Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ядченко, Об автоморфизмах неприводимых линейных групп с абелевой силовой 2-подгруппой, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 1, 121–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:12:32

Об автоморфизмах неприводимых линейных групп с абелевой силовой 2-подгруппой

А. А. Ядченко

Пусть $\Gamma = AG$ – конечная группа, где $G \triangleleft \Gamma$, $(|G|, |A|) = 1$, A – непримарная подгруппа нечетного порядка, которая не является нормальной в группе Γ , силовая 2-подгруппа группы G абелева и $C_G(a) = C_G(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Предположим, что группа G имеет точный неприводимый комплексный характер степени n , который является a -инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^\#$. В данной работе установлено, что n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 \pmod{|A|}$.

Библиография: 30 названий.

DOI: 10.4213/mzm10184

1. Введение. Пусть p – простое число и n – натуральное число. Ито [1] показал, что если конечная комплексная линейная группа G степени $n < p$ разрешима, то ее силовая p -подгруппа P нормальна за исключением, может быть, случая, когда $n = p - 1$ и n – степень 2. Он также отметил, что этот результат верен и для p -разрешимых групп. Уинтер [2] доказал, что если G разрешима и неприводима и P не является нормальной в G , то n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv -1, 0$ или $1 \pmod{p}$.

В работе [3] Айзекс поставил вопрос о возможности распространения теоремы Уинтера на p -разрешимые группы. Там же им отмечено, что доказательство легко сведется к случаю $G = PO_{p'}(G)$ с $|P| = p$. Ранее ([4]–[6]) установлено, что результат Уинтера верен для p -разрешимых неприводимых комплексных линейных групп степени $n < 2p$. Здесь же определены степени, при которых подгруппа P не является нормальной в G . Это: $n = p - 1, p, p + 1, 2(p - 1)$ или $2p - 1$, и установлено, что n – степень простого числа.

В [7], [8] утверждается, что в некоторых частных случаях проблема Айзекса решается положительно без применения теоремы о классификации простых групп даже для π -обособленных неприводимых линейных групп произвольной степени. Предположение Айзекса окончательно подтверждено Ньютоном [9] с применением теоремы о классификации конечных простых групп.

Пусть G – конечная группа, A – такая группа ее автоморфизмов, что $(|A|, |G|) = 1$. Тогда A называется группой *копростых* автоморфизмов группы G . Если $C_G(a) = C_G(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$, то A называется *сильноцентрализованной группой копростых автоморфизмов* группы G .

Из теоремы, доказанной в серии статей [10]–[12], явствует, что если конечная группа G с нетривиальной сильноцентрализованной группой A нечетного порядка копростых автоморфизмов имеет точный комплексный неприводимый a -инвариантный для некоторого неединичного элемента $a \in A$ характер степени $n < 2|A|$, то $n = |A| - 1$, $|A| + 1$, $2(|A| - 1)$ или $2|A| - 1$ и n – степень некоторого простого числа. В [13] установлено, что если $n = 2|A| + 1$ и группа A непримарна и имеет нечетный порядок, то n – также степень некоторого простого числа.

В приведенных случаях n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 \pmod{|A|}$. В [12] сформулирована гипотеза о справедливости этого утверждения для произвольного числа n . Заметим, что при $|A| = p$ получим случай, отмеченный Айзексом. Если G разрешима, то она справедлива [14].

Предположим, что силовская 2-подгруппа G_2 группы G абелева и n – произвольное число. В настоящей работе докажем (теорема), что и в этом случае n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 \pmod{|A|}$.

УСЛОВИЕ В. Скажем, что для Γ , A , G , C , χ и n выполнено условие В, если $\Gamma = AG$, $G \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |G|) = 1$, A – непримарная группа нечетного порядка, которая не является нормальной в группе Γ , $C_G(a) = C_G(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^\#$, подгруппа G_2 абелева и группа G имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n , который является a -инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^\#$.

ТЕОРЕМА. Если для Γ , A , G , C , χ и n выполнено условие В, то n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$.

2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел; запись $i = 1, \dots, t$; если ψ – характер некоторой группы X , то $\text{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ ;

$$Z(\psi) = \{x \in X \mid |\psi(x)| = \psi(1)\}$$

– центр характера ψ ; $\pi = \pi(A)$; если $M \subseteq \Gamma$, то $\pi' = \pi(M) \setminus \pi$; $M_{\pi'}$ – холлова π' -подгруппа группы M . Выражение $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$ обозначает, что $f \equiv -1 \pmod{|A|}$ или $f \equiv 1 \pmod{|A|}$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и σ – некоторое множество простых делителей числа m . Тогда m_σ – σ -часть числа m . Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [15] или [16]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $|A|$ нечетен. Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 в [16]. Согласно этой теореме существует взаимно-однозначное соответствие

$$\pi(B, A): \text{Irr}_A(B) \rightarrow \text{Irr}(C_B(A))$$

между множеством всех A -инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A . Пусть $\varphi \in \text{Irr}_A(B)$. Тогда по лемме 13.3 [16] существует такой единственный неприводимый характер $\hat{\varphi}$ группы Γ , что $\hat{\varphi}_B = \varphi$ и $A \subseteq \ker(\det \hat{\varphi})$. Он называется *каноническим продолжением характера φ на группу Γ* . В дальнейшем под $\hat{\varphi}$ будем понимать именно такой характер.

Приведем известные результаты и докажем ряд вспомогательных лемм.

ЛЕММА 1 [9]. Пусть M – центральное произведение групп $S_1, \dots, S_r$ и пусть χ – неприводимый характер группы M . Предположим, что для каждого $i, j \in \{1, \dots, r\}$ существует такой автоморфизм σ_{ij} группы M , что $\chi^{\sigma_{ij}} = \chi$ и $\sigma_{ij}(S_i) = S_j$. Тогда $\chi(1) = m^r$ для некоторого натурального числа m .

ЛЕММА 2 [17]. Пусть G – группа Янко порядка 175560. Тогда

$$|N_G(G_2)| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7, \quad C_G(G_2) = G_2, \quad N_G(G_3) = N_G(G_5) = D' \times D'',$$

где D' и D'' – группы диэдра порядков 6 и 10 соответственно. Нормализаторы силовских 7-, 11-, 19-подгрупп группы G являются группами Фробениуса порядков 42, 110 и 114 соответственно.

ЛЕММА 3 [18]–[20]. Группа G типа Pu обладает следующими свойствами:

- (1) G – простая группа порядка $q^3 \cdot (q^3 + 1)(q - 1)$, где $q = 3^{2n+1} \geq 27$;
- (2) G_2 элементарная абелева порядка 8, $C_G(G_2) = G_2$ и $N_G(G_2)$ имеет порядок $2^3 \cdot 3 \cdot 7$;
- (3) все инволюции в G сопряжены; если i – инволюция, то $C_G(i) = \langle i \rangle \times \text{PSL}(2, q)$;
- (4) G содержит циклические холловы подгруппы A, B, C, D такие, что $c \mid q = 3m^2$

$$|A| = q + 1 + 3m, \quad |B| = q + 1 - 3m, \quad |C| = \frac{q+1}{4}, \quad |D| = \frac{q-1}{2}.$$

Если $1 \neq x \in A, B, C$ или D , то $|C_G(x)| = |A|, |B|, 4|C|$ и $2|D|$ соответственно;

- (5) нормализатор $N = PW$ силовской 3-подгруппы P имеет порядок $(q-1)q^3$ и $C_P(x) = 1$ для любого неединичного элемента x нечетного порядка из W ;
- (6) максимальные подгруппы группы типа Pu с точностью до изоморфизма исчерпываются следующими подгруппами:
 - (a) $[q^3]: \mathbf{Z}_{q-1}$ – нормализатор силовской 3-подгруппы;
 - (b) $2 \times \text{PSL}(2, q)$, $q \geq 27$ – централизатор инволюции i ;
 - (c) $\mathbf{Z}_{q+1+3m}: \mathbf{Z}_6$ – нормализатор подгруппы A ;
 - (d) $\mathbf{Z}_{q+1-3m}: \mathbf{Z}_6$ – нормализатор подгруппы B ;
 - (e) $2^2 \times (D_{(1/2)(q+1)}): 3$ – нормализатор подгруппы порядка четыре;
 - (f) группа $Pu \cdot {}^2G_2(q_0)$, $q = q_0^\alpha$, α – простое число.

ЛЕММА 4 [21; теорема 8.27]. В группе $\text{PSL}(2, p^f)$, p – простое число, содержатся только следующие подгруппы:

- (1) элементарная абелева p -группа;
- (2) циклическая группа порядка n , где n делит $(p^f \pm 1)/k$, $k = (p^f - 1, 2)$;
- (3) диэдральная группа порядка $2n$, где n из 2;
- (4) знакопеременная группа A_4 при $p > 2$ или $p = 2$ и $f \equiv 0 \pmod{2}$;
- (5) симметрическая группа S_4 при $p^{2f} \equiv 1 \pmod{16}$;
- (6) знакопеременная группа A_5 при $p = 5$ или $p^{2f} \equiv 1 \pmod{5}$;
- (7) полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^m на циклическую группу порядка s , где s делит $p^m - 1$ и s делит $p^f - 1$;
- (8) группа $\text{PSL}(2, p^m)$, где m делит f и $\text{PGL}(2, p^m)$ для $2m$, делящего f .

ЛЕММА 5 [22]. Пусть $G = \text{PSL}(2, 2^f)$, $f \geq 2$. Тогда

- (1) группа G простая порядка $2^f(2^{2f} - 1)$, G_2 – элементарная абелева порядка 2^f ;

- (2) G содержит циклические подгруппы R^1 и R^2 порядков $2^f - 1$ и $2^f + 1$ соответственно;
- (3) если $x \in R^i$, $x \neq 1$, то $C_G(x) = R^i$, $i = 1, 2$;
- (4) $|N_G(R^i)| = 2|R^i|$, $i = 1, 2$.

