Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, Гомотопические симплициальные грани и гомологии реализаций симплициальных топологических пространств, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 661–681

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:44:59

Гомотопические симплициальные грани и гомологии реализаций симплициальных топологических пространств

С. В. Лапин

Введено понятие дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями, являющееся гомотопическим аналогом понятия дифференциального модуля с симплициальными гранями. Доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями. Установлены связи конструкции дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями с теорией A_∞ -алгебр и теорией D_∞ -дифференциальных модулей. Даны применения метода гомотопических симплициальных граней к описанию гомологий реализаций симплициальных топологических пространств.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10183

В работе [1] при изучении B -конструкции A_∞ -топологической группы было введено понятие A_∞ -симплициального объекта в категории топологических пространств, которое, как отмечено в [1], с соответствующими изменениями переносится в категорию дифференциальных модулей. Под A_∞ -симплициальным объектом в работе [1] понимается предсимплициальный объект, т.е. объект, имеющий все грани и вырождения, за исключением грани с номером ноль, для которого вместо грани с номером ноль задана, так сказать, возмущенная грань с номером ноль в смысле теории возмущений цепных комплексов [2].

Данная работа посвящена введению понятия дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями, которое является гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциального модуля с симплициальными гранями. Под дифференциальным модулем с симплициальными гранями здесь понимается аналог симплициального дифференциального модуля [3], для которого наличие симплициальных операторов вырождений не предполагается. Введенная в данной работе конструкция дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями отличается, если забыть про операторы вырождений, от указанной выше конструкции A_∞ -симплициального объекта из работы [1] тем, что в предложенной здесь конструкции возмущению подверглась совокупность всех граней, а не только грань с номером ноль. Интерес к разработке понятия дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями был вызван, главным

образом, задачей создания метода описания гомотопий реализаций симплициальных топологических пространств, который был бы аналогичен методу A_∞ -алгебр описания классифицирующих пространств топологических групп [4].

В работе изучены основные гомотопические и категорные свойства дифференциальных модулей с гомотопическими симплициальными гранями, главным из которых является свойство гомотопической инвариантности структуры дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями. Рассмотрены связи теории A_∞ -алгебр [5], а также теории D_∞ -дифференциальных модулей [6] с конструкцией дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями. Используя эти связи, в работе показано, что над полями сингулярные гомотопии реализации симплициального объекта в категории топологических пространств полностью определяются структурой дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями на сингулярных гомотопиях этажей данного симплициального объекта. Этот результат обобщает результат Т. В. Кадеишвили [4] о том, что над полями сингулярные гомотопии классифицирующего пространства топологической группы полностью определяются структурой A_∞ -алгебры на сингулярных гомотопиях этой топологической группы.

1. Дифференциальные модули с гомотопическими симплициальными гранями. Пусть K – произвольное коммутативное кольцо с единицей. Далее все рассматриваемые модули и отображения модулей являются, если не оговорены дополнительные требования, соответственно K -модулями и K -линейными отображениями модулей.

Под *дифференциальным биградуированным модулем* или, более кратко, *дифференциальным модулем* (X, d) далее будем понимать произвольный биградуированный модуль $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, снабженный дифференциалом $d: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet-1}$ бистепени $(0, -1)$. Под *отображением дифференциальных модулей* $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ будем понимать любое отображение $f: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*+s,\bullet+t}$ бистепени (s, t) , $s, t \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условию $df = (-1)^{s+t}fd$. Наконец, под *гомотопией* $h: X \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ дифференциальных модулей бистепени (s, t) будем понимать отображение биградуированных модулей $h: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*+s,\bullet+t+1}$ бистепени $(s, t+1)$, для которого выполнено условие $dh + (-1)^{s+t}hd = f - g$.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$ бистепени $(0, 0)$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между отображениями дифференциальных модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Любую такую тройку $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$ далее будем называть *SDR-ситуацией дифференциальных модулей*.

Примеры SDR-ситуаций дифференциальных модулей можно получить при рассмотрении гомотопий, заданных над полем дифференциальных модулей. В самом деле, пусть $H(X) = \text{Ker } d / \text{Im } d$ – модуль гомотопий произвольного заданного над полем дифференциального модуля (X, d) . Если биградуированный модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\text{Ker } d = H(X) \oplus \text{Im } d$ получим SDR-ситуацию $(\eta: X \rightleftharpoons H(X): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Полученную SDR-ситуацию дифференциальных модулей далее будем называть *гомотопической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X, d)* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Дифференциальным модулем с симплициальными гранями или, более кратко, дифференциальным модулем с гранями будем называть дифференциальный модуль (X, d) , где $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $d: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet-1}$, рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей $\partial_i: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}$, $0 \leq i \leq n$, которые являются отображениями дифференциальных модулей, т.е. удовлетворяют условию $d\partial_i = -\partial_i d$, $i \geq 0$, и для которых выполнены следующие симплициальные коммутационные соотношения:

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \quad i < j. \quad (1.1)$$

Указанные выше отображения модулей $\partial_i: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}$ называются *симплициальными операторами граней* или, более кратко, просто *гранями* дифференциального модуля (X, d) .

Легко видеть, что при помощи соотношений (1.1) любую композицию операторов граней $\partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_k}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet}$, $2 \leq k \leq n$, произвольного дифференциального модуля с гранями (X, d, ∂_i) можно единственным образом записать как композицию операторов граней следующего вида:

$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet}, \quad 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. F -семейством отображений $\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y$ степени $l \in \mathbb{Z}$ (запись $\deg(\tilde{f}) = l$) из биградуированного модуля $X = \{X_{n,m}\}$ в биградуированный модуль $Y = \{Y_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, будем называть семейство отображений модулей

$$\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n-k, \bullet+k+l} \mid 0 \leq k \leq n\},$$

где целые числа $i_1, \dots, i_k$ удовлетворяют условию $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. В случае, когда $k = 0$, далее будет использоваться запись $f_{()}: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet+l}$.

F -семейства отображений $\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}\}$, $\tilde{g} = \{g_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y$ считаются *равными* (запись $\tilde{f} = \tilde{g}$), если $\deg(\tilde{f}) = \deg(\tilde{g})$ и для любого набора индексов $(i_1, \dots, i_k)$ имеет место равенство отображений $f_{(i_1, \dots, i_k)} = g_{(i_1, \dots, i_k)}$.

Ясно, что множество всех F -семейств отображений из X в Y , имеющих одинаковую степень, является K -модулем с линейными операциями

$$\begin{aligned} \tilde{f} + \tilde{g} &= \{s_{(i_1, \dots, i_k)}\}, & s_{(i_1, \dots, i_k)} &= f_{(i_1, \dots, i_k)} + g_{(i_1, \dots, i_k)}, \\ k\tilde{f} &= \{t_{(i_1, \dots, i_k)}\}, & t_{(i_1, \dots, i_k)} &= kf_{(i_1, \dots, i_k)}, \quad k \in K. \end{aligned}$$

Нулевым F -семейством $\tilde{0}: X \rightarrow Y$, $\deg(\tilde{0}) = l \in \mathbb{Z}$, является F -семейство отображений $\tilde{0} = \{0_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y$, $\deg(\tilde{0}) = l \in \mathbb{Z}$, где $0_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} = 0: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*-k, \bullet+k+l}$ — нулевое отображение модулей при любом $k \geq 0$.

Пусть Σ_k — симметрическая группа перестановок множества из k элементов. Рассмотрим для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ и любого набора целых чисел $(i_1, \dots, i_k)$, где $0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, набор $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$, где σ действует на набор $(i_1, \dots, i_k)$ обычным образом, т.е. путем перестановки чисел из этого набора местами. Для указанного набора $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ определим набор $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, полагая

$$\widehat{\sigma(i_s)} = \sigma(i_s) - \alpha(\sigma(i_s)), \quad 1 \leq s \leq k,$$

где $\alpha(\sigma(i_s))$ – количество чисел из набора $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$, стоящих справа от числа $\sigma(i_s)$ и меньших его.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Композицией $\widetilde{gf}$ произвольных F -семейств отображений

$$\begin{aligned}\widetilde{f} &= \{f_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y, & \deg(\widetilde{f}) &= l, \\ \widetilde{g} &= \{g_{(i_1, \dots, i_k)}\}: Y \rightarrow Z, & \deg(\widetilde{g}) &= t,\end{aligned}$$

будем называть F -семейство отображений

$$\widetilde{gf} = \{(gf)_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Z, \quad \deg(\widetilde{gf}) = l + t,$$

для которого отображения $(gf)_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n, \bullet} \rightarrow Z_{n-k, \bullet+k+(l+t)}$ задаются формулой

$$(gf)_{(i_1, \dots, i_k)} = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} g_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} f_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}, \quad (1.2)$$

где I_σ является множеством всех разбиений набора $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$ на два набора $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})$ и $(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, $0 \leq m \leq k$, таких, что $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_m)$ и $\sigma(i_{m+1}) < \dots < \sigma(i_k)$.

