Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Карабаш, О J -самосопряженных дифференциальных операторах, подобных самосопряженным, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 943–944

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1018>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 04:31:40

О J -САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ПОДОБНЫХ САМОСОПРЯЖЕННОМУ

И. М. Карабаш

Пусть $D := -i\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования в $L^2(\mathbb{R})$, $p(z) = z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-1} + \dots + a_1z + a_0$ – полином степени $2n$ с действительными коэффициентами. Ясно, что $L := p(D)$ – самосопряженный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, определенный на соболевском пространстве $W_2^{2n}(\mathbb{R})$. Пусть J – оператор умножения на $\operatorname{sgn} x$, $(Jf)(x) = (\operatorname{sgn} x)f(x)$, $J = J^* = J^{-1}$. Оператор $A = JL = (\operatorname{sgn} x)p(-i\frac{d}{dx})$ является произведением двух самосопряженных некоммутирующих операторов и поэтому несамосопряжен, $A^* = LJ \neq A$. В работе изучается подобие оператора A самосопряженному.

Напомним, что операторы A и B с областями определения $D(A)$ и $D(B)$ в банаховом пространстве X называются *подобными*, если существует автоморфизм T в X такой, что $TD(A) = D(B)$ и $A = T^{-1}BT$.

Если полином $p(t)$ – неотрицательный ($p(t) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$), то $JA = L = L^* \geq 0$, поэтому A – дефинизируемый оператор (см. [1]). Используя теорию Крейна–Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна, Кургус и Найман [2] нашли достаточное условие на неотрицательные полиномы $p(t)$, при которых оператор A подобен самосопряженному.

Исследуя этот вопрос другим методом, мы получили следующий критерий подобия оператора A самосопряженному.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p(z) = z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-1} + \dots + a_1z + a_0$ – полином четной степени с действительными коэффициентами. Тогда оператор $A = (\operatorname{sgn} x)p(D)$ подобен самосопряженному, если и только если полином $p(t)$ неотрицательный.

В работе [3] теорема 1 доказана для случая $p(z) = z^2$.

Как и в [3], наш подход к доказательству теоремы 1 основан на критерии подобия, полученном в [4]–[6].

ТЕОРЕМА 2 [4]–[6]. Замкнутый оператор A с действительным спектром, действующий в гильбертовом пространстве H , подобен самосопряженному тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|R_A(\mu + i\varepsilon)f\|^2 d\mu \leq m_+ \|f\|^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in H, \quad (1)$$

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|R_{A^*}(\mu + i\varepsilon)f\|^2 d\mu \leq m_+^* \|f\|^2 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall f \in H, \quad (2)$$

где $R_A(\lambda) := (A - \lambda I)^{-1}$, а m_+, m_+^* – некоторые константы, не зависящие от $f \in H$.

Нетрудно видеть, что спектры операторов A и A^* действительны. Поэтому достаточно оценить резольвенты операторов A и A^* .

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}_+$ такое, что полиномы $p(z) \mp \lambda$ не имеют кратных корней. Обозначим через $\Xi^\pm = \{\xi_j^\pm(\lambda)\}_1^{2n}$ семейства корней полиномов $p(z) \mp \lambda$. Нетрудно заметить, что каждое из семейств Ξ^+, Ξ^- содержит ровно n элементов из $\mathbb{C}_+$ и ровно n элементов из $\mathbb{C}_-$. Перенумеруем их так, чтобы при $j = 1, \dots, n$ выполнялись условия $\xi_j^+(\lambda) \in \mathbb{C}_+$, $\xi_{2n-j+1}^-(\lambda) \in \mathbb{C}_+$; при $j = n+1, \dots, 2n$ выполнялись условия $\xi_j^+(\lambda) \in \mathbb{C}_-$, $\xi_{2n-j+1}^-(\lambda) \in \mathbb{C}_-$. Обозначим через $\Theta = \{\theta_j(\lambda)\}_1^{2n} := \{\xi_j^+(\lambda)\}_1^n \cup \{\xi_j^-(\lambda)\}_{n+1}^{2n}$ семейство тех корней полиномов $p(z) \mp \lambda$, которые принадлежат $\mathbb{C}_+$.