ЛЕММА 6 [22]. Пусть $G = \text{PSL}(2, q)$, где $q = p^n$, p – нечетное простое число. Тогда

- (1) $2|G| = q(q^2 - 1)$; если $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$, то G_2 имеет порядок равный 4;
- (2) если x – инволюция из G , то $C_G(x)$ диэдральный порядка $q - d$, где $d \equiv q \pmod{4}$, $d = \pm 1$;
- (3) G содержит циклическую холлову подгруппу порядка $(q - d)/2\alpha$, 2α – высшая степень 2, делящая $q - d$. Любые две такие подгруппы сопряжены и имеют тривиальное пересечение со своими сопряженными.

ЛЕММА 7. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Тогда A – TI-подгруппа в Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \triangleleft \Gamma$, то A – TI-подгруппа в Γ . Пусть A не является нормальной в Γ и g – произвольный элемент из $\Gamma \setminus N_\Gamma(A) = \Gamma \setminus AC_B(A)$. Тогда $g = ax$, где $a \in A$ и $x \in B^\#$. Пусть $y \in A \cap A^g$. Тогда

$$y \in A^g = A^{ax} = (A^a)^x = A^x$$

и, следовательно, $y = a_1^x$ для некоторого элемента $a_1 \in A$. Но $y \in A$. Поэтому

$$[a_1, x] = a_1^{-1}x^{-1}a_1x = a_1^{-1}a_1^x = a_1^{-1}y \in A.$$

Так как $B \trianglelefteq \Gamma$, то $[a_1, x] \in A \cap B = 1$. Отсюда $a_1x = xa_1$, т.е. $x \in C_B(a_1)$. Пусть $a_1 \neq 1$. Тогда $x \in C_B(A)$ и, следовательно, $g \in AC_B(A)$. Это противоречит выбору элемента g . Значит, $a_1 = 1$. Тогда $y = 1$. Поэтому $A \cap A^g = 1$, т.е. A – TI-подгруппа в группе Γ .

Лемма доказана.

ЛЕММА 8. Пусть A – группа копростых автоморфизмов группы B . Тогда $B = [B, A]C_B(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6 [23] $[B, A] \triangleleft B$. Пусть Q – A -инвариантная силовская q -подгруппа из B , существующая согласно теореме 6.2.2 [15]. По теореме 5.3.5 [15] $Q = [Q, A]C_Q(A)$. Поскольку $Q \subseteq B$, то $[Q, A] \subseteq [B, A]$ и $C_Q(A) \subseteq C_B(A)$. Следовательно,

$$Q \subseteq [B, A]C_B(A).$$

Так как $[B, A]C_B(A)$ – подгруппа из B и $|Q|$ делит $[B, A]C_B(A)$ для каждого $q \in \pi(B)$, то $|B|$ делит $|[B, A]C_B(A)|$ и, значит,

$$B \subseteq [B, A]C_B(A).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$ и подгруппа A не нормальна в Γ . Тогда A изоморфна дополнительному множителю некоторой группы Фробениуса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Фраттини для каждого $q \in \pi'$ существует A -инвариантная силовская q -подгруппа Q и, так как подгруппа A не является нормальной в группе Γ по условию доказываемой леммы, то для некоторой A -инвариантной силовской q -подгруппы $Q \subseteq B$ справедливо утверждение $[Q, A] \neq 1$. Пусть подгруппа Q_0 максимальна среди нормальных в $A[Q, A]$ собственных подгрупп группы $[Q, A]$. Рассмотрим фактор-группу

$$\bar{\Gamma} = A[Q, A]/Q_0 = \bar{A}\bar{Q},$$

где $\bar{A} = AQ_0/Q_0 \simeq A$ и $\bar{Q} = [Q, A]/Q_0$. Из максимальности Q_0 следует, что $\bar{Q}$ элементарная абелева. Тогда по теореме 5.2.3 [15]

$$\bar{Q} = [\bar{Q}, \bar{A}] \times C_{\bar{Q}}(\bar{A}).$$

Предположим, что $C_{\bar{Q}}(\bar{A}) = \bar{Q}$. Тогда для всех элементов $g \in [Q, A]$ и для всех элементов $a \in A$ имеем, что $[g, a] \in Q_0$. Стало быть, $[[Q, A], A] \subseteq Q_0$. Поскольку по лемме 6 [23] $[[Q, A], A] = [Q, A]$, получаем, что $[Q, A] \subseteq Q_0$. Это противоречит предположению.

Пусть $C_{\bar{Q}}(\bar{A}) \neq \bar{Q}$. Из максимальности подгруппы Q_0 следует, что $C_{\bar{Q}}(\bar{A}) = \bar{1}$. Так как A – ТИ-подгруппа в Γ по лемме 7, то $\bar{A}$ – ТИ-подгруппа в $\bar{\Gamma}$. Значит, $\bar{\Gamma}$ – группа Фробениуса с дополнительным множителем $\bar{A} \simeq A$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$ и $K \triangleleft \Gamma$. Если AK/K не нормальна в Γ/K , то $A \cap K = 1$, а если $AK/K \triangleleft \Gamma/K$, то $B = K_{\pi'}C_B(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AK/K не является нормальной в Γ/K и пусть $A_0 = A \cap K$. Поскольку $A_0 \subseteq A$, то $A_0 = A_0^x \subseteq A^x$ для всех $x \in N_\Gamma(A_0)$. Стало быть, $A_0 \subseteq A \cap A^x$.

Предположим, что $A_0 \neq 1$. Так как по лемме 7 подгруппа A является ТИ-подгруппой в Γ , получаем, что $A^x = A$. Значит, $x \in N_\Gamma(A)$. Поэтому

$$N_\Gamma(A_0) \subseteq N_\Gamma(A). \quad (1)$$

С другой стороны, $K = A_0K_{\pi'}$, где $K_{\pi'} = K \cap B$. Так как $A_0K_{\pi'} \triangleleft \Gamma$ и A_0 – холова π -подгруппа из K , по лемме Чунихина 2.2.1 [24] получаем, что $\Gamma = N_\Gamma(A_0)K$, т.е. $\Gamma = N_\Gamma(A_0)K_{\pi'}$. Отсюда и равенства (1) следует, что $\Gamma = N_\Gamma(A)K_{\pi'}$. Поэтому $AK_{\pi'} \triangleleft \Gamma$. Но $AK_{\pi'} = AK$. Значит, $AK \triangleleft \Gamma$, т.е. $AK/K \triangleleft \Gamma/K$. Получили противоречие с предположением. Итак, $A_0 = 1$.

Пусть теперь $AK/K \triangleleft \Gamma/K$. Поскольку $BK/K \triangleleft \Gamma/K$, то

$$\Gamma/K = BK/K \times AK/K.$$

Значит, $[B, A] \subseteq K$. Но $[B, A] \subseteq B$. Следовательно, $[B, A] \subseteq K \cap B = K_{\pi'}$. Применим лемму 8. Получим $B = K_{\pi'}C_B(A)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Если A -инвариантная силовская q -подгруппа Q из B циклическая и $|A|$ не делит $q - 1$ для некоторого простого числа $q \in \pi(B)$, то $Q \subseteq C_B(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку подгруппа Q абелева, то $Q = [Q, A] \times C_Q(A)$. Предположим, что $[Q, A] \neq 1$. Так как $[Q, A] \triangleleft AQ$ и подгруппа $[Q, A]$ циклическая, то подгруппа Q_0 порядка q из $[Q, A]$ будет нормальной в AQ . Рассмотрим подгруппу $\Gamma_0 = AQ_0$. Так как $Q_0 \not\subseteq C_Q(A)$ и факторгруппа $\Gamma_0/C_{\Gamma_0}(Q_0) \simeq A$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(Q_0)$, с учетом того, что $|\text{Aut}(Q_0)| = q - 1$, имеем, что A делит $q - 1$. Получили противоречие с условием леммы. Значит, $[Q, A] = 1$ и, следовательно, $Q \subseteq C_B(A)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 12. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, A разрешима и имеем $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Если $I_\Gamma(\varphi) \neq B$ для некоторого характера $\varphi \in \text{Irr}(B)$, то $\varphi \in \text{Irr}_A(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы вытекает, что $\varphi^a = \varphi$ для некоторого элемента $a \in A^\#$. Это означает, что $\varphi \in \text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)$. Видим, что для доказательства леммы нам достаточно убедиться в том, что $\text{Irr}_{\langle a \rangle}(B) \subseteq \text{Irr}_A(B)$. Поскольку из теоремы 13.1 [16] вытекает, что

$$|\text{Irr}_A(B)| = |\text{Irr}(C_B(A))|, \quad |\text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)| = |\text{Irr}(C_B(\langle a \rangle))|,$$

то учитывая, что $C_B(\langle a \rangle) = C_B(A)$ получаем, что $|\text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)| = |\text{Irr}_A(B)|$. Так как $\text{Irr}_A(B) \subseteq \text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)$, на основании последнего равенства заключаем, что $\text{Irr}_A(B) = \text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Если φ – a -инвариантный неприводимый характер группы B для некоторого неединичного элемента $a \in A$, то группа Γ имеет такой неприводимый характер $\widehat{\varphi}$, что для него и характера φ справедливы следующие утверждения:

- (1) $\widehat{\varphi}_A = k_A \rho_A + \varepsilon \beta_\varphi(1) 1_A$;
- (2) $\varphi_{C_B(A)} = |A| \theta + \varepsilon \beta_\varphi$ и
- (3) $(\varphi_{C_B(A)}, \beta_\varphi)_{C_B(A)} = k_C |A| + \varepsilon$, где k_A и k_C – целые неотрицательные числа, ρ_A – регулярный характер подгруппы A , $\varepsilon = \pm 1$, θ – характер подгруппы $C_B(A)$ или 0 и β_φ – такой неприводимый характер подгруппы $C_B(A)$, что $\beta_\varphi = (\varphi)\pi(B, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы $I_B(\varphi) \neq B$. По лемме 12 $\varphi \in \text{Irr}_A(B)$. Тогда группа Γ имеет неприводимый характер $\widehat{\varphi}$ по лемме 13.3 [16].