Без труда проверяется, что для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ и произвольного набора $(i_1, \dots, i_k)$, где $i_1 < \dots < i_k$, выполнение условий $\widehat{\sigma(i_1)} < \dots < \widehat{\sigma(i_m)}$ и $\widehat{\sigma(i_{m+1})} < \dots < \widehat{\sigma(i_k)}$ эквивалентно выполнению условий $\sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_m)$ и $\sigma(i_{m+1}) < \dots < \sigma(i_k)$. Из этого легко следует ассоциативность операции композиции F -семейств отображений.

ПРИМЕР 1.1. Формула (1.2) при $k = 0, 1, 2, 3$ имеет соответственно, следующий вид:

$$\begin{aligned}(gf)_{()} &= g_{()}f_{()}, & (gf)_{(i)} &= g_{()}f_{(i)} + g_{(i)}f_{()}, \\ (gf)_{(i_1, i_2)} &= g_{()}f_{(i_1, i_2)} + g_{(i_1, i_2)}f_{()} + g_{(i_1)}f_{(i_2)} - g_{(i_2-1)}f_{(i_1)}, & i_1 < i_2, \\ (gf)_{(i_1, i_2, i_3)} &= g_{()}f_{(i_1, i_2, i_3)} + g_{(i_1, i_2, i_3)}f_{()} + g_{(i_1)}f_{(i_2, i_3)} + g_{(i_1, i_2)}f_{(i_3)} + g_{(i_3-2)}f_{(i_1, i_2)} \\ &\quad + g_{(i_2-1, i_3-1)}f_{(i_1)} - g_{(i_2-1)}f_{(i_1, i_3)} - g_{(i_1, i_3-1)}f_{(i_2)}, & i_1 < i_2 < i_3.\end{aligned}$$

Введем теперь гомотопическое обобщение понятия дифференциального модуля с симплициальными гранями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Дифференциальным модулем с гомотопическими симплициальными гранями или, более кратко, F_∞ -модулем будем называть дифференциальный модуль

$$(X, d), \quad X = \{X_{n, m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad d: X_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet-1},$$

рассматриваемый вместе с F -семейством отображений $\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow X$, $\deg(\widetilde{\partial}) = -1$, $d = \partial_{()}$, для которого выполнено следующее условие равенства F -семейств отображений:

$$\widetilde{\partial}\widetilde{\partial} = \widetilde{0}. \quad (1.3)$$

F -семейство отображений

$$\widetilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}: X_{n, \bullet} \rightarrow X_{n-k, \bullet+k-1}\}$$

будем называть F_∞ -дифференциалом F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$. Отображения $\partial_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ из F_∞ -дифференциала $\tilde{\partial}$ будем называть *гомотопическими симплициальными гранями* или, более кратко, F_∞ -гранями F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$.

Рассмотрим условие (1.3) более детально. Для этого напомним, что для любых дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) имеется дифференциальный модуль

$$\text{Hom}(X; Y) = \{\text{Hom}(X; Y)_{n,m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad d: \text{Hom}(X; Y)_{*,\bullet} \rightarrow \text{Hom}(X; Y)_{*,\bullet-1}.$$

Элементами модуля $\text{Hom}(X; Y)_{n,m}$ являются произвольные отображения биградуированных модулей $f: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*+n,\bullet+m}$ бистепени (n, m) и $d: \text{Hom}(X; Y)_{n,m} \rightarrow \text{Hom}(X; Y)_{n,m-1}$ на элементах $f \in \text{Hom}(X; Y)_{n,m}$ задается следующей формулой:

$$d(f) = df + (-1)^{n+m+1} fd: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*+n,\bullet+m-1}.$$

Легко видеть, что если F_∞ -грани F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$ рассматривать как элементы $\partial_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \in \text{Hom}(X; X)_{-k, k-1}$, то условие (1.3) эквивалентно тому, что для любой F_∞ -грани $\partial_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ этого F_∞ -модуля выполнено следующее условие:

$$d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I'_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}, \quad (1.4)$$

где I'_σ – множество всех разбиений набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$ на два таких набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})$ и $(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, $1 \leq m \leq k-1$, что выполнены условия $\widehat{\sigma(i_1)} < \dots < \widehat{\sigma(i_m)}$ и $\widehat{\sigma(i_{m+1})} < \dots < \widehat{\sigma(i_k)}$.

Простыми примерами F_∞ -модулей служат дифференциальные модули с гранями. Действительно, если для произвольного дифференциального модуля с гранями (X, d, ∂_i) определить F_∞ -дифференциал $\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow X$, полагая $\partial_{()} = d$, $\partial_{(i)} = \partial_i$, $i \geq 0$, и $\partial_{(i_1, \dots, i_k)} = 0$, $k > 1$, то получим F_∞ -модуль $(X, d, \tilde{\partial})$.

Рассмотрим соотношения (1.4) для малых значений $k \geq 1$. При $k = 1$ соотношения (1.4) имеют вид

$$d(\partial_{(i)}) = 0, \quad i \geq 0.$$

Это говорит о том, что все F_∞ -грани $\partial_{(i)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}$, $0 \leq i \leq n$, $n \geq 0$, из F_∞ -дифференциала $\tilde{\partial}$ являются отображениями дифференциальных модулей.

При $k = 2$ соотношения (1.4) записываются в виде

$$d(\partial_{(i,j)}) = \partial_{(j-1)} \partial_{(i)} - \partial_{(i)} \partial_{(j)}, \quad i < j.$$

Это означает, что F_∞ -грань $\partial_{(i,j)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-2,\bullet+1}$ является гомотопией между отображениями $\partial_{(j-1)} \partial_{(i)}, \partial_{(i)} \partial_{(j)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-2,\bullet}$ дифференциальных модулей и, следовательно, F_∞ -грани $\partial_{(i)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}$ из F_∞ -дифференциала $\tilde{\partial}$ удовлетворяют с точностью до гомотопии симплициальным коммутационным соотношениям (1.1). Другими словами, для любого F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$ тройка $(X, d, \partial_{(i)})$ является с точностью до гомотопии дифференциальным модулем с гранями. В частности, для любого F_∞ -модуля $(X, d = 0, \tilde{\partial})$ всегда определен градуированный модуль с гранями $(X, d = 0, \partial_i)$, где $\partial_i = \partial_{(i)}$.

При $k = 3$ соотношения (1.4), как показывает пример 1.1, записываются в следующем виде:

$$d(\partial_{(i_1, i_2, i_3)}) = -\partial_{(i_1)}\partial_{(i_2, i_3)} - \partial_{(i_1, i_2)}\partial_{(i_3)} - \partial_{(i_3-2)}\partial_{(i_1, i_2)} - \partial_{(i_2-1, i_3-1)}\partial_{(i_1)} \\ + \partial_{(i_2-1)}\partial_{(i_1, i_3)} + \partial_{(i_1, i_3-1)}\partial_{(i_2)}, \quad i_1 < i_2 < i_3.$$

ПРИМЕР 1.2. Покажем, что каждую A_∞ -алгебру можно рассматривать как F_∞ -модуль. Напомним [5], [4], что A_∞ -алгеброй (X, d, π_n) называется дифференциальный градуированный модуль (X, d) , $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $d: X_\bullet \rightarrow X_{\bullet-1}$, рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\{\pi_n: X^{\otimes(n+2)} \rightarrow X \mid \pi_n((X^{\otimes(n+2)})_\bullet) \subseteq X_{\bullet+n}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

удовлетворяющих для любых целых $n \geq -1$ следующим соотношениям:

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{m=0}^n (-1)^{t(n-m+1)+n} \pi_m(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi_{n-m} \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1),$$

где сумма берется также по всем местам t , на которых может стоять π_{n-m} . Например, при $n = -1; 0; 1$ данные соотношения соответственно принимают вид

$$d(\pi_0) = 0, \quad d(\pi_1) = -\pi_0(\pi_0 \otimes 1) + \pi_0(1 \otimes \pi_0), \\ d(\pi_2) = -\pi_0(\pi_1 \otimes 1 + 1 \otimes \pi_1) + \pi_1(\pi_0 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes \pi_0 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \pi_0).$$

Напомним теперь, что *надстройкой* над дифференциальным градуированным модулем (X, d) называется дифференциальный градуированный модуль (SX, d) , где $(SX)_{n+1} = X_n$. Если элементы в SX обозначить через $[x]$, где $x \in X$, то дифференциал $d: (SX)_\bullet \rightarrow (SX)_{\bullet-1}$ задается формулой $d[x] = -[d(x)]$. Хорошо известно (см., например, [7]), что задание на дифференциальном градуированном модуле (X, d) структуры A_∞ -алгебры (X, d, π_n) равносильно заданию семейства отображений $\pi(n): ((SX)^{\otimes n})_\bullet \rightarrow (SX)_{\bullet-1}$, $n \geq 2$, удовлетворяющих для любых целых $n \geq 2$ следующим соотношениям:

$$d(\pi(n)) = - \sum_{m=2}^{n-1} \pi(m)(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \pi(n-m+1) \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1),$$

где $d(\pi(n)) = d\pi(n) + \pi(n)d$ и сумма берется также по всем местам в тензорном произведении, на которых может стоять $\pi(n-m+1)$. Далее рассмотренную выше тройку $(SX, d, \pi(n))$, которая соответствует A_∞ -алгебре (X, d, π_n) , также будем называть A_∞ -алгеброй.

