Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Локуцкий, Типичная структура лагранжевого многообразия в задачах с чаттерингом, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 842–853

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:59:14

Типичная структура лагранжевого многообразия в задачах с чаттерингом

Л. В. Локуциевский

В статье изучаются структура особенности лагранжевого многообразия в окрестности поверхности особых экстремалей 2-го порядка в задачах оптимального управления. Для классической задачи Фуллера явно построена структура лагранжева многообразия: показано, что оно имеет особенность конического типа в начале координат. В общем случае доказано, что лагранжево многообразие является локально-тривиальным расслоением над поверхностью особых экстремалей, каждый слой которого имеет особенность в точке выхода на особую экстремаль аналогичного конического типа.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10186

1. Введение. Хорошо известно, что в задачах оптимального управления общего положения выход неособой траектории на особую траекторию второго порядка осуществляется за счет чаттеринг режима, т.е. такого режима, когда при подходе к особой траектории управление на неособой траектории претерпевает счетное число все убыстряющихся переключений. Аналогичным образом устроен сход с особой экстремали. Структура оптимального синтеза вблизи многообразия особых траекторий второго порядка содержит некоторую нетривиальную особенность, о которой и пойдет речь в данной статье. Первый намек на наличие нетривиальной особенности содержится в аккуратном подсчете размерностей.

Структура оптимального синтеза в окрестности особой траектории второго порядка моделируется задачей Фуллера с несимметричным отрезком управления (см. [1]). Расширенное фазовое пространство в этой задаче имеет размерность 4, и здесь есть ровно одна особая траектория второго порядка¹ – это начало координат, точка σ . Множество всех неособых траекторий, выходящих из σ , образует двумерную поверхность M^+ . Аналогично, неособые траектории, входящие в точку σ , образуют двумерную поверхность M^- . Пусть H – это гамильтониан задачи. Поверхности M^+ и M^- лежат на поверхности уровня гамильтониана $H = H(\sigma) = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00986-а).

¹В общем случае пространство особых траекторий второго порядка – это многообразие коразмерности 4 в расширенном фазовом пространстве.

Итак, две двумерные поверхности M^+ и M^- лежат в трехмерной поверхности $H = 0$ и при этом пересекаются по точке. Таким образом, 0 не является точкой пересечения общего положения. Формально данные соображения не доказывают наличие особенности у поверхностей $M^\pm$, так как они могут касаться в 0. Однако более тонкое исследование структуры оптимального синтеза в окрестности 0 выявляет коническую особенность у M^- и M^+ .

2. Геометрическое описание структуры гамильтонового потока. Рассмотрим постановку задачи Фуллера с несимметричным отрезком управлений:

$$\frac{1}{2} \int_0^T x_1^2 dt \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad u \in [-\alpha; \beta]. \quad (2.1)$$

Здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ – положительные числа, что есть необходимое и достаточное условие управляемости, см. например [2; п. 3.2]. Принцип максимума Понтрягина дает

$$H = -\frac{1}{2} x_1^2 + p_1 x_2 + p_2 u, \quad \dot{p}_1 = x, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} u = -\alpha, & \text{если } p_2 < 0, \\ u = \beta, & \text{если } p_2 > 0, \\ u \in [-\alpha; \beta], & \text{если } p_2 = 0. \end{cases}$$

Особая траектория $\sigma: \{x_1 = x_2 = p_1 = p_2 = 0\}$. Все экстремали, входящие в начало координат с чаттерингом, образуют в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4(x_1, x_2, p_1, p_2)$ двумерную поверхность M^- , выходящие – поверхность M^+ (см. [1; п. 2.2, 2.3 и 3.5]). Поверхности M^- и M^+ могут пересекаться только в 0, так как в остальных точках работает теорема Коши² о существовании и единственности решения ОДУ: $M^- \cap M^+ = \{0\}$.

