана.

3. Случай логнормального распределения. Рассмотрим случай, когда Δ неслучайна, обозначим $\Delta = h$, $h = \text{const}$; тогда Z_1 имеет нормальное распределение с параметрами ah и $\sigma^2 h$. Вычислим $\hat{\theta}$. Имеем

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= 1 - \mathbf{E} e^{-2a/\sigma^2 \min(Z_1, 0)} \\ &= 1 - \int_{-\infty}^0 e^{-(2a/\sigma^2)x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{h}}} e^{-(x-ah)^2/(2\sigma^2 h)} dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{h}}} e^{-(x-ah)^2/(2\sigma^2 h)} dx \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{h}\right) - \left(1 - \Phi\left(-\frac{a}{\sigma}\sqrt{h}\right)\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{h}\right).\end{aligned}$$

Чтобы найти $\check{\theta}$, вычислим плотность распределения $Z_1 + T_{\text{sup}}$. Имеем

$$\begin{aligned}p_{Z_1+T_{\text{sup}}}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_{T_{\text{sup}}}(t) p_{Z_1}(x-t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(-2a)}{\sigma^2} e^{(2at)/\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{h}}} e^{-(x-t-ah)^2/(2\sigma^2)} dt \\ &= -\frac{2a}{\sigma^2} e^{(ax)/\sigma^2} \Phi\left(\frac{x+ah}{\sigma\sqrt{h}}\right).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\check{\theta} &= 1 - \mathbf{E} e^{\kappa \min(Z_1+T_{\text{sup}}, 0)} = 1 - \mathbf{E} e^{-2a/\sigma^2 \min(Z_1+T_{\text{sup}}, 0)} \\ &= 1 + \frac{2a}{\sigma^2} \left(\int_{-\infty}^0 \Phi\left(\frac{x+ah}{\sigma\sqrt{h}}\right) dx + \int_0^{+\infty} e^{(2ax)/\sigma^2} \Phi\left(\frac{x+ah}{\sigma\sqrt{h}}\right) dx \right) \\ &= 1 + 2\left(\frac{a^2 h}{\sigma^2} - 1\right) \Phi\left(\frac{a\sqrt{h}}{\sigma}\right) + \frac{2a\sqrt{h}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(a^2 h)/(2\sigma^2)}.\end{aligned}$$

Обозначим $s = a\sqrt{\mu}/\sigma = a\sqrt{h}/\sigma$. Тогда

$$\hat{\theta} = 1 - 2\Phi(s), \quad \check{\theta} = 1 + 2(s^2 - 1)\Phi(s) + \frac{2s}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}.$$

Заметим, что при $s \rightarrow 0$

$$\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8} + o(s^5),$$

а

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s - \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} s^3 + \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} s^5 + o(s^5),$$

откуда

$$\check{\theta} = s^2 + \frac{4}{3\sqrt{2\pi}} s^3 - \frac{2}{15\sqrt{2\pi}} s^5 + o(s^5), \quad s \rightarrow 0.$$

Найдем асимптотику $1 - \check{\theta}$ и $1 - \hat{\theta}$ при $a \rightarrow -\infty$. Имеем

$$\begin{aligned}1 - \check{\theta} &= -2\left(\frac{a^2 h}{\sigma^2} - 1\right) \Phi\left(\frac{a\sqrt{h}}{\sigma}\right) - \frac{2a\sqrt{h}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(a^2 h)/(2\sigma^2)} = -2(s^2 - 1)\Phi(s) - \frac{2s}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}, \\ 1 - \hat{\theta} &= 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{h}\right) = 2\Phi(s).\end{aligned}$$

Для нахождения асимптотики воспользуемся тем, что $\Phi(x) \sim \varphi(-x)/(-x)$, $x \rightarrow -\infty$. Тогда при $s \rightarrow -\infty$

$$1 - \check{\theta} \sim -2(s^2 - 1) \left(-\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \right) e^{-s^2/2} - \frac{2s}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s} e^{-s^2/2},$$

$$1 - \hat{\theta} = 2\Phi(s) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{s} e^{-s^2/2}.$$

Таким образом, получаем, что границы дают точную асимптотику при $s \rightarrow -\infty$ и различную при $s \rightarrow 0$.

Рис. 1

На рис. 1 представлены графики зависимости от $s = a\sqrt{h}/\sigma$ индекса θ и его границ в логнормальном случае. Значения θ , полученные компьютерным моделированием, показаны сплошной линией, $\check{\theta}$ – пунктиром и $\hat{\theta}$ – штрих-пунктиром, граница θ из теоремы 2 – крупным пунктиром.