По лемме 9 подгруппа A изоморфна дополнительному множителю некоторой группы Фробениуса. Так как подгруппа A имеет нечетный порядок, из строения дополнительного множителя группы Фробениуса [25] следует, что либо A циклическая, либо

$$A = \langle a \rangle \langle b \rangle,$$

где $(o(a), o(b)) = 1$, $\langle a \rangle = A'$, и все элементы простых порядков из $\langle b \rangle$ лежат в центре A .

Если A циклическая, то доказываемая лемма верна по теореме 13.32 (d) [16]. Следовательно, мы можем полагать, что A не циклическая.

Пусть $z = ab_0$, где b_0 – элемент простого порядка из $\langle b \rangle$. Так как $b_0 \in Z(A)$, то $\langle z \rangle = \langle a \rangle \langle b_0 \rangle$.

Рассмотрим $\widehat{\varphi}_{\langle a \rangle B}$. Поскольку $A \subseteq \ker(\det(\widehat{\varphi}))$, то

$$\langle a \rangle \subseteq \ker(\det(\widehat{\varphi}_{\langle a \rangle B})).$$

Поэтому каноническое продолжение $\widehat{\widehat{\varphi}}_a$ характера $\varphi \in \text{Irr}(B)$ до неприводимого характера из $\text{Irr}(\langle a \rangle B)$ имеет свойство:

$$\widehat{\widehat{\varphi}}_a = \widehat{\varphi}_{\langle a \rangle B},$$

в силу единственности $\widehat{\widehat{\varphi}}_a$. Аналогично,

$$\widehat{\widehat{\varphi}}_{b_0} = \widehat{\varphi}_{\langle b_0 \rangle B}, \quad \widehat{\widehat{\varphi}}_b = \widehat{\varphi}_{\langle b \rangle B}, \quad \widehat{\widehat{\varphi}}_z = \widehat{\chi}_{\langle z \rangle B}.$$

Применив теорему 13.32(d) [16] к группам $\langle a \rangle B$, $\langle b_0 \rangle B$, $\langle b \rangle B$ и $\langle z \rangle B$, получаем, что

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\langle a \rangle} &= k_a \rho_{\langle a \rangle} + \varepsilon_a \beta_a(1)1_{\langle a \rangle}, & \widehat{\varphi}_{\langle b_0 \rangle} &= k_{b_0} \rho_{\langle b_0 \rangle} + \varepsilon_{b_0} \beta_{b_0}(1)1_{\langle b_0 \rangle}, \\ \widehat{\varphi}_{\langle b \rangle} &= k_b \rho_{\langle b \rangle} + \varepsilon_b \beta_b(1)1_{\langle b \rangle}, & \widehat{\varphi}_{\langle z \rangle} &= k_z \rho_{\langle z \rangle} + \varepsilon_z \beta_z(1)1_{\langle z \rangle}, \end{aligned} \quad (2)$$

где k_a, k_{b_0}, k_b, k_z – целые неотрицательные числа, $\rho_{\langle a \rangle}, \rho_{\langle b_0 \rangle}, \rho_{\langle b \rangle}, \rho_{\langle z \rangle}$ – регулярные характеры подгрупп $\langle a \rangle$, $\langle b_0 \rangle$, $\langle b \rangle$ и $\langle z \rangle$ соответственно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \pm 1, & \varepsilon_{b_0} &= \pm 1, & \varepsilon_b &= \pm 1, & \varepsilon_z &= \pm 1, \\ \beta_a &= (\varphi)\pi(B, \langle a \rangle), & \beta_{b_0} &= (\varphi)\pi(B, \langle b_0 \rangle), \\ \beta_b &= (\varphi)\pi(B, \langle b \rangle), & \beta_z &= (\varphi)\pi(B, \langle z \rangle). \end{aligned}$$

Убедимся в том, что $\varepsilon_a = \varepsilon_{b_0} = \varepsilon_b = \varepsilon_z = \varepsilon$ и $\beta_a = \beta_{b_0} = \beta_b = \beta_z = \beta_\varphi$. По теореме 13.32(a) [16]

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{\langle z \rangle B}(cx) &= \varepsilon_z \beta_z(c)1_{\langle z \rangle}(x) & \text{для всех } c \in C_B(A), \quad x \in \langle z \rangle^\#, \\ \widehat{\varphi}_{\langle a \rangle B}(cx) &= \varepsilon_a \beta_a(c)1_{\langle a \rangle}(x) & \text{для всех } c \in C_B(A), \quad x \in \langle a \rangle^\#, \\ \widehat{\varphi}_{\langle b_0 \rangle B}(cx) &= \varepsilon_{b_0} \beta_{b_0}(c)1_{\langle b_0 \rangle}(x) & \text{для всех } c \in C_B(A), \quad x \in \langle b_0 \rangle^\#, \\ \widehat{\varphi}_{\langle b \rangle B}(cx) &= \varepsilon_b \beta_b(c)1_{\langle b \rangle}(x) & \text{для всех } c \in C_B(A), \quad x \in \langle b \rangle^\#. \end{aligned}$$

Из сравнений первого и второго равенств вытекает, что

$$\varepsilon_z \beta_z(c)1_{\langle z \rangle}(x) = \varepsilon_a \beta_a(c)1_{\langle a \rangle}(x)$$

для всех $c \in C_B(A)$ и для всех $x \in \langle a \rangle^\#$, откуда получаем, что $\varepsilon_z = \varepsilon_a$ и $\beta_z = \beta_a$, а из сравнений первого и третьего равенств вытекает, что

$$\varepsilon_{\langle z \rangle} \beta_z(c)1_{\langle z \rangle}(x) = \varepsilon_{b_0} \beta_{b_0}(c)1_{\langle b_0 \rangle}(x)$$

для всех $c \in C_B(A)$ и для всех $x \in \langle b_0 \rangle^\#$, откуда получаем, что $\varepsilon_z = \varepsilon_{b_0}$ и $\beta_z = \beta_{b_0}$. Кроме того, из сравнений третьего и четвертого равенств вытекает, что

$$\varepsilon_{\langle b \rangle} \beta_b(c)1_{\langle b \rangle}(x) = \varepsilon_{b_0} \beta_{b_0}(c)1_{\langle b_0 \rangle}(x)$$

для всех $c \in C_B(A)$ и для всех $x \in \langle b_0 \rangle^\#$, откуда получаем, что $\varepsilon_b = \varepsilon_{b_0}$ и $\beta_b = \beta_{b_0}$. Следовательно, $\varepsilon_a = \varepsilon_{b_0} = \varepsilon_b = \varepsilon_z = \varepsilon$ и $\beta_a = \beta_{b_0} = \beta_b = \beta_z = \beta_\varphi$.

Покажем, что $\beta_\varphi = (\varphi)\pi(B, A)$. Поскольку $\langle b_0 \rangle \triangleleft A$ и $\beta_{b_0} = (\varphi)\pi(B, \langle b_0 \rangle)$, из теоремы 13.31(b) [16] следует, что

$$(\varphi)\pi(B, A) = (\varphi)\pi(B, \langle b_0 \rangle)\pi(C_B(\langle b_0 \rangle), A/\langle b_0 \rangle) = (\beta_{b_0})\pi(C_B(A), A/\langle b_0 \rangle) = \beta_{b_0} = \beta_\varphi.$$

Пусть h – произвольный элемент подгруппы A . Если $(o(h), o(b)) \neq 1$, то h содержит элемент b' простого порядка, который лежит в $\langle b \rangle$. Используя обозначения из равенств (2) и рассуждая, как ранее для элемента z , устанавливаем, что $\varepsilon_h = \varepsilon_{b'} = \varepsilon$ и $\beta_h = \beta_{b'} = \beta_\varphi$.

Предположим, что $(o(h), o(b)) = 1$. Тогда $\langle h \rangle \subseteq \langle a \rangle$. Отсюда, $\varepsilon_h = \varepsilon_a = \varepsilon$ и $\beta_h = \beta_a = \beta_\varphi$. Следовательно,

$$\widehat{\varphi}_{\langle h \rangle} = k_h \rho_{\langle h \rangle} + \varepsilon \beta_\varphi(1) 1_{\langle h \rangle}$$

для всех $h \in A^\#$.

Пусть γ – функция на классах сопряженных элементов подгруппы A , определяемая следующим образом:

$$\gamma(x) = \widehat{\varphi}_A(x) - \varepsilon \beta_\varphi(1) 1_A(x), \quad (3)$$

где $x \in A$. Тогда

$$\gamma(h) = \gamma_{\langle h \rangle}(h) = \widehat{\varphi}_{\langle h \rangle}(h) - \varepsilon \beta_\varphi(1) 1_{\langle h \rangle}(h) = k_h \rho_{\langle h \rangle}(h) = 0,$$

для всех $h \in A^\#$.

Заметим, что значения функции γ совпадают со значениями характера $k_A \rho_A$ на всех элементах подгруппы A , где

$$k_A = \frac{\varphi(1) - \varepsilon \beta_\varphi(1)}{|A|}.$$

По теореме 2.8 [16] γ – характер подгруппы A и по теореме 4.2.7 (ii) [15] $\gamma = k_A \rho_A$, т.е. с учетом равенства (3)

$$\widehat{\varphi}_A - \varepsilon \beta_\varphi(1) 1_A = k_A \rho_A.$$

Следовательно, $\widehat{\varphi}_A = k_A \rho_A + \varepsilon \beta_\varphi(1) 1_A$.

Утверждение (1) леммы доказано. Докажем теперь утверждение (2).

Ранее отмечено, что либо A циклическая, либо $A = \langle a \rangle \langle b \rangle$, где $(o(a), o(b)) = 1$.

Предположим вначале, что A не циклическая.