Каждая из поверхностей $M^\pm$ содержит пару кривых переключения управления. Эти кривые получаются при пересечении $M^\pm$ с гиперплоскостью $p_2 = 0$. Поверхность M^+ содержит две кривые $\vec{\Gamma}^+$ и $\overleftarrow{\Gamma}^+$, отвечающие переключению управления $-\alpha \rightarrow \beta$ и $-\alpha \leftarrow \beta$ соответственно³ (см. рис. 2). Аналогично, поверхность M^- содержит кривые переключения $\vec{\Gamma}^-$ и $\overleftarrow{\Gamma}^-$. Обозначим

$$M^\pm \cap \{p_2 < 0\} = M_\alpha^\pm \quad \text{и} \quad M^\pm \cap \{p_2 > 0\} = M_\beta^\pm$$

– части поверхностей $M^\pm$, отвечающих управлениям $-\alpha$ и β соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поверхности $M^\pm$ сотканы из двух типов траекторий:

- (i) выходящих с кривых $\vec{\Gamma}^\pm$ и приходящих на $\overleftarrow{\Gamma}^\pm$ – это поверхности $M_\beta^\pm$;
- (ii) наоборот, выходящих с $\overleftarrow{\Gamma}^\pm$ и приходящих на $\vec{\Gamma}^\pm$ – это $M_\alpha^\pm$.

Данное описание позволяет полностью вычислить структуру особенности в 0, но сначала немного упростим вычисления.

²Функция H не дифференцируема на гиперплоскости $p_2 = 0$, однако единственность решения ОДУ по Филиппову нарушается только в точке $x_1 = x_2 = p_1 = p_2 = 0$ (см. [3]).

³Стрелки над $\Gamma^\pm$ показывают направление переключения управления.

Рис. 1. Схематичное изображение структуры поверхности M^+

3. Симметрии гамильтоновой системы. Воспользуемся хорошо известными симметриями задачи (2.1), (2.2).

1. Масштабирующая группа $g: \mathbb{R}^* \rightarrow GL(4, \mathbb{R})$, где

$$g(\lambda)(x_1, x_2, p_1, p_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda x_2, \lambda^3 p_1, \lambda^4 p_2),$$

увеличивает гамильтониан H в λ^4 раз, а симплектическую структуру $dp \wedge dx$ — в λ^5 раз. Значит, $g(\lambda)$ переводит траектории в траектории, ускоряя время в λ раз (если $\lambda < 0$, то направление движения по траектории меняется на противоположное). Следовательно, если $\lambda > 0$, то поверхности $M^\pm$ и каждая из кривых $\vec{\Gamma}^\pm$ и $\overleftarrow{\Gamma}^\pm$ переходит в себя при действии элементом $g(\lambda)$.

2. Важная подгруппа $\mathbb{R}^*$, состоящая из отражения относительно плоскости $x_2 = p_1 = 0$, сохраняет гамильтониан H , но меняет знак симплектической структуры $dp \wedge dx$ на противоположный. Поэтому симметрия

$$g(-1): (x_1 \mapsto x_1; x_2 \mapsto -x_2; p_1 \mapsto -p_1; p_2 \mapsto p_2)$$

переводит траектории в траектории, но меняет направление времени на противоположное. Итак, при отображении $g(-1)$ поверхности M^+ и M^- меняются местами. При этом $\vec{\Gamma}^+ \leftrightarrow \overleftarrow{\Gamma}^-$ и $\overleftarrow{\Gamma}^+ \leftrightarrow \vec{\Gamma}^-$.

4. Параметрическое задание лагранжевой поверхности. Рассмотрим, скажем, кривую $\vec{\Gamma}^+$. Она состоит из двух орбит относительно действия g : 0 и $\vec{\Gamma}^+ \setminus \{0\}$. Поэтому $\vec{\Gamma}^+$ полностью задается любой своей ненулевой точкой. Итак,

$$\vec{\Gamma}^\pm: \begin{cases} x_1 = \vec{x}_1^\pm \lambda^2, \\ x_2 = \vec{x}_2^\pm \lambda, \\ p_1 = \vec{p}_1^\pm \lambda^3, \\ p_2 = 0, \end{cases} \quad \overleftarrow{\Gamma}^\pm: \begin{cases} x_1 = \overleftarrow{x}_1^\pm \lambda^2, \\ x_2 = \overleftarrow{x}_2^\pm \lambda, \\ p_1 = \overleftarrow{p}_1^\pm \lambda^3, \\ p_2 = 0, \end{cases} \quad \lambda \geq 0,$$

