Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Гладун, Производящая функция для $\sigma(3n - 1)$,
Матем. заметки, 2014, том 95, выпуск 4, 630–634

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:34:43

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Производящая функция для $\sigma(3n - 1)$

С. Е. Гладун

Рамануджаном была получена формула, содержащая производящую функцию для $p(5n - 1)$, где $p(n)$ является числом представлений n в виде суммы натуральных слагаемых [1; с. 130, формула (6.7.1)]:

$$p(4) + p(9)q + p(14)q^2 + p(19)q^3 + \dots = 5 \frac{\{(1 - q^5)(1 - q^{10})(1 - q^{15})(1 - q^{20}) \dots\}^5}{\{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4) \dots\}^6}. \quad (\text{R})$$

В этой статье получена внешне похожая формула для $\sigma(3n - 1)$, где для любого $n \in \mathbb{N}$ $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$ — функция суммы делителей натурального числа n . Итак, в круге $|q| < 1$ справедлива формула

$$\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \sigma(11)q^3 + \dots = 3 \frac{\{(1 - q^3)(1 - q^6)(1 - q^9)(1 - q^{12}) \dots\}^6}{\{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4) \dots\}^2}. \quad (1)$$

Всюду мы полагаем $q = e^{\pi i \tau}$, где $\text{Im } \tau > 0$ и $q^\lambda = e^{\lambda \pi i \tau}$.

Рамануджан никогда не публиковал доказательство формулы (R), однако по всей видимости его рассуждения носили скорее исключительный характер и базировались лишь на выражении для производящей функции числа разбиений, пентагональной теореме Эйлера и формуле Якоби для куба эйлера произведения. Схема подобного доказательства приведена в монографии [2; с. 327–328]. Доказательство формулы (1), данное автором, более существенно использует аппарат тэта-функций и для удобства чтения разделено на несколько простых лемм. В основе доказательства лежат глубокие результаты, полученные ранее.

В рецензии на Собрание сочинений Рамануджана Литтлвуд высказал точку зрения, что нет смысла выводить похожие формулы из круга идей тех областей математики, в которых господствует какая-либо общая теория. Автор не согласен с этой точкой зрения и в качестве аргумента приводит формулу (1), которая является новой и интересной.

Запишем выражения для тройки тэта-функций [3; с. 93]:

$$\begin{aligned} a(q) &:= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{m^2+mn+n^2}, & b(q) &:= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \omega^{m-n} q^{m^2+mn+n^2}, \\ c(q) &:= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} q^{(m+1/3)^2+(m+1/3)(n+1/3)+(n+1/3)^2}, \end{aligned}$$

где $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Достаточно полная теория эллиптических функций альтернативных базисов изложена в [4] и [5]. Согласно [3; с. 109, (5.5)] верно следующее представление:

$$c(q) = 3q^{1/3} \frac{\{(1-q^3)(1-q^6)(1-q^9)(1-q^{12})\cdots\}^3}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots\}}. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. *Справедливо следующее тождество:*

$$\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \sigma(11)q^3 + \cdots = 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nq^{2n-2}}{1-q^{3n-2}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем ряд Ламберта для $\sigma(n)$ [6; с. 145, пример 75]:

$$\sigma(1)q + \sigma(2)q^2 + \sigma(3)q^3 + \sigma(4)q^4 + \cdots = \frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1-q^4} + \cdots. \quad (4)$$

Умножим обе части равенства (4) на q . В полученном соотношении заменим q на ωq и на $\omega^2 q$ и сложим эти три равенства, учитывая абсолютную сходимость соответствующих рядов. Будем иметь следующее:

$$\sigma(2) + \sigma(5)q^3 + \sigma(8)q^6 + \sigma(11)q^9 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)q^{6n-6}}{1-q^{9n-6}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)q^{3n-3}}{1-q^{9n-3}},$$

откуда

$$\sigma(2) + \sigma(5)q^3 + \sigma(8)q^6 + \sigma(11)q^9 + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(3n-2)q^{6n-6}}{1-q^{9n-6}} = 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nq^{6n-6}}{1-q^{9n-6}}, \quad (5)$$

что эквивалентно (3), если заменить q^3 на q .

ЛЕММА 2. *Для квадратов тэта-функций $a^2(q)$, $b^2(q)$, $a^2(q^3)$ и $c^2(q^3)$ справедливо следующее равенство:*

$$c^2(q^3) = \frac{1}{6}a^2(q) - \frac{1}{2}a^2(q^3) + \frac{1}{3}b^2(q). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3; с. 93–94, формулы (2.8) и (2.9)] запишем

$$b(q) = \frac{3a(q^3) - a(q)}{2}, \quad (7)$$

$$c(q^3) = \frac{a(q) - a(q^3)}{2}. \quad (8)$$

Возведя (7) и (8) в квадрат и исключив из полученной системы произведение $a(q)a(q^3)$, получим (6).