Покажем, что каждая A_∞ -алгебра определяет некоторый F_∞ -модуль. Пусть задана произвольная A_∞ -алгебра $(SX, d, \pi(n))$. Рассмотрим дифференциальный градуированный модуль $(T(SX), d)$, где $T(SX) = \bigoplus_{n \geq 1} (SX)^{\otimes n}$ и дифференциал $d: T(SX)_\bullet \rightarrow T(SX)_{\bullet-1}$ является обычным дифференциалом в тензорном произведении. Рассмотрим теперь $(T(SX), d)$ как дифференциальный биградуированный модуль, полагая $T(SX)_{n,m} = ((SX)^{\otimes n})_{n+m}$ и

$$d: T(SX)_{n,m} = ((SX)^{\otimes n})_{n+m} \rightarrow ((SX)^{\otimes n})_{n+m-1} = T(SX)_{n,m-1}.$$

Если на $(T(SX), d)$ задать F_∞ -дифференциал $\tilde{\partial}: T(SX) \rightarrow T(SX)$, для которого F_∞ -границы $\partial_{(i_1, \dots, i_k)}: T(SX)_{n, \bullet} \rightarrow T(SX)_{n-k, \bullet+k-1}$, $k \geq 0$, задаются равенствами

$$\partial_{()} = \sum_{i=1}^n \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{i-1} \otimes d \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-i},$$

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)} = \begin{cases} (-1)^\varepsilon 1^{\otimes(j-1)} \otimes \pi(k+1) \otimes 1^{\otimes(n-k-j)}, & \text{если } 1 \leq j \leq n-k, (i_1, \dots, i_k) = (j, j+1, \dots, j+k-1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\varepsilon = i_1 + \dots + i_k = jk + k(k-1)/2$, то получим F_∞ -модуль $(T(SX), d, \tilde{\partial})$. Например, если согласно данным равенствам положить

$$\partial_{(1,2)} = -\pi(3), \quad \partial_{(1)} = -\pi(2), \quad \partial_{(1)} = -\pi(2) \otimes 1, \quad \partial_{(2)} = 1 \otimes \pi(2),$$

то будем иметь требуемое соотношение

$$d(\partial_{(1,2)}) = d(-\pi(3)) = \pi(2)(1 \otimes \pi(2)) + \pi(2)(\pi(2) \otimes 1) = \partial_{(1)}\partial_{(1)} - \partial_{(1)}\partial_{(2)}.$$

Если согласно указанным равенствам положить

$$\begin{aligned} \partial_{(1,2,3)} &= \pi(4), & \partial_{(1,2)} &= -\pi(3), & \partial_{(1)} &= -\pi(2), & \partial_{(1,3)} &= 0, \\ \partial_{(1,2)} &= -\pi(3) \otimes 1, & \partial_{(2,3)} &= -1 \otimes \pi(3), \\ \partial_{(1)} &= -\pi(2) \otimes 1 \otimes 1, & \partial_{(2)} &= 1 \otimes \pi(2) \otimes 1, & \partial_{(3)} &= -1 \otimes 1 \otimes \pi(2), \end{aligned}$$

то получим требуемое соотношение

$$\begin{aligned} d(\partial_{(1,2,3)}) &= d(\pi(4)) = -\pi(2)(\pi(3) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(3)) \\ &\quad - \pi(3)(\pi(2) \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \pi(2) \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \pi(2)) \\ &= \partial_{(1)}(-\partial_{(1,2)} - \partial_{(2,3)}) + \partial_{(1,2)}(-\partial_{(1)} + \partial_{(2)} - \partial_{(3)}) \\ &= -\partial_{(1)}\partial_{(2,3)} - \partial_{(1,2)}\partial_{(3)} - \partial_{(1)}\partial_{(1,2)} - \partial_{(1,2)}\partial_{(1)} + \partial_{(1)}\partial_{(1,3)} + \partial_{(1,2)}\partial_{(2)}. \end{aligned}$$

В заключение примера отметим, что аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что любой A_∞ -модуль над A_∞ -алгеброй [4] можно рассматривать как F_∞ -модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. *Отображением $f: (X, d, \partial_i) \rightarrow (Y, d, \partial_i)$ дифференциальных модулей с гранями* называется $f: (X_{n, \bullet}, d) \rightarrow (Y_{n, \bullet}, d)$, $n \geq 0$, отображение дифференциальных модулей, которое удовлетворяет следующему условию:

$$\partial_i f = f \partial_i: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-1, \bullet}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (1.5)$$

Введем теперь гомотопическое обобщение понятия отображения дифференциальных модулей с гранями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. *Морфизмом F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ будем называть F -семейство отображений*

$$\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-k, \bullet+k}\}, \quad \deg(\tilde{f}) = 0,$$

для которого выполнено следующее условие равенства F -семейств отображений:

$$\tilde{\partial} \tilde{f} = \tilde{f} \tilde{\partial}. \quad (1.6)$$

Отображения $f_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ из F -семейства отображений $\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}\}$ будем называть F_∞ -компонентами морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}$.

Рассмотрим соотношение (1.6) более детально. Легко проверяется, что если F_∞ -компоненты морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ считать элементами $f_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} \in \text{Hom}(X; Y)_{-k, k}$, то условие (1.8) эквивалентно тому, что для любой F_∞ -компоненты $f_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}$ выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} d(f_{(i_1, \dots, i_k)}) &= -\partial_{(i_1, \dots, i_k)} f_{()} + f_{()} \partial_{(i_1, \dots, i_k)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I'_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} (\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} f_{(\widehat{\sigma(i_{m+1}}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})})} \\ &\quad - f_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1}}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})})), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где символ I'_σ такой же, как и в формуле (1.4).

Простыми примерами морфизмов F_∞ -модулей служат отображения дифференциальных модулей с гранями. В самом деле, если для произвольного отображения $f: (X, d, \partial_i) \rightarrow (Y, d, \partial_i)$ дифференциальных модулей с гранями рассмотреть (X, d, ∂_i) и (Y, d, ∂_i) , соответственно, как F_∞ -модули $(X, d, \tilde{\partial})$ и $(Y, d, \tilde{\partial})$, где

$$\partial_{()} = d, \quad \partial_{(i)} = \partial_i, \quad \partial_{(i_1, \dots, i_k)} = 0, \quad k > 1,$$

и определить F -семейство отображений $\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y$, полагая $f_{()} = f$, $f_{(i_1, \dots, i_k)} = 0$, $k \geq 1$, то получим морфизм F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$.

Рассмотрим, пользуясь формулами из примера 1.1, соотношения (1.7) для малых значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношения (1.7) имеют вид

$$d(f_{()}) = 0.$$

Это говорит о том, что F_∞ -компонента $f_{(): X_{*, \bullet} \rightarrow Y_{*, \bullet}$ морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ является отображением дифференциальных модулей.

При $k = 1$ соотношения (1.7) записываются в виде

$$d(f_{(i)}) = f_{()} \partial_{(i)} - \partial_{(i)} f_{()}, \quad i \geq 0.$$

Это означает, что F_∞ -компонента $f_{(i)}: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-1, \bullet+1}$ является гомотопией между отображениями дифференциальных модулей $f_{()} \partial_{(i)}: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-1, \bullet}$ и $\partial_{(i)} f_{(): X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-1, \bullet}$ и, следовательно, F_∞ -компонента $f_{(): X_{*, \bullet} \rightarrow Y_{*, \bullet}$ морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ удовлетворяет с точностью до гомотопии условию (1.5). Другими словами, F_∞ -компонента $f_{()}$ морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ является с точностью до гомотопии отображением заданных с точностью до гомотопии дифференциальных модулей с гранями $f_{(): (X, d, \partial_{(i)}) \rightarrow (Y, d, \partial_{(i)})$. В частности, для любого морфизма F_∞ -модулей $\tilde{f}: (X, d = 0, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d = 0, \tilde{\partial})$ определено

отображение градуированных модулей с гранями $f_{()} : (X, d = 0, \partial_i) \rightarrow (Y, d = 0, \partial_i)$, где $\partial_i = \partial_{(i)}$.