где $\overrightarrow{x}_1^\pm, \dots, \overleftarrow{p}_1^\pm$ – некоторые числовые константы, зависящие от α и β (см. [4; с. 53, лемма 3.3])⁴:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1^+ &= \overleftarrow{x}_1^- \in (-\beta; 0), & \overrightarrow{x}_1^- &= \overleftarrow{x}_1^+ \in (0; \alpha); \\ \overrightarrow{x}_2^\pm &= -\overleftarrow{x}_2^\pm = -2\sqrt{\alpha\beta}; \\ \overrightarrow{p}_1^\pm &= -\overleftarrow{p}_1^\mp = -\frac{1}{\sqrt{8\alpha\beta}}(\overrightarrow{x}_1^\pm)^2.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что объединения $\overrightarrow{\Gamma}^+ \cup \overleftarrow{\Gamma}^-$ и $\overleftarrow{\Gamma}^+ \cup \overrightarrow{\Gamma}^-$ являются гладкими кривыми.

Переходим к параметризации поверхностей $M^\pm$. Для построения поверхностей $M_\beta^\pm$ воспользуемся замечанием 1: выпустим из каждой точки кривых $\overrightarrow{\Gamma}^\pm$ (для кривых $\overleftarrow{\Gamma}^\pm$ все аналогично) траектории гамильтоновой системы (2.2) до пересечения с кривыми $\overleftarrow{\Gamma}^\pm$. Начальная точка – $(\overrightarrow{x}_1^\pm \lambda^2, \overrightarrow{x}_2^\pm \lambda, \overrightarrow{p}_1^\pm \lambda^3, 0)$, $\lambda > 0$, управление $-u = \beta$, время движения по траектории $-t > 0$. Учитывая действие g масштабирующей группы, положим для симметрии $t = \lambda\tau$, $\tau > 0$. Получим двумерную поверхность (при $\lambda > 0$, $\tau > 0$)

$$M_\beta^\pm: \begin{cases} x_1 = \lambda^2 \left(\overrightarrow{x}_1^\pm + \overrightarrow{x}_2^\pm \tau + \frac{1}{2} \beta \tau^2 \right); \\ x_2 = \lambda (\overrightarrow{x}_2^\pm + \beta \tau); \\ p_1 = \lambda^3 \left(\overrightarrow{p}_1^\pm + \overrightarrow{x}_1^\pm \tau + \frac{1}{2} \overrightarrow{x}_2^\pm \tau^2 + \frac{1}{6} \beta \tau^3 \right); \\ p_2 = -\lambda^4 \tau \left(\overrightarrow{p}_1^\pm + \frac{1}{2} \overrightarrow{x}_1^\pm \tau + \frac{1}{6} \overrightarrow{x}_2^\pm \tau^2 + \frac{1}{24} \beta \tau^3 \right). \end{cases} \quad (4.1)$$

При этом время движения t по траектории ограничено первым пересечением с гиперплоскостью $p_2 = 0$ (т.е. с соответствующей кривой $\overleftarrow{\Gamma}^\pm$). Следовательно, значение p_2 на этом отрезке траектории необходимо положительно. Очевидно, от выбора λ это не зависит, значит,

$$\overrightarrow{Q}^\pm(\tau) = \overrightarrow{p}_1^\pm + \frac{1}{2} \overrightarrow{x}_1^\pm \tau + \frac{1}{6} \overrightarrow{x}_2^\pm \tau^2 + \frac{1}{24} \beta \tau^3 < 0, \quad \tau > 0. \quad (4.2)$$

Поскольку $(1/24)\beta > 0$ и $Q(0) = \overrightarrow{p}_1^\pm < 0$, получаем, что решениями неравенств (4.2) является некоторый интервал $(0, \overrightarrow{\tau}^\pm)$ или пара интервалов $(0, \overrightarrow{\tau}^\pm) \cup (\tau_1, \tau_2)$. Здесь $t = \lambda \overrightarrow{\tau}^\pm$ – первый момент выхода траектории на гиперплоскость p_2 . Таким образом, интервал (τ_1, τ_2) нас в любом случае не интересует.

