Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Моргулис, Гидродинамическая характеристика шара, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 732–737

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:33:54

Гидродинамическая характеристика шара

А. Б. Моргулис

Приводится характеристика шара, возникающая из задачи о взаимодействии твердого тела с точечным источником в идеальной несжимаемой жидкости.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10185

1. Введение. Как известно, динамика твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости подчиняется принципу наименьшего действия в форме Гамильтона, где лагранжианом служит сумма кинетических энергий тела и жидкости, а конфигурационным пространством – группа движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$; на ней указанный лагранжиан определяет левоинвариантную метрику [1]. Если жидкость содержит точечный источник, то ее кинетическая энергия не определена, однако движение тела по-прежнему подчиняется принципу наименьшего действия [2]. Рассмотрение такой системы представляет интерес в связи с теорией бьеркнесовой плавленности – эффекта вибрации жидкости на движение твердых включений, см. [3]–[5] и [2], и приведенные там ссылки. В этом контексте точечный источник служит простейшей моделью вибратора [6].

Лагранжиан системы “жидкость+источник+тело” содержит линейный по скорости член, т.е. 1-форму на конфигурационном пространстве. Оказывается, эта 1-форма точна тогда и только тогда, когда твердое тело есть шар. Ниже приводится доказательство этого утверждения.

2. Гидродинамическая задача. Рассмотрим движение произвольного твердого тела в потенциальном потоке идеальной, несжимаемой и однородной жидкости, заполняющей внешность тела. Жидкость истекает из неподвижного точечного источника и “стекает” на бесконечность, где возмущения скорости, создаваемые движением тела, полностью затухают.

Пусть $D_0 \subset \mathbb{R}^3$ ограниченная, гладкая и односвязная область. Примем ее за отсчетную конфигурацию тела. Для удобства условимся, что *геометрический центр* D_0 совпадает с началом координат, так что

$$\frac{1}{|D_0|} \int_{D_0} a \, da = 0. \quad (2.1)$$

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1398.2014/К).

Пусть $\mathcal{M}$ – группа движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Перемещение тела за время t отождествляется с движением $T(t) \in \mathcal{M}$. Ко времени t тело занимает область $D_b(t) = T(t)D_0$. Представим перемещение в виде

$$T(t): a \mapsto x(a, t) = U(t)a + r(t), \quad U(t) \in SO(3), \quad r(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Тогда $r(t)$ – геометрический центр $D_b(t)$. Соответственно, скорость $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_b(x, t)$ материальной частицы $x \in D_b(t)$ имеет вид

$$\mathbf{v}_b(x, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{r}) + \mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{u}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ суть мгновенные трансляционная и угловая скорости тела. Суммарная кинетическая энергия K_b всех частиц тела – положительная квадратичная форма относительно $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega})$. Эта форма и стандартная (биинвариантная) риманова метрика на $\mathcal{M}$ порождают симметричный оператор $A_b(T): (\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto (\mathbf{Q}_b, \mathbf{M}_b)$ такой, что $K_b(T, \dot{T}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}_b + \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_b$. Компоненты $\mathbf{Q}_b$ и $\mathbf{M}_b$ – импульс и момент тела.

Уравнения движения тела, погруженного в жидкость, имеют вид (см. [7])

$$\dot{\mathbf{Q}}_b = - \int_{S(t)} P(x, t) \mathbf{n}(x, t) dS_x, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_b + \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_b) = - \int_{S(t)} P(x, t) (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) dS_x. \quad (2.2)$$

Здесь P – давление жидкости, $S(t) = \partial D_b(t)$, $D_b(t) = T(t)D_0$ – твердая область, и $\mathbf{n}$ – поле ортов нормали на S , направленное во внешность тела, т.е. внутрь жидкости. (Плотность жидкости считается равной единице.) Правые части уравнений (2.2) суть функции текущих значений перемещения и скорости тела, неявно заданные уравнениями гидродинамики и граничными условиями к ним. Именно,

$$\partial_t \mathbf{v}_f + \nabla \left(P + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_f = \varkappa(t) \delta(x), \quad \mathbf{v}_f = \nabla \varphi \quad \text{в} \quad D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_b, \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad S(t), \quad \mathbf{v}_f \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

где δ – дельта-функция Дирака, и $\varkappa$ – заданная функция (интенсивность источника). Таким образом, движение системы определяется уравнениями (2.2)–(2.4), и начальными значениями перемещения и скорости тела.