ЛЕММА 3. *Справедливо следующее тождество:*

$$c^2(q^3) = \frac{1}{9}\{b^2(q) + \omega b^2(\omega q) + \omega^2 b^2(\omega^2 q)\} + \frac{1}{18}\{a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q)\}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В (6) заменим q на ωq и на $\omega^2 q$, получим

$$\omega^2 c^2(q^3) = \frac{1}{6}a^2(\omega q) - \frac{1}{2}a^2(q^3) + \frac{1}{3}b^2(\omega q), \quad (10)$$

$$\omega c^2(q^3) = \frac{1}{6}a^2(\omega^2 q) - \frac{1}{2}a^2(q^3) + \frac{1}{3}b^2(\omega^2 q). \quad (11)$$

Умножив равенство (10) на ω , а (11) – на ω^2 и сложив с (6), получим требуемое соотношение.

ЛЕММА 4. Для t -функций справедлива следующая формула:

$$B(q) := b^2(q) + \omega b^2(\omega q) + \omega^2 b^2(\omega^2 q) = 3c^2(q^3). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Складывая равенства (7) и (8), получаем выражение

$$b(q) = a(q^3) - c(q^3), \quad (13)$$

откуда

$$b(\omega q) = a(q^3) - \omega c(q^3), \quad (14)$$

$$b(\omega^2 q) = a(q^3) - \omega^2 c(q^3). \quad (15)$$

Подставив (13), (14) и (15) в левую часть (12), убедимся в справедливости леммы.

Комбинируя результат леммы 4 с формулой (9), получим

$$c^2(q^3) = \frac{1}{12} \{a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q)\}. \quad (16)$$

ЛЕММА 5. Справедлива следующая формула:

$$A(q) := a^2(q) + \omega a^2(\omega q) + \omega^2 a^2(\omega^2 q) = 108 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nq^{6n-4}}{1 - q^{9n-6}}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вычисления суммы, стоящей в правой части равенства (16), воспользуемся [3; с. 100, (2.37)]:

$$a^2(q) = 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n} - 36 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{3n}}{1 - q^{3n}}. \quad (18)$$

Заменив в (18) q на ωq и на $\omega^2 q$, получим еще две формулы:

$$a^2(\omega q) = 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \omega^n}{1 - q^n \omega^n} - 36 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{3n}}{1 - q^{3n}}, \quad (19)$$

$$a^2(\omega^2 q) = 1 + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \omega^{2n}}{1 - q^n \omega^{2n}} - 36 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^{3n}}{1 - q^{3n}}. \quad (20)$$

Из равенств (18), (19) и (20) следует

$$A(q) = 12 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \omega^{n+1}}{1 - q^n \omega^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \omega^{2n+2}}{1 - q^n \omega^{2n}} \right\}.$$

Откуда ввиду абсолютной сходимости рядов при $|q| < 1$ получим

$$A(q) = 36 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)q^{6n-4}}{1 - q^{9n-6}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)q^{3n-1}}{1 - q^{9n-3}} \right\}$$

или

$$A(q) = 36 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(3n-2)q^{6n-4}}{1 - q^{9n-6}} = 108 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nq^{6n-4}}{1 - q^{9n-6}},$$

что и доказывает справедливость леммы 5.

Из формул (16) и (17) получаем

$$c^2(q^3) = 9 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{nq^{6n-4}}{1 - q^{9n-6}}. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА. *Справедлива формула (1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (2), заключаем, что достаточно показать справедливость следующего равенства:

$$\sigma(2) + \sigma(5)q^3 + \sigma(8)q^6 + \sigma(11)q^9 + \dots = \frac{c^2(q^3)}{3q^2}. \quad (22)$$

Формула (22) следует из (5) и (21).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} \sigma(2) + \sigma(5)e^{-\pi} + \sigma(8)e^{-2\pi} + \sigma(11)e^{-3\pi} + \dots &= \frac{(\sqrt{3}-1)^{1/2}(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{3/2}\pi}{2^{7/4}3^{5/4}\Gamma^4(3/4)} e^{2\pi/3}, \\ \sigma(2) - \sigma(5)e^{-\pi} + \sigma(8)e^{-2\pi} - \sigma(11)e^{-3\pi} + \dots &= \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi}{4 \cdot 3^{5/4}\Gamma^4(3/4)} e^{2\pi/3}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (1) и [3; с. 327].

СЛЕДСТВИЕ 2. *При $q \rightarrow 1-$*

$$\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \sigma(11)q^3 + \dots \sim \frac{4}{9} \frac{\pi^2}{(1-q)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанная асимптотика следует из формулы (1) и [7; с. 141, (1.11)].