К группам $\langle a \rangle B$, $\langle b \rangle B$ и характеру $\varphi = \widehat{\varphi}_B \in \text{Irr}_A(B)$ применим утверждение (b) теоремы 13.32 [16]. Получаем, что

$$\varphi_{C_B(A)} = |\langle a \rangle| \theta_a + \varepsilon_a \beta_a, \quad \varphi_{C_B(A)} = |\langle b \rangle| \theta_b + \varepsilon_b \beta_b, \quad (4)$$

где θ_a , θ_b – характеры $C_B(A)$ или 0, $\varepsilon_a = \pm 1$, $\varepsilon_b = \pm 1$, $\beta_a = (\varphi)\pi(B, \langle a \rangle)$ и $\beta_b = (\varphi)\pi(B, \langle b \rangle)$. Ранее установлено, что $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \varepsilon = \pm 1$, $\beta_a = \beta_b = \beta_\varphi$. Ввиду (4)

$$\varphi_{C_B(A)} = |\langle a \rangle| \theta_a + \varepsilon \beta_\varphi, \quad \varphi_{C_B(A)} = |\langle b \rangle| \theta_b + \varepsilon \beta_\varphi.$$

Отсюда

$$\varphi_{C_B(A)} = |\langle a \rangle| |\langle b \rangle| \theta + \varepsilon \beta_\varphi,$$

где θ – характер подгруппы $C_B(A)$ или 0. Значит,

$$\varphi_{C_B(A)} = |A|\theta + \varepsilon\beta_\varphi. \quad (5)$$

Убедимся в том, что $\beta_\varphi = (\varphi)\pi(B, A)$. Пусть $b_0 \in Z(A)$ – элемент простого порядка p . Из равенства (5) вытекает, что p не делит

$$(\varphi_{C_B(A)}, \beta_\varphi)_{C_B(A)} = k_C|A| + \varepsilon, \quad (6)$$

где

$$k_C = (\theta, \beta_\varphi)_{C_B(A)}.$$

По теореме 13.1 (c) [16] $\beta_\varphi = (\varphi)\pi(B, \langle b_0 \rangle)$. По утверждению (b) этой же теоремы

$$\pi(B, A) = \pi(B, \langle b_0 \rangle)\pi(C_B(A), A/\langle b_0 \rangle).$$

Так как $\pi(C_B(A), A/\langle b_0 \rangle)$ является тождественным отображением $\text{Irr}_{A/\langle b_0 \rangle}(C_B(A))$ в $\text{Irr}(C_{C_B(A)}(A/\langle b_0 \rangle))$, из последнего утверждения следует, что $\pi(B, A) = \pi(B, \langle b_0 \rangle)$. Значит, $\beta_\varphi = (\varphi)\pi(B, A)$.

Если же A циклическая, то справедливость равенства (5) вытекает сразу из утверждения (b) теоремы 13.32 [16]. Из нее же следует, что $\beta_\varphi = (\varphi)\pi(B, A)$.

Утверждение (2) леммы доказано.

В свою очередь из равенства (5) следует справедливость выражения (6). Утверждение (3) доказываемой леммы установлено.

Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$ и $(|A|, |B|) = 1$. Предположим, что B содержит нильпотентную холлову подгруппу R . Тогда Γ содержит подгруппу AR .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по порядку группы Γ . Пусть Γ – минимальный контрпример и пусть S – такая силовская подгруппа из R , что $N_\Gamma(S) \neq \Gamma$. Согласно “аргументу Фраттини” $\Gamma = N_\Gamma(S)B$. Следовательно, можем положить, что $A \subseteq N_\Gamma(S)$. Поскольку $S \subseteq R$ и R нильпотентна, то $R \subseteq N_\Gamma(S)$. Так как $|N_\Gamma(S)| < |\Gamma|$ и подгруппа $N_\Gamma(S)$ удовлетворяет условиям леммы, согласно индукции $N_\Gamma(S)$ содержит подгруппу AR . Очевидно, такую подгруппу содержит и Γ . Если же $N_\Gamma(S) = \Gamma$ для всех силовских подгрупп S из R , то $R \triangleleft \Gamma$. Поэтому подгруппа AR также существует.

Лемма доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$ и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$, имеет точный неприводимый характер φ степени n и содержит нильпотентную холлову $\pi(n)$ -подгруппу R . Если n не делится на такую степень $q^\alpha > 1$ простого числа q , что $q^\alpha \equiv 0, 1 \pmod{|A|}$, то $Z(R) \subseteq C_B(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 14 группа Γ содержит подгруппу AR . Поэтому существует также подгруппа $AZ(R)$. Тогда $Z(R) = [Z(R), A] \times C_{Z(R)}(A)$ и, так как

$$Z(R) \cap Z(\varphi) = Z(R) \cap Z(\Gamma) \subseteq C_{Z(R)}(A),$$

по следствию [7] $[Z(R), A]$ делит n . Предположим $[Z(R), A] \neq 1$. Пусть $q \in \pi(n)$ и Q – A -инвариантная силовская q -подгруппа из $[Z(R), A]$. Тогда с учетом леммы 7

AQ является группой Фробениуса с ядром Q . Поэтому $|Q| = q^{\alpha_1} \equiv 1 \pmod{|A|}$ для некоторого числа α_1 . Но $|Q|$ делит $|[Z(R), A]|$, а $|[Z(R), A]|$ делит n , что отмечено выше. Значит, q^{α_1} делит n . Если $\alpha_1 \neq 0$, т.е. $[Z(R), A] \neq 1$, то мы получим противоречие с условием леммы. Значит, $\alpha_1 = 0$ и, следовательно, $[Z(R), A] = 1$, т.е. $Z(R) \subseteq C_B(A)$.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Так как по условию **B** характер χ является a -инвариантным для некоторого $a \in A^\#$, то $I_\Gamma(\chi) \neq G$. Поскольку $\chi \in \text{Irr}_A(G)$ по лемме **12**, из изложенного выше вытекает, что группа Γ имеет такой неприводимый характер $\hat{\chi}$, что $(\hat{\chi})_G = \chi$. Ясно, что $\hat{\chi}(1) = n$.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы Γ . Пусть Γ – группа наименьшего порядка для которой выполняется условие **B**, но в то же время n не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$.

ЛЕММА 16. *Характер $\hat{\chi}$ точный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\ker \hat{\chi} \neq 1$. Поскольку характер $(\hat{\chi})_G = \chi$ точный по условию **B**, то $\ker \hat{\chi} \subseteq A$. Так как A – ТИ-подгруппа в Γ по лемме **8**, то $A \triangleleft \Gamma$. Это противоречит условию **B**.

Лемма доказана.

ЛЕММА 17. *Имеем $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$. По упомянутой лемме Чунихина

$$\Gamma = N_\Gamma(A)S. \quad (7)$$

По теореме Клиффорда

$$(\hat{\chi})_S = e \sum_{x \in T} \psi^x, \quad (8)$$

где $\psi \in \text{Irr}(S)$, e – число, делящее $\hat{\chi}(1)$ и T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе $I = I_\Gamma(\psi)$, взятых по одному из каждого класса. Поскольку $n = e|T|\psi(1)$, то $\psi(1)$ делит n .

Допустим, что $\bar{A} = A \ker \psi / \ker \psi \triangleleft S / \ker \psi = \bar{S}$. Тогда $A \ker \psi \triangleleft S$ и, следовательно, $(A \ker \psi)^t \triangleleft S^t$ для всех $t \in T$. Следовательно, $\bigcap_{t \in T} (A \ker \psi)^t \triangleleft S^t = S$. Отсюда $\bigcap_{t \in T} A^t (\ker \psi)^t \triangleleft S$. Поскольку, согласно выражению (7) можем считать, что $t \in N_\Gamma(A)$, то $\bigcap_{t \in T} A (\ker \psi)^t \triangleleft S$. Так как $\bigcap_{t \in T} (\ker \psi)^t = \ker(\hat{\chi})_S = 1$, то $A \triangleleft S$. Видим, что $A \triangleleft \Gamma$. Мы получили противоречие с выбором подгруппы Γ .

Пусть теперь $\bar{A} \not\triangleleft \bar{S}$. Покажем, что для $\bar{S}$, $\bar{A}$, $\bar{S}_{\pi'}$, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$, $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}$ и $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие **B**. Здесь $\bar{\psi}$ – точный неприводимый характер факторгруппы $\bar{S}$ в смысле леммы 2.22 [16]. Очевидно, $\bar{S}_{\pi'} \triangleleft \bar{S}$.

Покажем, что $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}) = C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$ для всех $\bar{a} \in \bar{A}^\#$. Пусть $\bar{s} \in C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}_1)$ для некоторого неединичного элемента $\bar{a}_1$ из $\bar{A}$. Тогда $\bar{a}_1 \in \bar{A} \cap (\bar{A})^{\bar{s}}$. Поскольку из леммы **8** вытекает, что A в группе S и, следовательно, $\bar{A}$ в факторгруппе $\bar{S}$ является ТИ-подгруппой, то $\bar{A} = (\bar{A})^{\bar{s}}$, т.е. $\bar{s} \in N_{\bar{S}}(\bar{A})$. Отсюда видим, что $\bar{s} \in C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$. Следовательно, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}) \subseteq C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$ для всех $\bar{a} \in (\bar{A})^\#$. Поскольку обратное включение очевидно, желаемое равенство установлено.

Так как $\bar{A} \not\triangleleft \bar{S}$, то к группе S и ее нормальной подгруппе $K = \ker \psi$ можем применить лемму 10. По ней $A \cap \ker \psi = 1$. Значит, $\bar{A} \simeq A$ и подгруппа $\bar{A}$ непримарна.

Так как $\bar{\psi}(1)$ делит n , то $\bar{\psi}(1) - \pi'$ -число. Тогда видим, что $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}} \in \text{Irr}_{\bar{A}}(\bar{S}_{\pi'})$.

Очевидно также, что силовская 2-подгруппа факторгруппы $\bar{S}$ абелева.