Заметим, что задача (2.2)–(2.4) допускает коллапс решения – столкновение тела с источником. Последний совмещен с геометрическим центром отсчетной области D_0 , так что тело, вообще говоря, не может занять ее в процессе движения.

3. Конфигурационное пространство и лагранжиан. Пусть $D_1 = \mathbb{R}^3 \setminus D_0$ – внешность отсчетной области. Определим множество $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, полагая

$$\mathcal{M}_0 = \{T \in \mathcal{M} : T^{-1}0 \in D_1\}.$$

На $\mathcal{M}_0$ имеется структура гладкого многообразия. Перемещение $T \in \mathcal{M}_0$ назовем *допустимым*. Например, перемещение $a \mapsto Ua + r$ заведомо допустимо при условии $|r| > \operatorname{diam} D_0$. Очевидно, при допустимом перемещении твердая область не содержит источник: $0 \notin TD_0$.

Остановимся на выражении потенциала φ из уравнений (2.3), (2.4). Пусть $T \in \mathcal{M}_0$, $D_b = TD_0$ и $S_0 = \partial D_0$. На $S = TS_0$ определена *нормальная скорость* $\gamma = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}$,

и вместе с ней отображение $\gamma: a \mapsto \gamma(a|\cdot)$, действующее из S_0 в пространство 1-форм на M_0 , так что

$$\gamma(a, |T, \dot{T}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + ((\mathbf{x} - \mathbf{r}) \times \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(x), \quad x = Ta = Ua + r \in S, \quad a \in S_0. \quad (3.1)$$

В $D_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_0$ рассмотрим задачу Неймана и определим ее функцию Грина $G_0 = G_0(a, b)$, полагая

$$\Delta G_0(a, b) = \delta(a - b) \quad \text{в } D_1, \quad \mathbf{n}_0(a) \cdot \nabla_a G_0(a, b) = 0 \quad \text{на } S_0 = \partial D_0, \quad b \in D_1,$$

где орт нормали $\mathbf{n}_0$ направлен внутрь D_1 . Тогда $G(x, y|T) = G_0(T^{-1}x, T^{-1}y)$ – функция Грина жидкой области $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_b$, и потенциал φ записывается в виде

$$\varphi(x, t|T, \dot{T}) = \varkappa(t)G_0(a, r_0) + \Phi_0(a|T, \dot{T}), \quad x = Ta, \quad r_0 = T^{-1}0; \quad (3.2)$$

$$\Phi_0(a|T, \dot{T}) = \int_S G_0(a, b)\gamma(b, |T, \dot{T}) dS_b. \quad (3.3)$$

Таким образом, движение тела создает потенциал $\Phi(x|\cdot) = \Phi_0(T^{-1}x|\cdot)$, а источник – потенциал $\varkappa(t)G(x, 0|T) = \varkappa(t)G_0(T^{-1}x, T^{-1}0)$.