В силу симметрии $g(-1)$ получаем $\overrightarrow{\tau}^+ = \overrightarrow{\tau}^-$ и $\overleftarrow{\tau}^+ = \overleftarrow{\tau}^-$. Обозначим

$$\tau_\alpha = \overleftarrow{\tau}^+ = \overleftarrow{\tau}^-, \quad \tau_\beta = \overrightarrow{\tau}^+ = \overrightarrow{\tau}^-.$$

Отметим, что в силу теоремы Коши о существовании и единственности решения ОДУ, оба отображения $(\lambda, \tau) \mapsto (x_1, x_2, p_1, p_2)$ согласно системе (4.1) являются диф-

⁴В используемой лемме 3.3 рассмотрена редукция задачи с $\beta = 1$. Искомые константы вычисляются при очевидной линейной замене координат.

феоморфизмами соответствующих прямоугольников $(\lambda, \tau) \in (0; +\infty) \times (0, \vec{\tau}^\pm)$ на образы.

Итак, мы построили параметрическое задание поверхностей $M^\pm$ в полупространстве $p_2 > 0$. При отображении $g(-1)$ поверхности M_β^+ и M_β^- меняются местами. Параметризация в полупространстве $p_2 < 0$ получается аналогично. Следы поверхностей $M^\pm$ на гиперплоскости $p_2 = 0$ есть кривые $\vec{\Gamma}^+ \cup \vec{\Gamma}^-$ и $\vec{\Gamma}^+ \cup \vec{\Gamma}^-$ соответственно.

5. Структура особенности. Следы поверхностей $M^\pm$ на диффеоморфной сфере поверхности

$$S_c: |x_1|^6 + |x_2|^{12} + |p_1|^4 + |p_2|^3 = c^{12}$$

являются пара непересекающихся замкнутых кривых. Каждая из этих кривых лежит в двумерной поверхности $\{H = 0\} \cap S_c$. Более того, при гомотетии $g(\lambda)$, $\lambda > 0$, поверхность S_c переходит в поверхность $S_{\lambda c}$ с аналогичной картиной взаимного расположения $M^\pm$ и $\{H = 0\}$.

Таким образом, пересечение поверхностей $M^\pm$ сродни пересечению конусов по вершине.

Опишем структуру этого пересечения. Для этого рассмотрим следы поверхностей $M^\pm$ на гиперплоскости $p_2 = 1$, поскольку чтобы получить следы поверхностей $M^\pm$ на остальных гиперповерхностях $p_2 = \mu$, достаточно применить растяжение $g(\sqrt[4]{|\mu|})$ и, возможно, отражение $g(-1)$ (если $\mu < 0$)⁵. Итак, пара $(\lambda, \tau) \in (0; +\infty) \times (0, \vec{\tau}^\pm)$ должна удовлетворять условию

$$p_2 = 1 = -\lambda^4 \tau \left(\vec{p}_1^\pm + \frac{1}{2} \vec{x}_1^\pm \tau + \frac{1}{6} \vec{x}_2^\pm \tau^2 + \frac{1}{24} \beta \tau^3 \right). \quad (5.1)$$

Очевидно, что для любого $\tau \in (0, \vec{\tau}^\pm)$ имеем $\vec{Q}^\pm(\tau) < 0$, т.е.

$$\lambda = (-\tau \vec{Q}^\pm(\tau))^{-1/4}, \quad (5.2)$$

и уравнение (5.1) определяет в каждом из двух прямоугольников $(\lambda, \tau) \in (0; \infty) \times (0, \vec{\tau}^\pm)$ по одной гладкой кривой – графику функций (5.2). Образ этих кривых при соответствующих отображениях (5.2) дает пару непересекающихся гладких кривых $S^\pm$ – след поверхностей $M^\pm$ на гиперплоскости $p_2 = 1$.

Пересечение нулевой поверхности гамильтониана $H = 0$ с гиперплоскостью $p_2 = 1$ дает однополостный гиперболоид

$$-\frac{1}{2} x_1^2 + p_1 x_2 + \beta = 0,$$

в котором лежат обе кривые $S^\pm$ (см. рис. 2).