Итак, для $\bar{S}$, $\bar{A}$, $\bar{S}_{\pi'}$, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$, $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}$ и $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие В. Так как $|\bar{S}| < |\Gamma|$, по индукции $\bar{\psi}(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|\bar{A}|}$. Поскольку $\bar{A} \simeq A$, отсюда и того, что $\bar{\psi}(1)$ делит n , замечаем, что и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Полученное противоречие с минимальностью группы Γ указывает на то, что наше предположение о том, что $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$, ошибочно. Стало быть, $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 18. Если L – максимальная A -инвариантная нормальная в G подгруппа, то $L \subseteq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем положить, что $L \neq 1$. По теореме Клиффорда

$$(\hat{\chi})_L = e \sum_{x \in T} \psi^x,$$

где $\psi \in \text{Irr}(L)$, e и T соответствуют обозначениям в выражении (8). По теореме 6.11 [16] $\hat{\chi} = \psi_1^\Gamma$ для такого характера $\psi_1 \in \text{Irr}(I)$, что $(\psi_1)_L = e\psi$. Поскольку $\hat{\chi}(1) = |\Gamma: I|\psi_1(1)$ и $\hat{\chi}(1) = \chi(1) - \pi'$ -число, то и $\psi_1(1) - \pi'$ -число. Мы можем также считать, что $A \subseteq I$.

Предположим поначалу, что $I \neq \Gamma$. Пусть, как и ранее, $\bar{A} = A \ker \psi_1 / \ker \psi_1$ и $\bar{I} = I / \ker \psi_1$. Нетрудно видеть, что характер $(\psi_1)_{I_{\pi'}}$ неприводим, т.е. $(\psi_1)_{I_{\pi'}} \in \text{Irr}_A(I_{\pi'})$. Тогда $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}} \in \text{Irr}_{\bar{A}}(\bar{I}_{\pi'})$. Здесь $\bar{\psi}_1$ – точный неприводимый характер факторгруппы $\bar{I}$ в смысле леммы 2.22 [16].

Предположим также, что $\bar{A}$ не нормальна в $\bar{I}$. Как и ранее устанавливаем, что для $\bar{I}$, $\bar{A}$, $\bar{I}_{\pi'}$, $C_{\bar{I}_{\pi'}}(\bar{A})$, $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}$ и $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие В.

Так как $|\bar{I}| < |\Gamma|$, согласно минимальности группы Γ , мы получаем, что $\bar{\psi}_1(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|\bar{A}|}$. Поскольку $\bar{\psi}_1(1)$ делит $\hat{\chi}(1) = n$ и $|\bar{A}| = |A|$, что следует из леммы 10, видим, что f делит n и $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Мы получили противоречие с минимальностью группы Γ .

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{A} \triangleleft \bar{I}$. Поскольку $\ker \psi_1 \triangleleft I$, по лемме 10

$$I_{\pi'} = (\ker \psi_1)_{\pi'} C_{I_{\pi'}}(A). \quad (9)$$

Так как $\Gamma = AG$ и $A \subseteq I$, то $\Gamma = IG$. Отсюда

$$|\Gamma: I| = \frac{|I||G|}{|I||I \cap G|} = |G: I_{\pi'}|. \quad (10)$$

Пусть $\bar{X} = X/L$ для такой подгруппы $X \subseteq G$, что $L \subseteq X$, и пусть $\bar{C}^* = C_{\bar{G}}(A)$. Так как группа $\bar{I}_{\pi'} \cap \bar{C}^*$ A -инвариантна, для $q \in \pi(|\Gamma: I|)$ она содержит такую

A -инвариантную силовскую q -подгруппу Q_0 , что $Q_0 \subseteq Q_{\bar{I}_{\pi'}}$, – A -инвариантная силовская q -подгруппа $\bar{I}_{\pi'}$ и $Q_{\bar{I}_{\pi'}} \subseteq Q_{\bar{G}}$ – A -инвариантная силовская q -подгруппа $\bar{G}$. Пусть $Q_{\bar{G}^*} = Q_{\bar{G}} \cap \bar{C}^*$. Тогда $Q_0 = Q_{\bar{I}_{\pi'}} \cap Q_{\bar{G}^*}$.

Пусть $|Q_{\bar{I}_{\pi'}}| = q^\alpha$ и $|Q_{\bar{G}}| = q^\beta$. Рассмотрим A -инвариантное множество $Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{G}^*}$ и заметим, что $|Q_{\bar{I}_{\pi'}} Q_{\bar{G}^*}| = q^r$ для такого числа $r \in \mathbf{Z}_+$, что $\alpha \leq r \leq \beta$.

Предположим, что $r < \beta$. Тогда $Q_{\bar{I}_{\pi'}} Q_{\bar{G}^*} \neq Q_{\bar{G}}$ и множество элементов $Q_{\bar{G}} \setminus Q_{\bar{I}_{\pi'}} Q_{\bar{G}^*}$ непустое. При действии на нем подгруппой A оно не содержит неподвижных точек, и длина каждой орбиты делится на $|A|$. Таким образом, $|A|$ делит $q^\beta - q^r = q^r(q^{\beta-r} - 1)$. Значит,

$$q^{\beta-r} \equiv 1 \pmod{|A|}. \quad (11)$$

Так как $r \geq \alpha$, с учетом равенств (10) $q^{\beta-r}$ делит

$$q^{\beta-\alpha} = |G : I_{\pi'}|_q = |\Gamma : I|_q.$$

Но $|\Gamma : I|_q$ делит n . Поэтому $q^{\beta-r}$ делит n . Учитывая выражение (11), мы получаем противоречие с минимальностью группы Γ . Следовательно, $r = \beta$ и $Q_{\bar{I}_{\pi'}} Q_{\bar{G}^*} = Q_{\bar{G}}$.

Заметим, что

$$|\bar{I}_{\pi'} \bar{C}^*|_q = \frac{|\bar{I}_{\pi'}|_q |\bar{C}^*|_q}{|\bar{I}_{\pi'} \cap \bar{C}^*|_q} \geq \frac{|Q_{\bar{I}_{\pi'}}| |Q_{\bar{G}^*}|}{|Q_{\bar{I}_{\pi'}} \cap Q_{\bar{G}^*}|} = |Q_{\bar{I}_{\pi'}} Q_{\bar{G}^*}| = |Q_{\bar{G}}| = |\bar{G}|_q.$$

Так как $q \in \pi(|\Gamma : I| = |G : I_{\pi'}|)$ – произвольный простой делитель, то $\bar{I}_{\pi'} \bar{C}^* = \bar{G}$ и, следовательно, $I_{\pi'} C^* = G$. Так как $A \cap L = 1$, то $C^* = C_{G/L}(A) = LC$. Значит, $G = I_{\pi'} C$. Поскольку $I_{\pi'} = (\ker \psi_1)_{\pi'} C_{I_{\pi'}}(A)$ по равенству (9) и $C_{I_{\pi'}}(A) \subseteq C$, получаем, что $G = (\ker \psi_1)_{\pi'} C$. Поэтому $g = kc$ для всех элементов $g \in G$ и для соответствующих им элементов $k \in \ker \psi_1$ и $c \in C$. Поэтому $[g, a] = [k, a] \in (\ker \psi_1)_{\pi'}$ для всех $g \in G$ и для всех $a \in A$. Значит, $[G, A] \subseteq (\ker \psi_1)_{\pi'}$. Поскольку по предположению $I \neq \Gamma$, т.е. $(\ker \psi_1)_{\pi'} \neq G$, то $[G, A] \neq G$. Это означает, что $A[G, A] \neq \Gamma$. Так как из леммы 8 вытекает, что $A[G, A] \triangleleft \Gamma$, мы получили противоречие с леммой 17.

Пусть теперь $I = \Gamma$. Тогда $\hat{\chi}_L = e\psi$. Если $A \triangleleft AL$, то $L \subseteq C$ и лемма верна. Поэтому $A \not\triangleleft AL$. Легко заметить, что для $AL, A, L, C_L(A)$, ψ и $\psi(1)$ выполняется условие В. Так как $|AL| < |\Gamma|$, то по индукции $\hat{\psi}(1)$ делится на такую степень f некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Тогда и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Мы вновь получили противоречие с минимальностью группы Γ .

Лемма доказана.

ЛЕММА 19. Для подгруппы L из леммы 18 $L \subseteq Z(\Gamma)$ и $\bar{G}$ неабелева простая факторгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 18 $A \subseteq C_\Gamma(L)$. Так как $C_\Gamma(L) \triangleleft \Gamma$, из леммы 17 следует, что $C_\Gamma(L) = \Gamma$. Значит, $L \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку L является максимальной нормальной подгруппой в Γ , то $\bar{G}$ является главным фактором группы $\bar{\Gamma}$. Согласно теореме 1 [14] мы можем предположить, что $\bar{G}$ неразрешима.

Предположим, что $\bar{G}$ не является простой группой. Тогда $\bar{G}$ – прямое произведение $|A|$ копий изоморфных некоторой простой неабелевой группе. Значит, G – центральное произведение $|A|$ изоморфных групп. Следовательно, по лемме 1 $n = m^{|A|}$

для некоторого натурального числа m . Тогда $q^{|A|}$ делит n для некоторого простого числа q , делящего n . Поскольку по теореме Эйлера из теории чисел $q^{\varphi(|A|)} \equiv 1 \pmod{|A|}$, где $\varphi(|A|)$ – количество натуральных чисел меньших $|A|$ и взаимнопростых с $|A|$, и $q^{\varphi(|A|)}$ делит n , мы получили противоречие с минимальностью Γ . Поэтому группа $\overline{G}$ простая.

Лемма доказана.

Для $r \in \pi(\overline{G})$ пусть R – A -инвариантная силовская r -подгруппа группы G . К обозначениям леммы 18 пусть также $\overline{\Gamma} = \Gamma/L$,

$$\overline{R} = RL/L \simeq R/R \cap L = R/L_r,$$

где $L_r = R \cap L$, и так как $\overline{A} = AL/L \simeq A/A \cap L = A$, можем записать, что $\overline{\Gamma} = A\overline{G}$.