Асимметричным распределением Лапласа называется распределение с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} e^{\alpha x}, & x \leq 0, \\ \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} e^{-\beta x}, & x > 0. \end{cases}$$

В [4] показано, что если случайные величины Δ_n , $n \geq 1$, имеют показательное распределение с параметром λ , то величины Z_n имеют асимметричное распределение Лапласа с

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda + a^2} + a}{\sigma^2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda + a^2} - a}{\sigma^2}. \quad (2)$$

Логлапласовский случай также рассмотрен в [5], где для него найден экстремальный индекс $\theta^* = (1 - \alpha/\beta)^2$. Подставляя в эту формулу (2) с учетом $\mu = 1/\lambda$ и $s = a\sqrt{\mu}/\sigma$, получаем

$$\theta^* = \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{2 + s^2} + s)^2 \right)^2. \quad (3)$$

График зависимости (3) индекса $\theta^*(s)$ показан на рис. 1 двойным штрих-пунктиром.

Заметим, что хотя индекс θ не выражается в явном виде, его можно приблизить, например, многочленом от верхней границы: $\theta = y(\hat{\theta})$. Учитывая, что $y(0) = 0$, $y(1) = 1$ и квадратичный рост в нуле, можно предложить следующий вид искомого многочлена: $y = c_2x^2 + c_3x^3 + (1 - c_2 - c_3)x^4$. Оценивая коэффициенты методом наименьших квадратов, находим $c_2 \approx 2.77029$, $c_3 \approx -2.6112$. Погрешность приближения θ составляет менее 0.005. На рис. 2 изображен график зависимости $\theta = y(\hat{\theta})$.

Рис. 2

4. Вторая равномерная верхняя граница.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $Z_n \stackrel{d}{=} a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi$, $n \geq 1$, $\xi \sim N(0, 1)$, Δ – неотрицательная случайная величина, не зависящая от ξ . Тогда верно следующее неравенство:

$$\theta \leq 1 - 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{\mu}\right),$$

где $\mu = E\Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $g(h) = 1 - 2\Phi((a/\sigma)\sqrt{h})$. Вычисляя ее вторую производную, находим, что

$$g''(h) = \frac{a}{2\sigma\sqrt{2\pi}h^{3/2}} e^{-(a^2h)/(2\sigma^2)} \left(1 + \frac{a^2}{\sigma^2}h\right) < 0$$

при $h > 0$, поскольку $a < 0$. Отсюда следует, что функция $g(h)$ вогнутая. Тогда в силу неравенства Йенсена $Eg(\Delta) \leq g(E\Delta)$. По теореме 5 имеем

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= 1 - Ee^{\kappa \min(Z_1, 0)} \\ &= 1 - Ee^{-2a/\sigma^2 \min(a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi, 0)} = 1 - E(E(e^{-2a/\sigma^2 \min(a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi, 0)} \mid \Delta)) \\ &= 1 - E\left(2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)\right) = E\left(1 - 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)\right) = Eg(\Delta). \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое утверждение. Теорема доказана.

На рис. 1 также видно, что кривая $\theta^*(s)$ проходит ниже обеих верхних границ из теорем 2 и 5. Непосредственным вычислением можно найти, что эти верхние границы пересекаются в точке $s \approx -0.39$.

В общем случае, зная распределение A_n , можно найти значение s следующим образом. Поскольку $Z_n = \ln A_n \stackrel{d}{=} a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\xi$, то $E Z_n = aE\Delta = a\mu$. Далее, поскольку $\kappa = -2a/\sigma^2$, то $a = -\kappa\sigma^2/2$ и $E Z_n = -\kappa\sigma^2\mu/2$, откуда $\sigma\sqrt{\mu} = -\sqrt{-2EZ_n/\kappa}$. Тогда

$$s = \frac{a\sqrt{\mu}}{\sigma} = -\frac{\kappa\sigma\sqrt{\mu}}{2} = -\sqrt{-\frac{\kappa EZ_n}{2}}.$$

Автор приносит благодарность научному руководителю доценту А. В. Лебедеву за постановку задачи и советы, высказанные при написании статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Лидбеттер, Г. Линдгрэн, Х. Ротсен, *Экстремумы случайных последовательностей и процессов*, Мир, М., 1989.
- [2] W. Vervaat, “On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables”, *Adv. in Appl. Probab.*, **11**:4 (1979), 750–783.
- [3] L. de Haan, S. I. Resnick, H. Rootzén, C. G. de Vries, “Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes”, *Stochastic Process. Appl.*, **32** (1989), 213–224.
- [4] А. А. Голдаева, “Использование процессов с непрерывным временем в исследовании стохастических рекуррентных последовательностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 6, 13–18.
- [5] О. С. Новицкая, Е. Б. Яцало, “Экстремальное поведение рекуррентных случайных последовательностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2008, № 5, 6–10.
- [6] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, Т. 1, 2, Фазис, М., 1998.
- [7] А. А. Голдаева, “Равномерная оценка экстремального индекса стохастических рекуррентных последовательностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 2, 51–55.

А. А. Голдаева

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

E-mail: gold_ann@list.ru

Поступило

31.01.2013

Исправленный вариант

02.10.2013