Полагая $\varkappa \equiv 0$, приходим к классической системе *жидкость + тело* с конфигурационным пространством M и лагранжианом $K = K_b + K_f$, где K_f – кинетическая энергия жидкости:

$$2K_f(T, \dot{T}) = - \int_{S_0 \times S_0} \gamma(a, |T, \dot{T})\gamma(b, |T, \dot{T})G_0(a, b) dS_a dS_b, \quad (3.4)$$

K_f – положительная квадратичная форма относительно трансляционной и угловой скоростей, и полная энергия $K = K_b + K_f$ определяет риманову метрику на M (левоинвариантную). Если есть источник (т.е. $\varkappa \neq 0$), то K задает риманову метрику на M_0 . При этом K_f – кинетическая энергия течения, создаваемого одним только движением тела (кинетическая энергия всего потока не определена).

На конфигурационном пространстве M_0 определим лагранжиан

$$\mathcal{L} = K - \varkappa(t)\Lambda(T, \dot{T}) - \varkappa^2(t)\Pi(T), \quad \text{где } K = K_b + K_f, \quad (3.5)$$

$$\Lambda(T, \dot{T}) = \Phi(0|T, \dot{T}) = \Phi_0(r_0|T, \dot{T}), \quad r_0 = T^{-1}0, \quad (3.6)$$

$$\Pi(T) = \frac{g(0, 0|T)}{2}, \quad g(x, y|T) = G(x, y|T) + (4\pi|x - y|)^{-1}. \quad (3.7)$$

Как видно из (3.7), g – отраженная (гармоническая) часть функции Грина G ; по построению, g регулярна в окрестности диагонали $x = y \in D_f$, а потому Π гладко зависит от перемещения (пока оно допустимо).

ЛЕММА 1. Конфигурационное пространство M_0 и лагранжиан $\mathcal{L}$ инвариантны относительно левого действия $T \mapsto VT$ группы $SO(3)$. Уравнения движения тела (2.2)–(2.4) следуют из принципа наименьшего действия на M_0 с лагранжианом $\mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опускается.

Поскольку функционал Π зависит лишь от перемещения, естественно рассматривать его как “потенциальную энергию”. Роль кинетической энергии играет, конечно,

риманова метрика К. Линейный член порождает, вообще говоря, гироскопическую силу типа лоренцевой или кориолисовой. Для примера рассмотрим лагранжиан на $\mathbb{R}^3$, включающий 1-форму $\beta = \dot{\xi} \cdot \mathbf{b}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, а в остальном – произвольный. Вклад β в уравнение движения – сила $\mathbf{F} = \dot{\xi} \times \text{rot } \mathbf{b}$. Если $\text{rot } \mathbf{b} = 0$, то $\mathbf{F} \equiv 0$. Если $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\xi, t)$ и $\text{rot } \mathbf{b}(\cdot, t) = 0$ при каждом t , то $\mathbf{F} = -\mathbf{b}_t$.

4. Характеризация шара. Начнем с примера. Пусть тело – единичный шар, так что $D_0 = \{|a| < 1\}$; тогда $\mathcal{M}_0 = \{T: a \mapsto Ua + r : |r| > 1\}$ и

$$\Lambda(T, \dot{T}) = \Phi(0|T, \dot{T}) = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{u}}{(2|r|)^3} = \frac{\dot{R}}{(2R^2)}, \quad R = |r| > 1, \quad (4.1)$$

так что $\Lambda(T, \dot{T}) = dW(r, \mathbf{u})$, где $W = -(2R)^{-1}$, и $R = |r| > 1$ – расстояние между центром шара и источником. Итак, Λ точна, так что гироскопической силы нет. Кроме того, найдется функция $\Pi_0 \in C^\infty(R > 1)$ (ее можно выразить явно) такая, что $\Pi(T) = \Pi_0(R)$ для всех $T \in \mathcal{M}_0$. Таким образом, центр однородного шара движется как материальная частица в поле центральной силы с потенциалом