ЛЕММА 20. (1) $\overline{R} \simeq R$, если $\overline{R}$ циклическая или R абелева.

(2) Если $r = 2$ и $R \not\subseteq C$, то $|R| > 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения (1) нам достаточно убедиться в том, что $L_r = 1$ для соответствующих подгрупп R .

Пусть $\overline{R}$ циклическая для некоторого $r \in \pi(\overline{G})$, и пусть $L_r \neq 1$. Так как $L_r \subseteq L$ и $L \subseteq Z(\Gamma)$ по лемме 19, то $L_r \subseteq Z(R)$. Значит,

$$R/Z(R) \simeq (R/L_r)/(Z(R)/L_r) = \overline{R}/\overline{Z(R)}.$$

Поскольку группа $\overline{R}$ циклическая по предположению и $\overline{Z(R)} = Z(R)/L_r$ циклическая, как подгруппа $\overline{R}$, то и факторгруппа $R/Z(R)$ также циклическая. Поэтому подгруппа R абелева. Так как $L_r \neq 1$ и $L_r \subseteq Z(\Gamma)$, из теоремы 7.4.4 [15] вытекает, что $R \not\subseteq \Gamma'$. Тогда $A\Gamma' \neq \Gamma$. Но $A\Gamma' \triangleleft \Gamma$. Мы получили противоречие с леммой 17. Итак, если $\overline{R}$ циклическая или R абелева, то $L_r = 1$ и $\overline{R} \simeq R$ – утверждение (1).

Предположим, что $r = 2$. Так как подгруппа R в рассматриваемом случае абелева по условию В, по утверждению (1) доказываемой леммы $\overline{R} \simeq R$. Рассмотрим группу AR . Тогда $R = [R, A] \times C_R(A)$.

Пусть $R \not\subseteq C$. Тогда $[R, A] \neq 1$. Из факторизации подгруппы R и того, что $[[R, A], A] = [R, A]$, нетрудно видеть, что $C_{[R, A]}(A) = 1$. Значит, $C_{[R, A]}(a) = 1$ для всех неединичных элементов $a \in A$. Поэтому $C_{[R, A]}(x) \subseteq [R, A]$ для всех неединичных элементов $x \in [R, A]$. Значит, $A[R, A]$ – группа Фробениуса. По одному из ее свойств $|A|$ делит $|[R, A]| - 1$. Но A непримарна и нечетного порядка, т.е. $|A| > 7$. Стало быть, $|[R, A]| > 8$. Видим, что $|R| > 8$ – утверждение (2).

Лемма доказана.

ЛЕММА 21. Если для $r \in \pi(n)$ подгруппа $\overline{R}$ циклическая, то $R \subseteq C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in \pi(n)$ и $\overline{R}$ циклическая. По лемме 20 $\overline{R} \simeq R$. Из леммы 11 следует, что $|A|$ делит $r - 1$ либо $R \subseteq C$. Первое утверждение противоречит минимальности группы Γ . Значит, $R \subseteq C$ для всех таких $r \in \pi(n)$, что подгруппа $\overline{R}$ циклическая.

Лемма доказана.

ЛЕММА 22. Пусть $r \in \pi(n) \subseteq \pi(N_{\pi'})$, где $N = N_{\Gamma}(R)$ и R – такая подгруппа, что $R' \cap L \neq 1$. Тогда подгруппа $C_R(A)$ неабелева и, если $R' \subseteq L$, то $R = [R, A] \times C_R(A)$ и $[R, A] \subseteq Z(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $R' \cap L \neq 1$, то $R' \neq 1$, т.е. подгруппа R неабелева. Рассмотрим характер

$$\widehat{\chi}_{AR} = \sum_i \alpha_i \varphi_i, \quad (12)$$

где $\varphi_i \in \text{Irr}(AR)$ и $\alpha_i > 0$ – натуральные числа.

Убедимся в том, что в выражении (12) существует такой характер φ_{i_0} , что $|A|$ не делит $\varphi_{i_0}(1)$ и r делит $\varphi_{i_0}(1)$. В самом деле. Если $|A|$ делит $\varphi_i(1)$ для всех i , то из выражения (12) следует, что $|A|$ делит $\widehat{\chi}(1)$, что не так. Значит, в выражении (12) существует такой характер φ_{i_0} , что $|A|$ не делит $\varphi_{i_0}(1)$. Пусть $(\varphi_{i_0}, \xi)_R \neq 0$ для некоторого неприводимого характера $\xi \in \text{Irr}(R)$. Предположим, что $\xi(1) = 1$. Тогда $R' \subseteq \ker \xi$. Отсюда и условия леммы следует, что $1 \neq R' \cap L \subseteq \ker \xi$. Так как

$$\text{Irr}(\xi_{R' \cap L}) \subseteq \text{Irr}((\varphi_{i_0})_{R' \cap L}) \subseteq \text{Irr}(\widehat{\chi}_{R' \cap L}),$$

то $(\widehat{\chi}_{R' \cap L}, 1_{R' \cap L})_{R' \cap L} \neq 1$. Но $R' \cap L \triangleleft \Gamma$, что вытекает из леммы 19. По следствию 6.7 [16] $1 \neq R' \cap L \subseteq \ker \widehat{\chi}$. Это противоречит лемме 16. Стало быть, $\xi(1) \neq 1$ и, значит, $\xi(1)$ делится на r .

Характер $\widehat{\chi}_N$ можно записать в виде $\widehat{\chi}_N = \psi + \theta$, где каждая неприводимая компонента характера ψ при ограничении на подгруппу R содержит характер ξ и каждая неприводимая компонента характера θ при ограничении на R не содержит ξ . По теореме D [26]

$$s = \frac{|R||\Gamma : N|\psi(1)}{\widehat{\chi}(1)\xi(1)}$$

– целое число. Поскольку $\pi(n) \subseteq \pi(N_{\pi'})$, то $|\Gamma : N| - \pi(n)'$ -число. Пусть $\widehat{\chi}(1) = r^\alpha m$, где r не делит m . Значит, m делит $\psi(1)$, и так как $\xi(1)$ делит $\psi(1)$, ввиду $(m, \xi(1)) = 1$ получаем, что $\xi(1)m$ делит $\psi(1)$. Предположим $\xi(1) > r^\alpha$. Тогда $\psi(1) > \widehat{\chi}(1)$. Противоречие. Следовательно, $\xi(1) \leq r^\alpha$. Замечаем также, что $\xi(1)$ делит $\widehat{\chi}(1)$.

Так как $|A|$ не делит $\varphi_{i_0}(1)$, с помощью теоремы Клиффорда можно увидеть, что $I_{AR}(\xi) \neq R$. Тогда группа AR и неприводимый характер ξ подгруппы R удовлетворяют условиям леммы 13. По ее утверждению (2) $\xi_{C_R(A)} = |A|\theta + \varepsilon\beta_\xi$, где θ – характер $C_R(A)$ или 0, $\varepsilon = \pm 1$ и $\beta_\xi = (\xi)\pi(R, A)$. Отсюда следует, что

$$\xi(1) = |A|\theta(1) + \varepsilon\beta_\xi(1).$$

Тогда $r^s = |A|t + \varepsilon r^l$, где $\xi(1) = r^s$, $\theta(1) = t$ и $\beta_\xi(1) = r^l$. Значит, $r^l(r^{s-l} - \varepsilon) \equiv 0 \pmod{|A|}$. Отсюда следует, что $r^{s-l} - \varepsilon \equiv 0 \pmod{|A|}$. Это, в свою очередь, влечет, что $r^{s-l} \equiv \varepsilon \pmod{|A|}$. Поскольку r^s делит n , то r^{s-l} также делит n . Если $r^{s-l} \neq 1$, то мы получим противоречие с минимальностью группы Γ . Поэтому делаем вывод, что $r^{s-l} = 1$. Это означает, что $r^s = r^l$, т.е. $\xi(1) = \beta_\xi(1)$. Но мы убедились в том, что $\xi(1) = r^s > 1$. Значит, $\beta_\xi(1) > 1$. Так как β_ξ – неприводимый характер подгруппы $C_R(A)$, подгруппа $C_R(A)$ не является абелевой.

Пусть $R' \subseteq L$. Выше отмечено, что $\xi(1) = \beta_\xi(1)$. Тогда из утверждения (1) леммы 13 в ее обозначениях следует, что $k_A = 0$, $\varepsilon = 1$ и $\widehat{\xi}_A = \xi(1)1_A$, т.е. $\widehat{\xi}_A = \widehat{\xi}(1)1_A$. Значит, $A \subseteq \ker \widehat{\xi}$. Тогда

$$A \ker \widehat{\xi} / \ker \widehat{\xi} \triangleleft AR / \ker \widehat{\xi}.$$

По лемме 3 [10] $[R, A] \subseteq (\ker \hat{\xi})_{\pi'}$. Так как $R' \subseteq L$ по условию леммы и $L \subseteq Z(\Gamma)$ по лемме 19, то $K = [R, A] \cap R' \triangleleft \Gamma$. Нетрудно видеть, что $(\hat{\chi}_K, 1_K)_K \neq 0$. По следствию 6.7 [16] $K \subseteq \ker \hat{\chi}$. Из леммы 16 вытекает, что $K = 1$. Поэтому подгруппа $[R, A]$ абелева. Тогда $[R, A] = [[R, A], A] \times C_{[R, A]}(A)$. Поскольку $[[R, A], A] = [R, A]$ и $C_{[R, A]}(A) \subseteq C_R(A)$, то $[R, A] \cap C_R(A) = 1$. Но $C_R(A) \triangleleft R$, ввиду того, что $R' \subseteq L_r \subseteq Z(\Gamma)$, т.е. $R' \subseteq C_R(A)$. Так как $[R, A] \triangleleft R$, то из леммы 8 вытекает, что $R = [R, A] \times C_R(A)$. И поскольку подгруппа $[R, A]$ абелева, то $[R, A] \subseteq Z(R)$.