При $k = 2$ соотношения (1.7) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d(f_{(i_1, i_2)}) &= -\partial_{(i_1, i_2)} f_{()} + f_{()} \partial_{(i_1, i_2)} - \partial_{(i_1)} f_{(i_2)} \\ &\quad + \partial_{(i_2-1)} f_{(i_1)} + f_{(i_1)} \partial_{(i_2)} - f_{(i_2-1)} \partial_{(i_1)}, \quad i_1 < i_2. \end{aligned}$$

При $k = 3$ соотношения (1.7) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} d(f_{(i_1, i_2, i_3)}) &= -\partial_{(i_1, i_2, i_3)} f_{()} + f_{()} \partial_{(i_1, i_2, i_3)} - \partial_{(i_1)} f_{(i_2, i_3)} - \partial_{(i_1, i_2)} f_{(i_3)} \\ &\quad - \partial_{(i_3-2)} f_{(i_1, i_2)} - \partial_{(i_2-1, i_3-1)} f_{(i_1)} + \partial_{(i_2-1)} f_{(i_1, i_3)} + \partial_{(i_1, i_3-1)} f_{(i_2)} \\ &\quad + f_{(i_1)} \partial_{(i_2, i_3)} + f_{(i_1, i_2)} \partial_{(i_3)} + f_{(i_3-2)} \partial_{(i_1, i_2)} + f_{(i_2-1, i_3-1)} \partial_{(i_1)} \\ &\quad - f_{(i_2-1)} \partial_{(i_1, i_3)} - f_{(i_1, i_3-1)} \partial_{(i_2)}, \quad i_1 < i_2 < i_3. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано в примере 1.2, можно показать, что каждый морфизм A_∞ -алгебр [4], а также морфизм A_∞ -модулей над A_∞ -алгебрами, можно рассматривать как морфизм соответствующих F_∞ -модулей.

Заметим теперь, что если определить композицию морфизмов F_∞ -модулей как композицию F -семейств отображений, то без труда проверяется, что композиция морфизмов F_∞ -модулей является морфизмом F_∞ -модулей. Ясно, что операция композиции морфизмов F_∞ -модулей ассоциативна и, что для каждого F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$ имеется тождественный морфизм $\tilde{1}_X : (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (X, d, \tilde{\partial})$, определяемый как F -семейство отображений $\tilde{1}_X = \{(1_X)_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}\} : X \rightarrow X$, $\deg(\tilde{1}_X) = 0$, где $(1_X)_{()} = 1_X : X_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet}$ – тождественное отображение биградуированного модуля X и $(1_X)_{(i_1, i_2, \dots, i_k)} = 0 : X_{*, \bullet} \rightarrow X_{*-k, \bullet+k}$ – нулевое отображение модулей при любом $k \geq 1$. Таким образом, класс всех F_∞ -модулей над любым коммутативным кольцом K с единицей и их морфизмов представляет собой категорию, которую будем обозначать через $DF_\infty(K)$.

Рассмотрим вопрос о характеристизации изоморфизма $\tilde{f} = \{f_{(i_1, \dots, i_k)}\} : X \rightarrow Y$ категории $DF_\infty(K)$ в терминах его F_∞ -компоненты $f_{()} : X_{*, *}\rightarrow Y_{*, *}$. Прямые вычисления по индукции для F_∞ -компонент показывают, что справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть задан произвольный морфизм $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ категории $DF_\infty(K)$, и пусть F_∞ -компонента $f_{()} : X_{*, *}\rightarrow Y_{*, *}$ морфизма $\tilde{f}$ является изоморфизмом биградуированных модулей с обратным изоморфизмом биградуированных модулей $g : Y_{*, *}\rightarrow X_{*, *}$. Тогда морфизм $\tilde{f}$ является изоморфизмом категории $DF_\infty(K)$ с обратным изоморфизмом $\tilde{g} = \{g_{(i_1, \dots, i_k)}\} : Y \rightarrow X$ категории $DF_\infty(K)$, для которого F_∞ -компоненты задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} g_{()} &= g, \\ g_{(i_1, \dots, i_k)} &= - \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{L_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma) + p} (gf_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_1})})}) (gf_{(\widehat{\sigma(i_{m_1+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_2})})})} \times \dots \\ &\quad \times (gf_{(\widehat{\sigma(i_{m_p+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})})} g, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где L_σ – множество всех разбиений набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$ на $(p+1)$ наборов чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_1})}), \dots, (\widehat{\sigma(i_{m_p+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, $0 \leq p \leq k-1$, $m_0 = 0$, для которых выполнены условия $\widehat{\sigma(i_1)} < \dots < \widehat{\sigma(i_{m_1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_p+1})} < \dots < \widehat{\sigma(i_k)}$.

Таким образом, морфизм $\tilde{f}$ категории $DF_\infty(K)$ является изоморфизмом этой категории тогда и только тогда, когда F_∞ -компонента $f_{(\cdot)}$ морфизма $\tilde{f}$ является изоморфизмом биградуированных модулей.

2. Гомотопические свойства F_∞ -модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между отображениями дифференциальных модулей с гранями $f, g: (X, d, \partial_i) \rightarrow (Y, d, \partial_i)$ называется гомотопия $h: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n, \bullet+1}$, $n \geq 0$, между отображениями дифференциальных модулей $f, g: (X_{n, \bullet}, d) \rightarrow (Y_{n, \bullet}, d)$, $n \geq 0$, для которой выполнено следующее условие:

$$\partial_i h + h \partial_i = 0: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-1, \bullet+1}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (2.1)$$

Введем теперь гомотопическое обобщение понятия отображения гомотопии между отображениями дифференциальных модулей с гранями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Под гомотопией $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ между морфизмами F_∞ -модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ будем понимать такое F -семейство отображений

$$\tilde{h} = \{h_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-k, \bullet+k+1}\}, \quad \deg(\tilde{h}) = 1,$$

что выполнено следующее условие равенства F -семейств отображений:

$$\tilde{\partial} \tilde{h} + \tilde{h} \tilde{\partial} = \tilde{f} - \tilde{g}. \quad (2.2)$$

Отображения $h_{(i_1, i_2, \dots, i_k)}$ из F -семейства отображений $\tilde{h} = \{h_{(i_1, \dots, i_k)}\}$ будем называть F_∞ -компонентами гомотопии $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ между морфизмами F_∞ -модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$.

Рассмотрим соотношение (2.2) более детально. Легко проверяется, что если F_∞ -компоненты $h_{(i_1, \dots, i_k)}$ гомотопии $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ между морфизмами F_∞ -модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ считать элементами $h_{(i_1, \dots, i_k)} \in \text{Hom}(X; Y)_{-k, k+1}$, то условие (2.2) эквивалентно тому, что для любой F_∞ -компоненты $h_{(i_1, \dots, i_k)}$ гомотопии $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ между морфизмами $\tilde{f}, \tilde{g}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$ выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} d(h_{(i_1, \dots, i_k)}) &= f_{(i_1, \dots, i_k)} - g_{(i_1, \dots, i_k)} - \partial_{(i_1, \dots, i_k)} h_{(\cdot)} - h_{(\cdot)} \partial_{(i_1, \dots, i_k)} \\ &+ \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{I'_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} (\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} h_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} \\ &+ h_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где символ I'_σ такой же, как и в формуле (1.4).

Простыми примерами гомотопий между морфизмами F_∞ -модулей служат гомотопии между отображениями дифференциальных модулей с гранями. Если для произвольной гомотопии $h: X \rightarrow Y$ между отображениями $f, g: (X, d, \partial_i) \rightarrow (Y, d, \partial_i)$ дифференциальных модулей с гранями рассмотреть отображения f и g как морфизмы F_∞ -модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$, где

$$f_{(\cdot)} = f, \quad g_{(\cdot)} = g, \quad f_{(i_1, \dots, i_k)} = g_{(i_1, \dots, i_k)} = 0, \quad k \geq 1,$$

и определить F -семейство отображений $\tilde{h} = \{h_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y$, полагая $h_{()} = h$, $h_{(i_1, \dots, i_k)} = 0$, $k \geq 1$, то получим гомотопию $\tilde{h} = \{h_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow Y$ между морфизмами F_∞ -модулей $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$.

Рассмотрим, пользуясь формулами из примера 1.1, соотношения (2.3) для малых значений $k \geq 0$. При $k = 0$ соотношения (2.3) имеют вид

$$d(h_{()}) = f_{()} - g_{()}.$$

Это означает, что F_∞ -компонента $h_{(): X_{*, \bullet} \rightarrow Y_{*, \bullet+1}$ гомотопии $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ является гомотопией между отображениями $f_{(): (X_{*, \bullet}, d) \rightarrow (Y_{*, \bullet}, d)$ дифференциальных модулей.