$$\varkappa^2(t)\Pi_0(R) + \dot{\varkappa}(t)W(R),$$

где $\varkappa$ – интенсивность источника; в частности, при $\varkappa \equiv \text{const}$ имеем потенциал $\varkappa^2\Pi_0(R)$. Подробности см. в [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть отсчетная область D_0 задана так, что 1-форма Λ точна на $\mathcal{M}_0$. Тогда D_0 – шар.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем редукцию к теореме Хопфа [8] о поверхностях постоянной средней кривизны, см. также [9]. Начнем со вспомогательных конструкций. Пусть $U \in \text{SO}(3)$, $Q \in \mathcal{M}_0$, $\hat{U}: Q \mapsto UQ$ – левый сдвиг, $T: a \mapsto Ua + r \in \mathcal{M}_0$, $r_0 = T^{-1}0 = -U^{-1}r$, и $r_0: a \mapsto a - r_0$ – чисто трансляционное перемещение. Тогда $T = \hat{U}r_0$. Рассмотрим подмногообразие допустимых трансляционных перемещений

$$\mathcal{S} = \{z: a \mapsto a - z, z \in D_1\} \subset \mathcal{M}_0,$$

и ограничение $T_{\mathcal{S}}^*\mathcal{M}_0$ кокасательного расслоения $T^*\mathcal{M}_0$. Определим сечение Λ_0 расслоения $T_{\mathcal{S}}^*\mathcal{M}_0$ как ограничение 1-формы Λ . Сечение Λ_0 определяет Λ . Именно, $\Lambda(T, \dot{T}) = \Lambda_0(\hat{U}^{-1}T, \hat{U}_*^{-1}\dot{T})$ (в силу левой инвариантности). По определению (3.6) $\Lambda_0(z, \dot{z}) = \Phi_0(z|z, \dot{z})$, где $\dot{z} = \omega_0 \times \mathbf{a} + \mathbf{u}_0$. Двойственное сечение

$$z \mapsto (\mathbf{Q}_0(z), \mathbf{M}_0(z)) : \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{Q}_0 + \omega_0 \cdot \mathbf{M}_0 = \Phi_0(z|z, \dot{z})$$

отождествляется с парой векторных полей $z \mapsto (\mathbf{Q}_0(z), \mathbf{M}_0(z))$ на D_1 . В силу (3.3)

$$\mathbf{Q}_0(z) = \int_{S_0} G_0(a, z) \mathbf{n}_0(a) dS_a, \quad \mathbf{M}_0(z) = \int_{S_0} G_0(a, z) (\mathbf{a} \times \mathbf{n}_0(a)) dS_a. \quad (4.2)$$

Отсюда (с учетом определения G_0) находим

$$\Delta \mathbf{M}_0 = 0 \quad \text{в} \quad D_1, \quad (\mathbf{n}_0(a), \nabla) \mathbf{M}_0 = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_0(a) \quad \text{на} \quad S_0, \quad \mathbf{M}_0(\infty) = 0, \quad (4.3)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_0 = 0 \quad \text{в} \quad D_1, \quad (\mathbf{n}_0(a), \nabla) \mathbf{Q}_0 = \mathbf{n}_0(a) \quad \text{на} \quad S_0, \quad \mathbf{Q}_0(\infty) = 0, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Q}_0(z) = O(|z|^{-2}), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

Последняя оценка следует из определения $\mathbf{Q}_0$ и равенства $\int_{S_0} \mathbf{n}_0 dS = 0$.

Выясним, какие дополнительные ограничения на поля $\mathbf{Q}_0$ и $\mathbf{M}_0$ налагает условие точности Λ . Пусть $\mathcal{T}: t \mapsto T(t) = U(t) + r(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \in [0, 1]$, – замкнутый путь. По предположению

$$0 = \int_{\mathcal{T}} \Lambda = \int_0^1 (\boldsymbol{\omega}_0(t) \mathbf{M}_0(r_0(t)) + \mathbf{u}_0(t) \mathbf{Q}_0(r_0(t))) dt = 0, \quad (4.6)$$