Пусть $\chi_-(x), \chi_+(x)$ – характеристические функции множеств $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ соответственно. Обозначим $f_\pm(x) := f(x)\chi_\pm(x)$.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$ и $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Если полиномы $p(z) \mp \lambda$ не имеют кратных корней, то

$$\begin{aligned} R_A(\lambda)f(x) &= y_1^+ \chi_+ + y_1^- \chi_- + y_0^+ + y_0^-, \\ R_{A^*}(\lambda)f(x) &= y_1^+ \chi_+ + y_1^- \chi_- + y_0^+ \chi_+ - y_0^+ \chi_- - y_0^- \chi_- + y_0^- \chi_+, \end{aligned}$$

где преобразования Фурье функций $y_i^\pm$ ($i = 0, 1$) имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{y_1^+}(t) &= \frac{\widehat{f_+}(t)}{p(t) - \lambda}, & \widehat{y_0^+}(t) &= - \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{\substack{q=1 \\ r \neq q}}^{2n} \frac{\prod_{r=1}^{2n} (\theta_r - \xi_j^+)}{\prod_{r=1}^{2n} (\theta_r - \theta_q)} \frac{1}{\theta_q - t} \frac{\widehat{f_+}(\xi_j^+)}{p'(\xi_j^+)}, \\ \widehat{y_1^-}(t) &= \frac{\widehat{f_-}(t)}{-p(t) - \lambda}, & \widehat{y_0^-}(t) &= \sum_{j=n+1}^{2n} \sum_{\substack{q=1 \\ r \neq q}}^{2n} \frac{\prod_{r=1}^{2n} (\theta_r - \xi_j^-)}{\prod_{r=1}^{2n} (\theta_r - \theta_q)} \frac{1}{\theta_q - t} \frac{\widehat{f_-}(\xi_j^-)}{p'(\xi_j^-)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Пусть полином $p(t)$ имеет корни нечетной кратности и $f_\alpha(x) := e^{i\alpha x} \chi_+(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ($\alpha \in \mathbb{C}_+$). Тогда на некотором векторе f_α нарушается оценка (1), т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \|R_A(\mu + i\varepsilon)f_\alpha\|_{L^2}^2 d\mu = \infty.$$

Из леммы 2 вытекает необходимость условия теоремы 1.

Из соотношения $\widehat{y_1^\pm}(t) = \widehat{f_\pm}(t)/(\pm p(t) - \lambda)$ и равенства Парсеваля легко вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 3. Имеет место неравенство

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|y_1^\pm(x, \lambda) \chi_\pm(x)\|_{L^2}^2 d\mu \leq \pi \|f_\pm(x)\|_{L^2}^2.$$

ЛЕММА 4. Если полином $p(t)$ неотрицательный, то

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \|y_0^\pm(x, \lambda) \chi_\pm(x)\|_{L^2}^2 d\mu \leq m^\pm \|f_\pm(x)\|_{L^2}^2,$$

где $m^\pm$ – некоторые константы, не зависящие от ε и f .

Доказательство леммы 4 основано на изучении поведения корней полиномов $p(z) \mp \lambda$, теореме вложения Карлесона в пространстве Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ и некоторых свойствах преобразования Гильберта.

Таким образом, если полином $p(t)$ неотрицательный, из лемм 3 и 4 следуют оценки (1), (2), что доказывает достаточность условия теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн М. Г., Лангер Г. // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. С. 39–42.
2. Ćurgus B., Najman B. // Oper. Theory Adv. Appl. (Birkhäuser). 1996. V. 87. P. 95–104.
3. Karabash I. M. // Spectral and Evolutionary Problems. Proc. of the 8th Crimean Autumn Math. Workshop-Symposium. V. 8. Simferopol, 1998. P. 23–26.
4. Набоко С. Н. // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 1. С. 16–27.
5. Маламуд М. М. // Укр. матем. ж. 1985. Т. 37. № 1. С. 49–56.
6. Casteren J. A. van // Pacific J. Math. 1983. V. 104. № 1. P. 241–255.