При $k = 1$ соотношения (2.3) записываются в виде

$$d(h_{(i)}) = f_{(i)} - g_{(i)} - \partial_{(i)}h_{()} - h_{()}\partial_{(i)}, \quad i \geq 0.$$

Эти равенства имеют хорошую интерпретацию в следующем частном случае. Пусть заданы любые отображения $f, g: (X, d, \partial_i) \rightarrow (Y, d, \partial_i)$ дифференциальных модулей с гранями, которые рассматриваются как морфизмы F_∞ -модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: X \rightarrow Y$, и пусть задана гомотопия $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ между $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. Так как в данном случае $f_{(i)} = g_{(i)} = 0$, то равенства $d(h_{(i)}) = f_{(i)} - g_{(i)} - \partial_{(i)}h_{()} - h_{()}\partial_{(i)}$, $i \geq 0$, переписываются в виде равенств

$$d(h_{(i)}) = 0 - (\partial_{(i)}h_{()} + h_{()}\partial_{(i)}), \quad i \geq 0,$$

которые означают, что $h_{(i): X_{*, m} \rightarrow Y_{*-1, m+2}$ является гомотопией между отображениями $0, (\partial_{(i)}h_{()} + h_{()}\partial_{(i)}): X_{n, \bullet} \rightarrow Y_{n-1, \bullet+1}$ дифференциальных модулей и, следовательно, F_∞ -компонента $h_{(): X_{*, \bullet} \rightarrow Y_{*, \bullet+1}$ удовлетворяет с точностью до гомотопии условию (2.1). Таким образом, для произвольной гомотопии $\tilde{h} = \{h_{(i_1, \dots, i_k)}\}$ между отображениями дифференциальных модулей с гранями f и g , рассматриваемых как морфизмы дифференциальных F_∞ -модулей, F_∞ -компонента $h_{()}$ гомотопии $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ является с точностью до гомотопии гомотопией между отображениями дифференциальных модулей с гранями $f, g: (X, d, \partial_i) \rightarrow (Y, d, \partial_i)$.

При $k = 2$ соотношения (2.3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d(h_{(i_1, i_2)}) &= f_{(i_1, i_2)} - g_{(i_1, i_2)} - \partial_{(i_1, i_2)}h_{()} - h_{()}\partial_{(i_1, i_2)} \\ &\quad - \partial_{(i_1)}h_{(i_2)} + \partial_{(i_2-1)}h_{(i_1)} - h_{(i_1)}\partial_{(i_2)} + h_{(i_2-1)}\partial_{(i_1)}, \quad i_1 < i_2. \end{aligned}$$

При $k = 3$ соотношения (2.3) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} d(h_{(i_1, i_2, i_3)}) &= f_{(i_1, i_2, i_3)} - g_{(i_1, i_2, i_3)} - \partial_{(i_1, i_2, i_3)}h_{()} - h_{()}\partial_{(i_1, i_2, i_3)} - \partial_{(i_1)}h_{(i_1, i_2)} \\ &\quad - \partial_{(i_1, i_2)}h_{(i_3)} - \partial_{(i_3-2)}h_{(i_1, i_2)} - \partial_{(i_2-1, i_3-1)}h_{(i_1)} + \partial_{(i_2-1)}h_{(i_1, i_3)} \\ &\quad + \partial_{(i_1, i_3-1)}h_{(i_2)} - h_{(i_1)}\partial_{(i_2, i_3)} - h_{(i_1, i_2)}\partial_{(i_3)} - h_{(i_3-2)}\partial_{(i_1, i_2)} \\ &\quad - h_{(i_2-1, i_3-1)}\partial_{(i_1)} + h_{(i_2-1)}\partial_{(i_1, i_3)} + h_{(i_1, i_3-1)}\partial_{(i_2)}, \quad i_1 < i_2 < i_3. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано в примере 1.2, можно показать, что каждую гомотопию между морфизмами A_∞ -алгебр [7], а также гомотопию между морфизмами A_∞ -модулей над A_∞ -алгебрами, можно рассматривать как гомотопию между морфизмами соответствующих F_∞ -модулей.

Легко видеть, что для произвольных F_∞ -модулей $(X, d, \tilde{\partial})$ и $(Y, d, \tilde{\partial})$ отношение между морфизмами F_∞ -модулей вида $(X, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$, определяемое наличием

гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности F_∞ -модулей.

Рассмотрим теперь основные гомотопические свойства дифференциальных модулей с гомотопическими симплициальными гранями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}$ – произвольные морфизмы F_∞ -модулей, удовлетворяющие условию $\tilde{\eta}\tilde{\xi} = \tilde{1}_Y$, и пусть $\tilde{h}: X \rightarrow X$ – гомотопия между морфизмами F_∞ -модулей $\tilde{\eta}$ и $\tilde{1}_X$, для которой выполнены условия $\tilde{\eta}\tilde{h} = \tilde{0}$, $\tilde{\xi}\tilde{h} = \tilde{0}$, $\tilde{h}\tilde{h} = \tilde{0}$. Любая тройка $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$, удовлетворяющая указанным выше условиям, называется *SDR-ситуацией F_∞ -модулей*.

Ясно, что для любой SDR-ситуации F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ всегда определена SDR-ситуация $(\eta_{()}: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi_{()}, h_{()})$ дифференциальных модулей.

Будем говорить, что SDR-ситуация F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ *продолжает* SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей, если эта SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей совпадает с указанной выше SDR-ситуацией дифференциальных модулей $(\eta_{()}: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi_{()}, h_{()})$.

Поведение структуры F_∞ -модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных модулей описывается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задан произвольный F_∞ -модуль $(X, d, \tilde{\partial})$ и задана любая SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$. Тогда

- 1) на дифференциальном модуле (Y, d) имеется F_∞ -дифференциал $\tilde{\partial}: Y \rightarrow Y$, для которого F_∞ -границы $\partial_{(i_1, \dots, i_k)}: Y_{*, \bullet} \rightarrow Y_{*-k, \bullet+k-1}$ задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \partial_{()} &= d, \\ \partial_{(i_1, \dots, i_k)} &= \eta \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{L_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_1})})} (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_1+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_2})})}) \dots \right. \\ &\quad \left. \dots (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_p+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}) \right) \xi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где символ L_σ такой же, как и в формуле (1.8);

- 2) определена SDR-ситуация F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$, которая продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. F_∞ -компоненты $\eta_{(i_1, \dots, i_k)}$, $\xi_{(i_1, \dots, i_k)}$ морфизмов $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ и F_∞ -компоненты $h_{(i_1, \dots, i_k)}$ гомотопии $\tilde{h}$ задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \eta_{()} &= \eta, \\ \eta_{(i_1, \dots, i_k)} &= \eta \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{L_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_1})})} (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_1+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_2})})}) \times \dots \right. \\ &\quad \left. \times (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_p+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}) \right) h, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\xi_{()} &= \xi, \\ \xi_{(i_1, \dots, i_k)} &= h \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{L_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_1})})} (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_1+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_2})})}) \times \dots \right. \\ &\quad \left. \times (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_p+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}) \right) \xi,\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}h_{()} &= h, \\ h_{(i_1, \dots, i_k)} &= h \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{L_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_1})})} (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_1+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_{m_2})})}) \times \dots \right. \\ &\quad \left. \times (h \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m_p+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}) \right) h,\end{aligned}\quad (2.7)$$

где символ L_σ такой же, как и в формуле (1.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ как SDR-ситуацию F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}^*: (X, d, \tilde{\partial}^*) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}^*) : \tilde{\xi}^*, \tilde{h}^*)$, где

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}^* &= \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^*\}, \quad \partial_{()}^* = d, \quad \partial_{(i_1, \dots, i_k)}^* = 0, \quad k \geq 1, \\ \tilde{\eta}^* &= \{\eta_{(i_1, \dots, i_k)}^*\}, \quad \eta_{()}^* = \eta, \quad \eta_{(i_1, \dots, i_k)}^* = 0, \quad k \geq 1, \\ \tilde{\xi}^* &= \{\xi_{(i_1, \dots, i_k)}^*\}, \quad \xi_{()}^* = \xi, \quad \xi_{(i_1, \dots, i_k)}^* = 0, \quad k \geq 1, \\ \tilde{h}^* &= \{h_{(i_1, \dots, i_k)}^*\}, \quad h_{()}^* = h, \quad h_{(i_1, \dots, i_k)}^* = 0, \quad k \geq 1.\end{aligned}$$

Без труда проверяется, что если ввести в рассмотрение F -семейство отображений

$$\tilde{t} = \{t_{(i_1, \dots, i_k)}\}: X \rightarrow X, \quad \deg(\tilde{t}) = -1,$$