Лемма доказана.

Поскольку по условию В подгруппа G_2 абелева, то $\bar{G}_2$ тоже абелева. Тогда по теореме Уолтера [27] группа $\bar{G}$ изоморфна одной из следующих простых групп:

- (1) Янко;
- (2) $\text{PSL}(2, 2^f)$, $f \in \mathbb{Z}_+$;
- (3) $\text{PSL}(2, q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$.
- (4) типа Ри.

ЛЕММА 23. $\bar{G}$ – не группа Янко.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{G}$ – группа Янко. Тогда по лемме 2 все ее силовские подгруппы нечетного порядка циклические, а силовская 2-подгруппа имеет порядок равный 8. Из леммы 20 вытекает, что $\bar{G} \simeq G$.

Пусть $r \in \pi(n)$. Если $r = 2$, то по лемме 20 $R \subseteq C$. По лемме 21 $R \subseteq C$, если $r > 2$. Стало быть, $(|\text{cl}(a)|, n) = 1$ для всех $a \in A$.

По теореме 3.7 [16] число

$$k = \frac{\hat{\chi}(a)|\text{cl}(a)|}{n} \quad (13)$$

является алгебраическим для всех $a \in A$. А так как $\hat{\chi}(a)$ целое число, что следует из утверждения (1) леммы 13, то k – рациональное число. По лемме 3.2 [16] k – целое число.

Значит, по равенству (13) n делит $\hat{\chi}(a)$. Поскольку $|\hat{\chi}(a)| \leq n$, то $|\hat{\chi}(a)| = n$. По определению $a \in Z(\hat{\chi})$. Но характер неприводим и точен по лемме 16. Стало быть, $a \in Z(\Gamma)$. Это означает, что $G \subseteq C_G(a)$. Поскольку по условию В $C_G(a) = C_G(A)$, то $G \subseteq C_G(A)$, т.е. $G \triangleleft \Gamma$. Это противоречит условию В.

Лемма доказана.

ЛЕММА 24. Имеем $\bar{G} \not\simeq \text{PSL}(2, 2^f)$, $f \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\bar{G} \simeq \text{PSL}(2, 2^f)$, $f \in \mathbb{Z}_+$. По лемме 5 все силовские подгруппы нечетного порядка группы $\bar{G}$ циклические, а ее силовская 2-подгруппа абелева по условию В. По утверждению (1) леммы 20 $\bar{R} \simeq R$ для всех $r \in \pi(\bar{G})$. Так как $L \subseteq Z(\Gamma)$ по лемме 19, мы можем положить, что $\bar{G} = G$. Значит, $G \simeq \text{PSL}(2, 2^f)$, $f \in \mathbb{Z}_+$.

Степени нелинейных неприводимых характеров этой группы известны (см. [28; с. 260]). Они равны: $2^f - 1$, 2^f или $2^f + 1$. Пусть $n = 2^f - 1$ или $n = 2^f + 1$. По лемме 5 G содержит циклические подгруппы R^1 и R^2 порядков $2^f - 1$ и $2^f + 1$ соответственно. По лемме 11 $|A|$ делит $r - 1$ либо $R \subseteq C$ для каждого простого делителя r числа n . Если $|A|$ делит $r - 1$ для некоторого простого делителя r числа n , то получим, что $r \equiv 1 \pmod{|A|}$. Это противоречит минимальности группы Γ . Если же $R \subseteq C$ для всех $r \in \pi(n)$, то, как в лемме 23, мы придем к противоречию

с условием В. Предположим, что $n = 2^f$, $f \in \mathbb{Z}_+$. Поскольку в данном случае силовская 2-подгруппа R абелева, то по лемме 15 либо n делится на такую степень $f > 1$ числа 2, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$, либо $R \subseteq C$. Как выше мы убедились, оба этих случая приводят к противоречию с минимальностью группы Γ .

Лемма доказана.

ЛЕММА 25. *Имеем $\overline{G} \not\cong \text{PSL}(2, q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим теперь случай, когда $\overline{G} \simeq \text{PSL}(2, q)$, где q – нечетное число. Как следует из леммы 6 холловы подгруппы $\overline{D}$ и $\overline{F}$ нечетных порядков $(q-1)/2^{\alpha_1}$ и $(q+1)/2^{\alpha_2}$ соответственно, α_1 и α_2 – высшая степень 2, делящая указанные числа, циклические. С помощью леммы 20 убеждаемся в том, что $\overline{D} \simeq D$ и $\overline{F} \simeq F$.

Предположим, что множество $\Omega = \pi(n) \cap \pi(D) \cap \pi(F)$ не является пустым. С применением леммы 21 заключаем, что $U \subseteq C$ для A -инвариантных силовских ω -подгрупп U и для всех $\omega \in \Omega$. Отсюда вытекает, что подгруппа C содержит силовскую подгруппу, порядок которой делит $(q-1)/2^{\alpha_1}$ и содержит силовскую подгруппу, порядок которой делит $(q+1)/2^{\alpha_2}$. Тогда подгруппа $\overline{C} = C/L \subseteq \overline{G}$ также содержит силовскую подгруппу, порядок которой делит $(q-1)/2^{\alpha_1}$ и содержит силовскую подгруппу, порядок которой делит $(q+1)/2^{\alpha_2}$. Однако, как следует из леммы 4, группа $\text{PSL}(2, q)$, где q – нечетное число, таких собственных подгрупп не содержит. Получили противоречие с предположением. Поэтому множество Ω пустое.

Как и ранее с помощью леммы 21 убеждаемся также в том, что $\pi(n) \not\subseteq \pi(D)$ и $\pi(n) \not\subseteq \pi(F)$. Тогда заключаем, что $\pi(n) \subseteq \pi(D) \cup \{r\}$ или $\pi(n) \subseteq \pi(F) \cup \{r\}$, или же $\pi(n) = \{r\}$.

Как следует из леммы 4, нормализатор $\overline{N}$ в группе $\overline{\Gamma}$ силовской r -подгруппы $\overline{R}$, где $q = r^s$, s – натуральное число, имеет порядок $|A|(q-1)q$.

Предположим, что $L_r \neq 1$, т.е. $\overline{R} \neq R$. Отсюда и из леммы 20 следует, что L – r -группа. Из нашего предположения и леммы 20 вытекает также, что подгруппа R неабелева.

Так как подгруппа A непримарна и по лемме 9 является дополнительным множителем некоторой группы Фробениуса, по следствию 1 [29], A содержит подгруппу $H \times B$ порядка hb для различных простых чисел h и b . По условию В $C_G(H) = C_G(B) = C$. Поскольку подгруппа $N_{\pi'}$ разрешима, по теореме 6 [23]

$$X = [N_{\pi'}, A] \subseteq F(N_{\pi'}) = R.$$

Здесь $N = N_{\Gamma}(R)$. Так как по лемме 10 $N_{\pi'} = XC_{N_{\pi'}}(A)$, то $D \subseteq C_{N_{\pi'}}(A) \subseteq C$. С учетом рассуждений выше заключаем, что $\pi(n) \subseteq \pi(D) \cup \{r\}$ или же $\pi(n) = \{r\}$.

Поначалу предположим, что $\pi(n) \subseteq \pi(D) \cup \{r\}$. Тогда $\pi(n) \subseteq \pi(N_{\pi'})$. Поскольку подгруппа R неабелева, мы можем применить к ней лемму 22. По заключению этой леммы подгруппа $C_R(A)$ неабелева. Тогда $C_{\overline{R}}(A) \neq \overline{1}$.

По лемме 20 $G_2 \simeq \overline{G}_2 \subseteq \overline{C}$. Также ранее отмечено, что $D \simeq \overline{D} \subseteq \overline{C}$. Следовательно, $S = \langle C_{\overline{R}}(A), \overline{G}_2, \overline{D} \rangle \subseteq C_{\overline{G}}(A)$. Однако из леммы 4 следует, что таких собственных подгрупп группа $\overline{G} \simeq \text{PSL}(2, q)$, где q – нечетное число, не содержит. Можем предположить, что $S = \overline{G}$. Так как $\overline{G} = G/L$ и $L \subseteq Z(\Gamma)$, то видим, что $G \subseteq C$. Тогда $A \triangleleft \Gamma$. Мы вновь получили противоречие с условием В.

Пусть теперь $\pi(n) = \{r\}$. Применим к группе Γ лемму 15. По ней n делится на такую степень $f > 1$ простого числа r , что $f \equiv 0, 1 \pmod{|A|}$ или $Z(R) \subseteq C_G(A)$. Первое

утверждение противоречит минимальности группы Γ . Значит, $Z(R) \subseteq C_G(A)$. И так как $R' \subseteq L$, то к группе AR можем применить лемму 22. Из предыдущего утверждения и утверждения леммы 22 следует, что $R \subseteq C_G(A)$. Поэтому $(|\text{cl}(a)|, n) = 1$ для всех элементов $a \in A$. Этот случай рассмотрен в лемме 23.

Предположим, наконец, что $L_r = 1$. Тогда $\overline{G} \simeq G \simeq \text{PSL}(2, q)$, где q – нечетное число. Степени нелинейных неприводимых характеров этой группы также известны (см. с. 262–263 [28]). Они равны: $q - 1$, $(q - 1)/2$, $q + 1$, $(q + 1)/2$ или q .

Пусть $n \neq q$. Тогда для $r \in \pi(n)$ по лемме 6 силовская подгруппа R циклическая, если $r > 2$ и $|R| = 4$, если $r = 2$. Из лемм 20 и 21 следует, что $R \subseteq C$ для всех $r \in \pi(n)$. Ранее мы убедились, что этот случай приводит к противоречию с условием В.

Пусть $n = q$. Поскольку по лемме 4 силовская подгруппа R порядка q абелева, можем применить лемму 15. Так как $q - \pi'$ -число, из этой леммы следует, что q делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{|A|}$ или $R \subseteq C$. Первое утверждение приводит к противоречию с минимальностью группы Γ , второе – с условием В.