где $r_0 = T^{-1}(t)0$, $\boldsymbol{\omega}_0(t) = U^{-1}(t)\boldsymbol{\omega}(t)$, $\mathbf{u}_0(t) = U^{-1}(t)\mathbf{u}(t)$. Пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, так что

$$T(t): a \mapsto a + r(t), \quad r(1) = r(0).$$

Тогда в (4.6) следует положить $\boldsymbol{\omega}_0 \equiv 0$, $r_0(t) = -r(t)$, и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) = -\dot{r}_0(t)$. При этом $r_0(t)$ замечает замкнутый путь в D_1 . Более того, параметризацию любого такого пути можно принять за $r_0(t)$. Следовательно, существует

$$W_0: D_1 \rightarrow \mathbb{R}: \quad \mathbf{Q}_0 = \nabla W_0 \quad \text{в} \quad D_1. \quad (4.7)$$

Отсюда, ввиду (4.4), (4.5), следует, что

$$\Delta W_0 = 0, \quad W(\infty) = \text{const}. \quad (4.8)$$

Теперь зафиксируем $z \in D_1$ и положим $T(t)a = U(t)(a - z)$ (такому пути соответствует семейство вращений вокруг точки z). Имеем $r = -U(t)z$, $r_0(t) = z$ (т.е. r_0 не зависит от t), $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{z} \times \boldsymbol{\omega}_0(t)$, и тождество (4.6) принимает вид

$$(\mathbf{M}_0(z) - \mathbf{z} \times \mathbf{Q}_0(z)) \int_0^1 \boldsymbol{\omega}_0(t) dt = 0, \quad z \in D_1.$$

Отсюда, выбрав $\boldsymbol{\omega} \equiv \text{const}$ и $|\boldsymbol{\omega}| \in 2\pi\mathbb{Z}$, найдем

$$\mathbf{M}_0(z) = \mathbf{z} \times \mathbf{Q}_0(z) \quad \text{в} \quad D_1, \quad (4.9)$$

и, по непрерывности, на $S_0 = \partial D_0$. Этот факт, взятый вместе с граничным условием в (4.3), влечет равенство

$$\mathbf{Q}_0 \times \mathbf{n}_0 = 0 \quad \text{в} \quad S_0. \quad (4.10)$$

В самом деле, $(\mathbf{a}, \nabla)(\mathbf{z} \times \mathbf{b}(z)) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}(z) + \mathbf{z} \times (\mathbf{a}, \nabla)\mathbf{b}$ для любого вектора $\mathbf{a}$ и векторного поля $\mathbf{b}$ на $\mathbb{R}^3$, поэтому на S_0 имеем

$$\mathbf{z} \times \mathbf{n}_0 = (\mathbf{n}_0, \nabla)\mathbf{M}_0 = (\mathbf{n}_0, \nabla)(\mathbf{z} \times \mathbf{Q}_0) = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_0 + \mathbf{z} \times (\mathbf{n}_0, \nabla)\mathbf{Q}_0 = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}_0 + \mathbf{z} \times \mathbf{n}_0,$$

что и дает (4.10).

Обратимся к вычислению средней кривизны на S_0 . Для этой цели воспользуемся следующим приемом. Пусть $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и c – некритическое значение F . Вблизи множества уровня $\mathcal{F}_c = \{F = c\}$ определена функция

$$\mathcal{H}F \stackrel{\text{def}}{=} -\text{div} \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right). \quad (4.11)$$

Ограничение $\mathcal{H}F$ на $\mathcal{F}_c$ есть средняя кривизна (с точностью до постоянного множителя). Подробности см., например, в [10; гл. 14]. Покажем, что среднюю кривизну S_0 можно представить в виде $\mathcal{H}W_0$, где W_0 – потенциал (4.7). Действительно, $W_0 \equiv \text{const}$ на S_0 в силу (4.10). Далее, не нарушая общности, считаем, что $W_0(\infty) = 0$. Это можно сделать благодаря (4.8). Поскольку $\Delta W_0 = 0$, значение W_0 на S_0 макси-