положив $\tilde{t} = \tilde{\partial} - \tilde{\partial}^*$, то будет иметь место следующее равенство F -семейств отображений:

$$\tilde{\partial}^* \tilde{t} + \tilde{t} \tilde{\partial}^* = -\tilde{t} \tilde{t}.$$

Это равенство говорит о том, что F -семейство отображений $\tilde{t}: X \rightarrow X$ является для F_∞ -дифференциала $\tilde{\partial}^*: X \rightarrow X$ аналогом понятия возмущения дифференциала в смысле работы [2]. Используя эту аналогию, определим, следуя в идейном плане работе [2], следующие F -семейства отображений:

$$\tilde{\partial} = \tilde{\partial}^* + \tilde{\eta}^* \left(\sum_{p \geq 0} \underbrace{\tilde{t}(\tilde{h}^* \tilde{t}) \dots (\tilde{h}^* \tilde{t})}_p \right) \tilde{\xi}^*: Y \rightarrow Y, \quad \deg(\tilde{\partial}) = -1, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\eta}^* + \tilde{\eta}^* \left(\sum_{p \geq 0} \underbrace{\tilde{t}(\tilde{h}^* \tilde{t}) \dots (\tilde{h}^* \tilde{t})}_p \right) \tilde{h}^*: X \rightarrow Y, \quad \deg(\tilde{\eta}) = 0, \quad (2.9)$$

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^* + \tilde{h}^* \left(\sum_{p \geq 0} \underbrace{\tilde{t}(\tilde{h}^* \tilde{t}) \dots (\tilde{h}^* \tilde{t})}_p \right) \tilde{\xi}^*: Y \rightarrow X, \quad \deg(\tilde{\xi}) = 0, \quad (2.10)$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}^* + \tilde{h}^* \left(\sum_{p \geq 0} \underbrace{\tilde{t}(\tilde{h}^* \tilde{t}) \dots (\tilde{h}^* \tilde{t})}_p \right) \tilde{h}^*: X \rightarrow X, \quad \deg(\tilde{h}) = 1. \quad (2.11)$$

Проверка того, что F -семейство отображений $\tilde{\partial}: Y \rightarrow Y$, $\deg(\tilde{\partial}) = -1$, является F_∞ -дифференциалом, и того, что тройка $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightrightarrows (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ является SDR-ситуацией F_∞ -модулей, проводится точно так же, как это сделано в работе [2], с формальной заменой понятий композиции отображений, дифференциалов, SDR-ситуации дифференциальных модулей и т.д. на соответствующие им понятия композиции F -семейств отображений, F_∞ -дифференциалов, SDR-ситуации F_∞ -модулей и т.д. Для завершения доказательства осталось теперь только заметить, что формулы (2.8)–(2.11) эквивалентны формулам (2.4)–(2.7), которые даны в формулировке теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть над любым полем задан произвольный F_∞ -модуль $(X, d, \tilde{\partial})$, и пусть $H(X)$ – биградуированный модуль гомотопий дифференциального модуля (X, d) . Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на модуле гомотопий $H(X)$ структуру F_∞ -модуля $(H(X), d = 0, \tilde{\partial})$ и, кроме того, определяют SDR-ситуацию F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightrightarrows (H(X), d = 0, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$, которая продолжает гомотопическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, d) .

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть заданы произвольный дифференциальный модуль с гранями (X, d, ∂_i) и любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на дифференциальном модуле (Y, d) структуру F_∞ -модуля $(Y, d, \tilde{\partial})$ и, кроме того, определяют SDR-ситуацию F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: (X, d, \partial_i) \rightrightarrows (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$, которая продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть над любым полем задан произвольный дифференциальный модуль с гранями (X, d, ∂_i) , и пусть $H(X)$ – биградуированный модуль гомотопий дифференциального модуля (X, d) . Тогда формулы (2.4)–(2.7) задают на $H(X)$ структуру F_∞ -модуля $(H(X), d = 0, \tilde{\partial})$ и, кроме того, определяют SDR-ситуацию F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightrightarrows (H(X), d = 0, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$, которая продолжает гомотопическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, d) .

Рассмотрим теперь вопрос о единственности F_∞ -дифференциала $\tilde{\partial}: Y \rightarrow Y$, который определяется в теореме 2.1 на дифференциальном модуле (Y, d) .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. F_∞ -дифференциал $\tilde{\partial}: Y \rightarrow Y$, который в теореме 2.1 вводится на дифференциальном модуле (Y, d) , определен однозначно с точностью до изоморфизма F_∞ -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: (X, d) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$, и пусть $(\tilde{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightrightarrows (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ – SDR-ситуация F_∞ -модулей из теоремы 2.1. Кроме того, пусть задана любая SDR-ситуация F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}': (X, d, \tilde{\partial}) \rightrightarrows (Y, d, \tilde{\partial}') : \tilde{\xi}', \tilde{h}')$, которая продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightrightarrows (Y, d) : \xi, h)$. Рассмотрим взаимобратные гомотопические эквивалентности F_∞ -модулей $\tilde{\eta}'\tilde{\xi}: (Y, d, \tilde{\partial}) \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial}')$ и $\tilde{\eta}\tilde{\xi}': (Y, d, \tilde{\partial}') \rightarrow (Y, d, \tilde{\partial})$. Из предложения 1.1 получаем, что гомотопические эквивалентности $\tilde{\eta}'\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}\tilde{\xi}'$ являются изоморфизмами F_∞ -модулей, поскольку справедливы равенства $\eta'_{(\)}\xi_{(\)} = \eta_{(\)}\xi'_{(\)} = \eta\xi = 1_Y$. Таким образом, F_∞ -дифференциал $\tilde{\partial}$, который вводится в теореме 2.1 на дифференциальном модуле (Y, d) , определен однозначно с точностью до изоморфизма F_∞ -модулей.

В заключение раздела отметим, что над полями K , $\text{char}(K) = 0$, гомотопическую инвариантность структуры F_∞ -модуля (теорема 2.1) можно было бы доказать при помощи теории двойственности Кошуля [8], если эту теорию продолжить на квадратичные крашенные алгебры. Однако, предложенное в этом разделе доказательство гомотопической инвариантности структуры F_∞ -модуля, основанное на “perturbation lemma”, более предпочтительно, поскольку это доказательство справедливо над любым коммутативным кольцом K с единицей.

3. Гомологии F_∞ -модулей

и гомологии реализаций симплициальных топологических пространств. Для введения понятия гомологий F_∞ -модуля напомним сначала понятия и утверждения, связанные с конструкцией D_∞ -дифференциального модуля [6], которая применялась в работах [9] и [10] к исследованию E_∞ -структур и A_∞ -структур в спектральных последовательностях расслоений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. D_∞ -дифференциальным модулем (X, d^i) или, более кратко, D_∞ -модулем называется биградуированный модуль $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, рассматриваемый вместе с семейством отображений биградуированных модулей $\{d^i: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*-i,\bullet+i-1}\}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$, бистепени $(-i, i-1)$, которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0. \quad (3.1)$$

Указанное выше семейство отображений модулей $\{d^i: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*-i,\bullet+i-1}\}$ называется D_∞ -дифференциалом D_∞ -модуля (X, d^i) .

Отметим, что для каждого D_∞ -модуля (X, d^i) всегда определен биградуированный дифференциальный модуль (X, d^0) с дифференциалом d^0 бистепени $(0, -1)$, поскольку соотношение (3.1) при $k = 0$ записывается в виде $d^0 d^0 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Морфизмом D_∞ -модулей $f: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений биградуированных модулей $f = \{f^i: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*-i,\bullet+i}\}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$, бистепени $(-i, i)$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j. \quad (3.2)$$

Ясно, что для любого морфизма D_∞ -модулей $f: X \rightarrow Y$ всегда определено отображение $f^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ биградуированных дифференциальных модулей, поскольку соотношение (3.2) при $k = 0$ записывается в виде $d^0 f^0 = f^0 d^0$.

Композиция морфизмов D_∞ -модулей $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ определяется как морфизм D_∞ -модулей $gf = \{(gf)^i\}: X \rightarrow Z$, где

$$(gf)^i = \sum_{k+j=i} g^k f^j: X \rightarrow Z.$$

Операция композиции морфизмов D_∞ -модулей является ассоциативной и тождественным морфизмом для D_∞ -модуля (X, d^i) служит семейство отображений $1_X = \{1_X^i\}: X \rightarrow X$, где $1_X^i = 0$, $i > 0$, и 1_X^0 – тождественное отображение биградуированного модуля X . Таким образом, класс всех D_∞ -модулей и их морфизмов представляют собой категорию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Гомотопией $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами D_∞ -модулей $f, g: X \rightarrow Y$ называется семейство отображений биградуированных модулей $h = \{h^i: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*-i,\bullet+i+1}\}$, $i \in \mathbb{Z}$, $i \geq 0$, бистепени $(-i, i+1)$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geq 0$ следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i h^j + h^j d^i = f^k - g^k. \quad (3.3)$$

Легко видеть, что для произвольной гомотопии $h: X \rightarrow Y$ между морфизмами D_∞ -модулей $f, g: X \rightarrow Y$ всегда определена гомотопия $h^0: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet+1}$ между отображениями $f^0, g^0: (X, d^0) \rightarrow (Y, d^0)$ биградуированных дифференциальных модулей, поскольку соотношение (3.3) при $k = 0$ записывается в виде $d^0 h^0 + h^0 d^0 = f^0 - g^0$.