Лемма доказана.

ЛЕММА 26. $\overline{G}$ – не группа типа Ри.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное, т.е. $\overline{G}$ – группа типа Ри. Известно (см. таблицу 4.1 на с. 316 [30]), что мультипликатор Шура группы типа Ри равен 1. Поэтому $G = G_1 \times Z(\Gamma)$, где $G_1 \cong \overline{G}$. Значит, $\Gamma = G_1 \times Z(\Gamma)$. Пусть $Z(\Gamma) \neq 1$. По теореме 4.21 [16]

$$\hat{\chi} = \hat{\chi}_1 \times \lambda,$$

где $\hat{\chi}_1$ и λ – точные неприводимые характеры групп G_1 и $Z(\Gamma)$ соответственно. Поскольку $\lambda(1) = 1$, видим, что $\hat{\chi}_1(1) = \hat{\chi}(1) = n$. Легко видеть, что для G_1 , A , G_1 , C_1 , $\hat{\chi}_1$ и n выполнено условие В. Здесь $\Gamma = G_1 \times Z(\Gamma)$ и $C = C_1 \times Z(\Gamma)$. Согласно минимальности группы Γ n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1$ или $1 \pmod{|A|}$. Лемма в этом случае верна. Стало быть, $Z(\Gamma) = 1$ и, следовательно, $G = G_1$ – группа типа Ри. Неприводимые характеры этих групп известны [19]. Их степенями n являются только следующие числа:

$$1, \quad q^2 - q + 1, \quad q^3, \quad q(q^2 - q + 1), \quad \frac{(q - 1)m(q + 1 + 3m)}{2}, \quad \frac{(q - 1)m(q + 1 - 3m)}{2}, \\ m(q^2 - 1), \quad q^3 + 1, \quad (q - 1)(q^2 - q + 1), \quad (q^2 - 1)(q + 1 + 3m), \quad (q^2 - 1)(q + 1 - 3m).$$

Для $r \in \pi(G)$ обозначим $N = N_G(R)$. При $r = 3$ по лемме 3 подгруппа N имеет порядок $q^3(q - 1)$. Из леммы 3 следует, что $F(N_{\pi'}) = R$. Как и в лемме 25, с применением теоремы 6 [23], убеждаемся в том, что подгруппа $X = [N_{\pi'}, A] \subseteq R$. Как и там убеждаемся далее, что подгруппа $N_{\{3, \pi\}}$ порядка $q - 1$ содержится в C .

Далее, из леммы 3 и того, что $q^2 - q + 1 = (q + 1 + 3m)(q + 1 - 3m)$, следует, что все силовские r -подгруппы циклические для $r \in \pi(q^2 - q + 1)$.

Пусть

$$n = q^2 - q + 1, \quad q(q^2 - q + 1), \quad \frac{(q - 1)m(q + 1 + 3m)}{2}, \quad \frac{(q - 1)m(q + 1 - 3m)}{2}, \\ q^3 + 1 = (q + 1)(q^2 - q + 1), \quad (q - 1)(q^2 - q + 1), \\ (q^2 - 1)(q + 1 + 3m), \quad (q^2 - 1)(q + 1 - 3m).$$

Так как каждое из приведенных чисел делится на простое число $r > 3$, по лемме 11 для каждого простого числа $r \in \pi(q^2 - q + 1)$ либо $|A|$ делит $r - 1$, либо $R \subseteq C$. Поскольку $r \in \pi(n)$, первое утверждение противоречит минимальности группы Γ . Согласно второму утверждению группа $\langle N_{\{3,\pi\}'}, R \rangle \subseteq C$. Однако, как следует из строения максимальных подгрупп группы типа Ри (лемма 3), подгрупп такого порядка группа G не содержит.

Пусть теперь $n = q^3$. Поскольку A – TI-подгруппа в группе Γ , то A является таковой и в подгруппе AR , $r = 3$. По лемме 1 [11] $|AR: N_{AR}(A)| \equiv 1 \pmod{|A|}$. Значит, $|R: C_R(A)| \equiv 1 \pmod{|A|}$. Но $|R: C_R(A)|$ делит n . Пусть $|R: C_R(A)| \neq 1$. Поскольку $|R: C_R(A)|$ – степень 3, мы получили противоречие с минимальностью группы Γ . Значит, $|R: C_R(A)| = 1$. Поэтому $R \subseteq C$ и, следовательно, $(|cl(a)|, n) = 1$ для всех $a \in A^\#$. В лемме 23 установлено, что в этом случае мы приходим к противоречию с условием B.

Осталось рассмотреть случай, когда $n = m(q^2 - 1)$. Так как $|R| = 8$ при $r = 2$ и R циклическая при $r > 3$, по леммам 20 и 21

$$X = \langle R \mid r \in \pi(n), r \neq 3 \rangle \subseteq C.$$

Как видим из анализа максимальных подгрупп группы G (лемма 3), $X \subseteq C_G(i)$ для некоторой инволюции $i \in R$. Поскольку собственных подгрупп порядка $q^2 - 1$ группа $\text{PSL}(2, q)$ не содержит, что вытекает из леммы 4, легко видеть, что $X = C_G(i)$. Поэтому $C_G(i) \subseteq C$. И так как $C_G(i)$ максимальна в G , то $C_G(i) = C$. Следовательно, $i \in Z(C)$. По лемме 13 $\chi_C = |A|\theta + \varepsilon\beta_\chi$. Значит,

$$\chi(i) = |A|\theta(i) + \varepsilon\beta_\chi(i) = |A|\theta(i) + \varepsilon\beta_\chi(1).$$

С другой стороны, по теореме 8.17 [16] $\chi(i) = 0$, поскольку 2 не делит $|G|/\chi(1)$. Поэтому $|A|\theta(i) + \varepsilon\beta_\chi(1) = 0$. Отсюда $|A|\theta(i) = -\varepsilon\beta_\chi(1)$. Так как $\varepsilon = \pm 1$, замечаем, что $|A|$ делит $\beta_\chi(1)$. Это противоречит тому, что $(|A|, \beta_\chi(1)) = 1$, поскольку $(|A|, |G|) = 1$ и $\beta_\chi(1)$ делит $|G|$. Это последнее противоречие доказывает лемму.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы вытекает из лемм 23–26 и теоремы Уолтера.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Itô, “On a theorem of N. F. Blichfeldt”, *Nagoya Math. J.*, **5** (1953), 75–77.
- [2] D. L. Winter, “On finite solvable linear groups”, *Illinois J. Math.*, **15**:3 (1971), 425–428.
- [3] I. M. Isaacs, “Characters of solvable groups”, *The Santa Cruz Conference on Finite Groups*, Proc. Symp. Pure Math., **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 377–384.
- [4] D. L. Winter, “Solvability of certain p -solvable linear groups of finite order”, *Pacific J. Math.*, **34**:3 (1970), 827–835.
- [5] D. L. Winter, “On the structure of certain p -solvable linear groups”, *J. Algebra*, **31**:3 (1974), 543–546.
- [6] I. M. Isaacs, “Complex p -solvable linear groups”, *J. Algebra*, **24**:3 (1973), 513–530.
- [7] А. А. Ядченко, “О нормальных холловских подгруппах π -обособленных линейных групп”, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матем. навук*, 2005, № 1, 35–39.
- [8] А. А. Ядченко, “Автоморфизмы и нормальные полугруппы линейных групп”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 469–476.

- [9] B. Newton, “On the degrees of complex p -solvable linear groups”, *J. Algebra*, **288**:2 (2005), 384–391.
- [10] А. А. Ядченко, “О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка. I”, *Тр. Ин-та матем.*, **16**:2 (2008), 118–130.
- [11] А. А. Ядченко, “О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка. II”, *Тр. Ин-та матем.*, **17**:2 (2009), 94–104.
- [12] А. А. Ядченко, “О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка. III”, *Тр. Ин-та матем.*, **18**:2 (2010), 99–114.
- [13] A. A. Yadchenko, “On irreducible linear groups of nonprimary degree”, *ISRN Algebra*, 2011, Article ID 868096.
- [14] А. А. Ядченко, “Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI -подгруппой”, *Матем. заметки*, **48**:2 (1990), 137–144.
- [15] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York, 1968.
- [16] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Pure Appl. Math., **69**, Academic Press, New York, 1976.
- [17] Z. Janko, “A new finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroups and its characterisation”, *J. Algebra*, **3**:2 (1966), 147–186.
- [18] Z. Janko, J. G. Thompson, “On a class of finite simple groups of Ree”, *J. Algebra*, **4**:2 (1966), 274–292.
- [19] H. N. Ward, “On Rees series of simple groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **121**:1 (1966), 62–89.
- [20] P. B. Kleidman, “The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$ and their automorphism groups”, *J. Algebra*, **117**:1 (1988), 30–71.
- [21] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [22] M. M. Guterman, “On ABA -groups of finite order”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 109–143.
- [23] G. Glauberman, “Correspondences of characters for relatively prime operator groups”, *Canad. J. Math.*, 1968, № 20, 1465–1488.
- [24] С. А. Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1964.
- [25] А. И. Старостин, “О группах Фробениуса”, *Укр. матем. журн.*, **23**:3 (1971), 629–639.
- [26] I. M. Isaacs, G. R. Robinson, “Linear constituents of certain character restrictions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:9 (1998), 2615–2617.
- [27] J. H. Walter, “The characterisation of finite groups with abelian Sylow 2-subgroups”, *Ann. of Math. (2)*, **89**:3 (1969), 405–514.
- [28] В. А. Белоногов, *Представления и характеры в теории конечных групп*, УрО АН СССР, Свердловск, 1990.
- [29] А. А. Ядченко, “О конечных π -разрешимых линейных группах”, *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1986, 181–207.
- [30] Д. Горенштейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию*, Мир, М., 1985.

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси

E-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступило

26.09.2012

Исправленный вариант

17.06.2015