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично, из формулы Рамануджана для четвертой степени тэта-функции ψ [8; с. 139, (iii)] и [7; с. 141, (1.11)] может быть получена следующая асимптотическая формула. При $q \rightarrow 1-$

$$\sigma(1) + \sigma(3)q + \sigma(5)q^2 + \sigma(7)q^3 + \dots \sim \frac{\pi^2}{4(1-q)^2}.$$

В качестве одного из применений формулы (1) докажем следующее любопытное соотношение для функции суммы делителей.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливо следующее арифметическое тождество:*

$$\sum_{m=1}^s \sigma(6m-1)\sigma(12s-6m+5) = 2 \sum_{m=1}^s \sigma(3m-1)\{\sigma(12s-12m+8) - \sigma(3s-3m+2)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (22) следует, что

$$\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \sigma(11)q^3 + \dots = \frac{c^2(q)}{3q^{2/3}}, \quad (23)$$

$$\sigma(2) - \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 - \sigma(11)q^3 + \dots = \frac{c^2(-q)}{3q^{2/3}}. \quad (24)$$

Сложив равенства (23) и (24), получаем

$$2\{\sigma(2) + \sigma(8)q^2 + \sigma(14)q^4 + \dots\} = \frac{c^2(q) + c^2(-q)}{3q^{2/3}} = \frac{\{c(q) + c(-q)\}^2 - 2c(q)c(-q)}{3q^{2/3}}.$$

Согласно [3; с. 111, (5.15)] из полученного равенства следует

$$c(q)c(-q) = 2c^2(q^4) - 3q^{2/3}\{\sigma(2) + \sigma(8)q^2 + \sigma(14)q^4 + \sigma(20)q^6 + \dots\}. \quad (25)$$

Из равенств (23) и (25) мы можем вывести

$$c(q)c(-q) = 6q^{8/3}\{\sigma(2) + \sigma(5)q^4 + \sigma(8)q^8 + \dots\} - 3q^{2/3}\{\sigma(2) + \sigma(8)q^2 + \sigma(14)q^4 + \dots\}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, применим (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} & \{2q^2[\sigma(2) + \sigma(5)q^4 + \sigma(8)q^8 + \dots] - [\sigma(2) + \sigma(8)q^2 + \sigma(14)q^4 + \dots]\}^2 \\ &= \{\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \dots\}\{\sigma(2) - \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 - \dots\}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right\} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b_k b_{2n-k} \right\} q^n, \quad (26)$$

где

$$a_k = \sigma(6k+2) - 2\sigma\left(\frac{3k+1}{2}\right), \quad b_k = \sigma(3k+2).$$

Здесь в случае, если аргумент функции суммы делителей равен дробному числу, полагаем значение этой функции равным нулю. Формула следствия 3 вытекает из равенства (26) после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях q и разбиения конечных сумм на суммы по четным и нечетным индексам. Доказательство завершено.

Непосредственно из формулы (1) можно получить еще одно арифметическое равенство.

СЛЕДСТВИЕ 4. Положим для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma\left(\frac{3m-2}{3}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma\left(\frac{3m-1}{3}\right) = 0.$$

Тогда для неотрицательных целых n справедлива формула

$$(n+1)\sigma(3n+5) = \sum_{k=0}^n \left\{ 2\sigma(k+1) - 18\sigma\left(\frac{k+1}{3}\right) \right\} \sigma(3n-3k+2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим логарифмическую производную обеих частей формулы (1), получим

$$\frac{\sigma(5) + 2\sigma(8)q + 3\sigma(11)q^2 + \dots}{\sigma(2) + \sigma(5)q + \sigma(8)q^2 + \dots} = 2\sigma(1) + 2\sigma(2)q + [2\sigma(3) - 18\sigma(1)]q^2 + \dots.$$

Отсюда и следует требуемый результат.

Заметим, что следствия 2, 3 и 4 теоремы демонстрируют значение формулы (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Харди, *Двенадцать лекций о Рамануджане*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [2] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, 1976. [3] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part V, Springer-Verlag, New York, 1998. [4] B. C. Berndt, S. Bhargava, F. G. Garvan, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**:11 (1995), 4163–4244. [5] F. G. Garvan, *J. Symbolic Comput.*, **20**:5-6 (1995), 517–536. [6] Г. Поляа, Г. Сёре, *Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел*, Наука, М., 1978. [7] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part IV, Springer-Verlag, New York, 1994. [8] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, Part III, Springer-Verlag, New York, 1991.

С. Е. Гладун

E-mail: gladunse@inbox.ru

Поступило

27.04.2012

Исправленный вариант

17.09.2013