Напомним теперь основные гомотопические свойства D_∞ -модулей. Пусть заданы произвольные морфизмы D_∞ -модулей $\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h: X \rightarrow X$ между морфизмами D_∞ -модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $h\xi = 0$, $hh = 0$. Любая тройка $(\eta: X \rightleftharpoons Y: \xi, h)$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, называется SDR-ситуацией D_∞ -модулей.

Поведение структуры D_∞ -модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций биградуированных дифференциальных модулей описывает следующая теорема [6].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть заданы произвольные D_∞ -модуль (X, d^i) и SDR-ситуация $(\eta: (X, d^0) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных модулей. Тогда семейство отображений биградуированных модулей $\{d^i: Y_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*-i,\bullet+i-1} \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$ бистепени $(-i, i+s)$, определяемых формулами

$$d^0 = d, \quad d^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (3.4)$$

является D_∞ -дифференциалом на биградуированном модуле Y . Более того, имеется SDR-ситуация D_∞ -модулей $(\bar{\eta}: X \rightleftharpoons Y: \bar{\xi}, \bar{h})$, которая определяется формулами

$$\bar{\xi}^0 = \xi, \quad \bar{\xi}^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) \xi, \quad i \geq 1, \quad (3.5)$$

$$\bar{\eta}^0 = \eta, \quad \bar{\eta}^i = \eta \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (3.6)$$

$$\bar{h}^0 = h, \quad \bar{h}^i = h \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq i \\ i_1 + \dots + i_k = i \\ i_1 \geq 1, \dots, i_k \geq 1}} d^{i_1} \underbrace{(hd^{i_2}) \dots (hd^{i_k})}_{k-1} \right) h, \quad i \geq 1, \quad (3.7)$$

и продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d^s) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть произвольный D_∞ -модуль (X, d^i) задан над любым полем, и пусть $H(X)$ – модуль гомологий дифференциального модуля (X, d^0) . Тогда формулы (3.4)–(3.7) задают на $H(X)$ структуру D_∞ -модуля $(H(X), d^i)$, где $d^0 = 0$, и определяют SDR-ситуацию D_∞ -модулей $(\bar{\eta}: X \rightrightarrows H(X) : \bar{\xi}, \bar{h})$, продолжающую гомологическую SDR-ситуацию дифференциального модуля (X, d^0) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. D_∞ -модуль (X, d^i) называется *стабильным*, если для каждого $x \in X$ найдется номер $k \geq 0$, зависящий от элемента x , для которого выполнено условие $d^i(x) = 0$, $i > k$. Модулем гомологий $H(X)$ стабильного D_∞ -модуля X называется модуль гомологий $\text{Ker } D / \text{Im } D$ градуированного дифференциального модуля $\text{Tot}(X)$ относительно суммарного дифференциала

$$D = (d^0 + d^1 + \dots + d^i + \dots): \text{Tot}(X)_\bullet \rightarrow \text{Tot}(X)_{\bullet-1},$$

где $\text{Tot}(X)$ – градуированный модуль, получаемый из биградуированного модуля X путем свертывания биградуировки в градуировку.

Отметим, что суммарный дифференциал корректно определен только в случае стабильных D_∞ -модулей.

Установим теперь связь между дифференциальными модулями с гомотопическими симплициальными гранями и D_∞ -дифференциальными модулями.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть задан любой F_∞ -модуль $(X, d, \tilde{\partial})$. Тогда на биградуированном модуле $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $X_{n,m} = 0$, $n < 0$, имеется структура стабильного D_∞ -модуля (X, d^i) , задаваемая следующими формулами:

$$\begin{aligned} d^k &= 0: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k-1}, & n < k, \\ d^k &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k-1}, & n \geq k, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где сумма берется по всем F_∞ -граням $\partial_{(i_1, \dots, i_k)}$ из F_∞ -дифференциала $\tilde{\partial}$. Более того, для любой SDR-ситуации F_∞ -модулей $(\bar{\eta}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightrightarrows (Y, d, \tilde{\partial}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ определена SDR-ситуация D_∞ -модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightrightarrows (Y, d^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, которая задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} \xi^k &= 0: Y_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k}, & n < k, \\ \xi^k &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k} \xi_{(i_1, \dots, i_k)}: Y_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k}, & n \geq k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \eta^k &= 0: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n-k,\bullet+k}, & n < k, \\ \eta^k &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k} \eta_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n-k,\bullet+k}, & n \geq k, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} h^k &= 0: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k+1}, & n < k, \\ h^k &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k} h_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k+1}, & n \geq k. \end{aligned} \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ чисел $i_1 < \dots < i_k$ справедливо равенство

$$\widehat{\sigma(i_1)} + \dots + \widehat{\sigma(i_k)} = \sigma(i_1) + \dots + \sigma(i_k) - I(\sigma),$$

где $I(\sigma) = \alpha(\sigma(i_1)) + \dots + \alpha(\sigma(i_k))$ – число инверсий перестановки σ . Теперь при помощи очевидного сравнения $\text{sign}(\sigma) \equiv I(\sigma) \pmod{2}$ и формул (1.4) легко проверяется, что семейство отображений $\{d^k: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*-k,\bullet+k-1} \mid k \geq 0, k \in \mathbb{Z}\}$, определяемое F_∞ -дифференциалом F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$ по формулам (3.8), является D_∞ -дифференциалом на биградуированном модуле X . Таким образом, для каждого F_∞ -модуля $(X, d, \tilde{\partial})$ определен соответствующий ему D_∞ -модуль (X, d^i) , который является стабильным в силу равенств $X_{n,m} = 0$, $n < 0$. Аналогично проверяется, что любая SDR-ситуация F_∞ -модулей $(\tilde{f}: (X, d, \tilde{\partial}) \rightleftharpoons (Y, d, \tilde{\partial}) : \tilde{g}, \tilde{s})$ определяет SDR-ситуацию D_∞ -модулей $(\{\eta^i\}: (X, d^i) \rightleftharpoons (Y, d^i) : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, которая задается по формулам (3.9)–(3.11).

Применяя формулы (3.9)–(3.11) к формулам (2.5)–(2.7), получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть задан любой F_∞ -модуль $(X, d, \tilde{\partial})$, и пусть (X, d^i) – соответствующий ему D_∞ -дифференциальный модуль, определяемый по формулам (3.8). Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных модулей $(\eta: (X, d^0 = d_{(\cdot)}) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$. Тогда SDR-ситуация D_∞ -модулей $(\{\tilde{\eta}^i\}: X \rightleftharpoons Y : \{\tilde{\xi}^i\}, \{\tilde{h}^i\})$, задаваемая по формулам (3.5)–(3.7), совпадает с SDR-ситуацией D_∞ -модулей $(\{\eta^i\}: X \rightleftharpoons Y : \{\xi^i\}, \{h^i\})$, которая определяется по формулам (3.9)–(3.11) для SDR-ситуации F_∞ -модулей $(\tilde{\eta}: X \rightleftharpoons Y : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ из теоремы 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Модулем гомологий $H(X, d, \tilde{\partial})$ дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ будем называть градуированный модуль гомологий $H(X, D)$ стабильного D_∞ -модуля (X, d^i) , определяемого F_∞ -модулем $(X, d, \tilde{\partial})$ по формулам (3.8).

Применяя следствия 2.1, 3.1 и 3.2 к любому заданному над полем F_∞ -модулю, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть над любым полем задан произвольный F_∞ -модуль $(X, d, \tilde{\partial})$, и пусть $(H(X), d = 0, \tilde{\partial})$ является гомологическим F_∞ -модулем из следствия 2.1. Тогда модули гомологий $H(X, d, \tilde{\partial})$ и $H(H(X), d = 0, \tilde{\partial})$ дифференциальных модулей с гомотопическими симплициальными гранями являются изоморфными градуированными модулями.

Покажем теперь, что гомологии реализаций симплициальных топологических пространств можно рассматривать как гомологии F_∞ -модулей.