мальное (или минимальное). По лемме о граничной точке [10; гл. 3]

$$\mathbf{Q}_0 = \nabla W_0 \neq 0 \quad \text{на } S_0. \quad (4.12)$$

Итак, функция $\mathcal{H}W_0$ определена в некоторой приграничной полоске в D_1 , причем

$$\mathcal{H}W_0 = -\nabla W_0 \nabla (|\nabla W_0|^{-1}) = -\mathbf{Q}_0 \cdot \nabla |\mathbf{Q}_0|^{-1}.$$

(ввиду (4.7) и (4.8)). Покажем, что $\mathcal{H}W_0 \equiv \text{const}$ на S_0 . Определим на S_0 функцию $\lambda = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0$, так что $\mathbf{Q}_0 = \lambda \mathbf{n}_0$ и $\mathbf{Q}_0^2 = \lambda^2$ на S_0 в силу (4.10), причем $\lambda \neq 0$ в силу (4.12). Покажем, что $\lambda \equiv \text{const}$. Имеем $\nabla(\mathbf{Q}_0^2/2) = (\mathbf{Q}_0, \nabla)\mathbf{Q}_0$ всюду в D_1 (в силу (4.7)). Переходя к предельным значениям на S_0 и учитывая (4.4), получим

$$\nabla\left(\frac{\mathbf{Q}_0^2}{2}\right) = \lambda(\mathbf{n}_0, \nabla)\mathbf{Q}_0 = \lambda \mathbf{n}_0 = \mathbf{Q}_0 \quad \implies \quad \lambda^2 = \mathbf{Q}_0^2 \equiv \text{const} \quad \text{на } S_0.$$

Вместе с тем,

$$\mathcal{H}W_0|_{S_0} = |\mathbf{Q}_0|^{-3} \left(\mathbf{Q}_0 \cdot \nabla \left(\frac{\mathbf{Q}_0^2}{2} \right) \right) \Big|_{S_0} = |\lambda|^{-3} \mathbf{Q}_0^2 = |\lambda|^{-1} \equiv \text{const},$$

что и требовалось. Итак, S_0 – гладкая замкнутая односвязная поверхность в $\mathbb{R}^3$ постоянной средней кривизны. По теореме Хопфа все такие поверхности – эвклидовы сферы $\{|z| = a\}$. Теорема доказана.

Автор с благодарностью вспоминает своего учителя, покойного Виктора Иосифовича Юдовича, которому в 2014 г. исполнилось бы 80 лет.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, Б. А. Хесин, *Топологические методы в гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.
- [2] В. А. Владимиров, А. Б. Моргулис, “Относительные равновесия в задаче Бьёркнеса”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:1 (2014), 44–60.
- [3] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М., 1973.
- [4] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, С. М. Рамоданов, “Взаимодействие двух круговых цилиндров в идеальной жидкости”, *Нелинейная динам.*, **1**:1 (2005), 3–21.
- [5] V. A. Vladimirov, “On vibrodynamics of pendulum and submerged solid”, *J. Math. Fluid Mech.*, **7**, Suppl. 3 (2005), S397–S412.
- [6] О. М. Лаврентьева, “Движение тела в пульсирующей идеальной жидкости”, *Динамика сплошной среды*, **103**, Новосибирск, 1991, 120–125.
- [7] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, Т. 1, Физматгиз, М., 1955.
- [8] H. Hopf, “Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen”, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 232–249.
- [9] А. Д. Александров, *Избранные труды*. Т. 1. *Геометрия и приложения*, Наука, Новосибирск, 2006.
- [10] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

А. Б. Моргулис

Южный федеральный университет,

г. Ростов-на-Дону

Южный математический институт, г. Владикавказ

E-mail: amor@math.sfedu.ru

Поступило

08.10.2012

Исправленный вариант

07.06.2013