Напомним сначала [3], что симплициальным топологическим пространством

$$(X_*, \partial_i, s_j), \quad X_* = \{X_n\}_{n \geq 0}, \quad \partial_i: X_n \rightarrow X_{n-1}, \quad 0 \leq i \leq n, \\ s_j: X_n \rightarrow X_{n+1}, \quad 0 \leq j \leq n,$$

называется симплициальный объект в категории топологических пространств.

Двойственным образом [3], косимплициальным топологическим пространством

$$(X^*, \delta^i, \sigma^j), \quad X^* = \{X^n\}_{n \geq 0}, \quad \delta^i: X^{n-1} \rightarrow X^n, \quad 0 \leq i \leq n, \\ \sigma^j: X^{n+1} \rightarrow X^n, \quad 0 \leq j \leq n,$$

называется косимплициальный объект в категории топологических пространств. Примером косимплициального топологического пространства служит косимплициальный объект $(\Delta^*, \delta^i, \sigma^j)$ в категории топологических пространств, определяемый следующими равенствами:

$$\begin{aligned}\Delta^n &= \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1\}, \\ \delta^i(t_1, \dots, t_{n-1}) &= \begin{cases} (0, t_1, \dots, t_{n-1}), & i = 0, \\ (t_1, \dots, t_i, t_i, \dots, t_{n-1}), & 0 < i < n, \\ (t_1, \dots, t_{n-1}, 1), & i = n, \end{cases} \\ \sigma^j(t_1, \dots, t_{n+1}) &= (t_1, \dots, t_j, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}), \quad 0 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Напомним теперь [7], что реализацией $|X_*|$ симплициального топологического пространства (X_*, ∂_i, s_j) называется фактор-пространство $|X_*| = \bigcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim$, по отношению эквивалентности $\sim$, порожденному соотношениями

$$(\partial_i(x), u) \sim (x, \delta^i(u)), \quad (s_j(x), v) \sim (x, \sigma^j(v)), \quad x \in X_n, \quad u \in \Delta^{n-1}, \quad v \in \Delta^{n+1}, \quad (3.12)$$

рассматриваемое с новой топологией, замкнутыми множествами в которой считаются те множества, пересечения которых с каждым из множеств

$$F_m |X_*| = \bigcup_{0 \leq n \leq m} X_n \times \Delta^n / \sim, \quad m \geq 0,$$

являются замкнутыми в фактор-топологии на $|X_*|$.

Опишем теперь связь между сингулярными гомологиями $H(|X_*|)$ реализаций $|X_*|$ симплициальных топологических пространств (X_*, ∂_i, s_j) и гомологиями дифференциальных модулей с гомотопическими симплициальными гранями.

Пусть задано любое симплициальное топологическое пространство (X_*, ∂_i, s_j) . Рассмотрим для (X_*, ∂_i, s_j) дифференциальный модуль с гранями $(C(X), d, \partial_i)$, где

$$C(X)_{*,\bullet} = C_\bullet(X_*) = \{C(X)_{n,m}\}, \quad C(X)_{n,m} = C_m(X_n),$$

$(C_\bullet(X_n), d)$ – сингулярный цепной комплекс топологического пространства X_n с коэффициентами в произвольном поле и цепные операторы граней $\partial_i: C_\bullet(X_n) \rightarrow C_\bullet(X_{n-1})$ индуцированы непрерывными операторами граней $\partial_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$. Если рассмотреть $(C_\bullet(X_*), d, \partial_i)$ как F_∞ -модуль $(C_\bullet(X_*), d, \tilde{\partial})$, то из соотношений (3.12) следует, что над данным полем сингулярные гомологии $H(|X_*|)$ реализации $|X_*|$ изоморфны гомологиям $H(C_\bullet(X_*), d, \tilde{\partial})$ рассматриваемого F_∞ -модуля $(C_\bullet(X_*), d, \tilde{\partial})$. Применяя теперь к дифференциальному модулю с гранями $(C_\bullet(X_*), d, \partial_i)$ предложение 3.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть задано любое симплициальное топологическое пространство (X_*, ∂_i, s_j) , и пусть $(H_\bullet(X_*), d = 0, \tilde{\partial})$ – F_∞ -модуль из следствия 2.3, определяемый указанным выше дифференциальным модулем с симплициальными гранями $(C_\bullet(X_*), d, \partial_i)$. Тогда над любым полем имеет место изоморфизм градуированных модулей $H(|X_*|) = H(H_\bullet(X_*), d = 0, \tilde{\partial})$.

Покажем, что теорема 3.3 является обобщением теоремы Кадеишвили [4] о том, что над полями сингулярные гомологии классифицирующего пространства топологической группы полностью определяются структурой A_∞ -алгебры на сингулярных гомологиях этой топологической группы.

Пусть произвольная топологическая группа G непрерывно действует справа на топологическом пространстве X и слева на топологическом пространстве Y . Рассмотрим симплициальное топологическое пространство $(B_*(X, G, Y), \partial_i, s_j)$, определяемое формулами $B_n(X, G, Y) = X \times G^{\times n} \times Y$, $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}\partial_i(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) &= (a_0, a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}), & 0 \leq i \leq n, \\ s_j(a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) &= (a_0, a_1, \dots, a_i, e, a_{i+1}, \dots, a_n, a_{n+1}), & 0 \leq j \leq n,\end{aligned}$$

где элемент $e \in G$ является нейтральным элементом группы G , $a_0 \in X$, $a_{n+1} \in Y$, $a_k \in G$, $1 \leq k \leq n$. Применяя теорему 3.3 к симплициальному топологическому пространству $(B_*(X, G, Y), \partial_i, s_j)$, получаем изоморфизм градуированных модулей

$$H(|B_*(X, G, Y)|) = H(H_\bullet(B_*(X, G, Y)), d = 0, \tilde{\partial}). \quad (3.17)$$

В частном случае, когда X и Y совпадают с одноточечным пространством $\{*\}$, изоморфизм (3.17) является хорошо известным из работы [4] изоморфизмом градуированных модулей $H(BG) = H(B(H(G)))$, где $H(BG)$ – сингулярные гомологии классифицирующего пространства BG топологической группы G с коэффициентами в поле и $H(B(H(G)))$ – гомологии B -конструкции A_∞ -алгебры $(H(G), d = 0, \pi_n)$ сингулярных гомологий $H(G)$ группы G с коэффициентами в данном поле. Действительно, реализация $|B_*(*, G, *)|$ является [7] классифицирующим пространством BG топологической группы G и, как показывает пример 1.2 и предложение 2.2, имеет место равенство градуированных модулей гомологий

$$H(B(H(G))) = H(H_\bullet(B_*(*, G, *)), d = 0, \tilde{\partial}).$$

Из этого получаем указанный выше изоморфизм градуированных модулей $H(BG) = H(B(H(G)))$. Аналогично рассуждая, можно показать, что в другом частном случае, когда $X = \{*\}$ и $Y \neq \{*\}$, структура F_∞ -модуля $(H_\bullet(B_*(*, G, Y)), d = 0, \tilde{\partial})$ определяется структурой A_∞ -модуля $(H(Y), d = 0, \mu_n)$ сингулярных гомологий топологического пространства Y с коэффициентами в поле над A_∞ -алгеброй $(H(G), d = 0, \pi_n)$. Стоит еще отметить, что если $X \neq \{*\}$ и $Y \neq \{*\}$, то структура F_∞ -модуля $(H_\bullet(B_*(X, G, Y)), d = 0, \tilde{\partial})$, вообще говоря, не сводится к структурам A_∞ -алгебры или A_∞ -модуля над A_∞ -алгеброй, а приводит к некоторой A_∞ -подобной дифференциальной алгебраической структуре, которая до настоящего времени еще не рассматривалась.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Смирнов, “ A_∞ -симплициальные объекты и A_∞ -топологические группы”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 913–919.
- [2] V. K. A. M. Guenheimer, L. A. Lambe, J. D. Stasheff, “Perturbation theory in differential homological algebra. II”, *Illinois J. Math.*, **35**:3 (1991), 357–373.
- [3] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, Van Nostrand Math. Stud., **11**, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1967.

- [4] Т. В. Кадеишвили, “К теории гомологии расслоенных пространств”, *УМН*, **35**:3 (1980), 183–188.
- [5] J. D. Stasheff, “Homotopy associativity of H -spaces. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 275–292; “Homotopy associativity of H -spaces. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 293–312.
- [6] С. В. Лапин, “Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 55–76.
- [7] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии*, Факториал, М., 2002.
- [8] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren Math. Wiss., **346**, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [9] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные E_∞ -алгебры и спектральные последовательности расслоений”, *Матем. сб.*, **198**:10 (2007), 3–30.
- [10] С. В. Лапин, “Мультипликативная A_∞ -структура в спектральных последовательностях расслоений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **14**:6 (2008), 141–175.

С. В. Лапин
E-mail: slapin@mail.ru

Поступило
08.10.2012