⁵На самом деле, правильное раздувающее отображение должно использовать сферические координаты – при выборе какой-то конкретной карты есть шанс потерять часть информации. Однако автор считает, что использование сферических координат внесло бы ненужное утяжеление текста и интересующийся читатель без труда переписит приведенные формулы в любых удобных ему координатах.

Рис. 2. След поверхностей $M^\pm$ и $H = 0$ на гиперплоскости $p_2 = 1$

Для того, чтобы получить описание пересечения поверхностей $M^\pm$ в 0, необходимо к описанной выше картине в гиперплоскости $p_2 = 1$ применить масштабирующую группу $g(\mu)$ при $\mu \rightarrow +0$. В гиперплоскости $p_2 = 0$ след поверхности $H = 0$ вырождается в эллиптический конус

$$-\frac{1}{2}x_1^2 + p_1x_2 = 0,$$

а следы поверхностей $M^\pm$ превращаются в кривые $\vec{\Gamma}^+ \cup \overleftarrow{\Gamma}^+$ и $\vec{\Gamma}^- \cup \overleftarrow{\Gamma}^-$ соответственно.

Таким образом, поверхности M^+ и M^- имеют в начале координат особенность конического типа, поскольку $g(\mu)$ является своего рода гомотетией – растяжение по разным осям происходит с разными коэффициентами (степенями μ). Пересечение поверхностей M^+ и M^- в 0 сходно пересечению двух двумерных конусов в трехмерном пространстве по вершине (см. рис. 3).

Рис. 3. Пересечение конусов в вершине

Для точного описания особенности в вершине конусов естественна следующая замена координат:

$$\begin{cases} x_2 = \lambda, \\ x_1 = \lambda^2 \phi_1, \\ p_1 = \lambda^3 \phi_2, \\ p_2 = \lambda^4 \phi_3. \end{cases} \quad (5.3)$$

Данная замена является диффеоморфизмом областей $x_2 \neq 0$ и $\lambda \neq 0$ и раздувает особенность $x_1 = x_2 = p_1 = p_2 = 0$ на гиперплоскость $\lambda = 0$.

Образ объединения конусов $M^+ \cup M^-$ в новых координатах (см. систему (4.1)) является цилиндром, ось которого параллельна оси $O\lambda$, а основание является кусочно-гладкой кривой:

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}, & \tau \in (0; \overleftarrow{\tau}_\alpha), \\ \phi_1 = \frac{\overleftarrow{x}_1^+ + \overleftarrow{x}_2^+ \tau - (1/2)\alpha\tau^2}{(\overleftarrow{x}_2^+ - \alpha\tau)^2}, \\ \phi_2 = \frac{\overleftarrow{p}_1^+ + \overleftarrow{x}_1^+ \tau + (1/2)\overleftarrow{x}_2^+ \tau^2 - (1/6)\alpha\tau^3}{(\overleftarrow{x}_2^+ - \alpha\tau)^3}, \\ \phi_3 = -\frac{\tau(\overleftarrow{p}_1^+ + (1/2)\overleftarrow{x}_1^+ \tau + (1/6)\overleftarrow{x}_2^+ \tau^2 - (1/24)\alpha\tau^3)}{(\overleftarrow{x}_2^+ - \alpha\tau)^4}, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}, & \tau \in (0; \overrightarrow{\tau}^\beta), \\ \phi_1 = \frac{\overrightarrow{x}_1^+ + \overrightarrow{x}_2^+ \tau + (1/2)\beta\tau^2}{(\overrightarrow{x}_2^+ + \beta\tau)^2}, \\ \phi_2 = \frac{\overrightarrow{p}_1^+ + \overrightarrow{x}_1^+ \tau + (1/2)\overrightarrow{x}_2^+ \tau^2 + (1/6)\beta\tau^3}{(\overrightarrow{x}_2^+ + \beta\tau)^3}, \\ \phi_3 = -\frac{\tau(\overrightarrow{p}_1^+ + (1/2)\overrightarrow{x}_1^+ \tau + (1/6)\overrightarrow{x}_2^+ \tau^2 + (1/24)\beta\tau^3)}{(\overrightarrow{x}_2^+ + \beta\tau)^4}. \end{cases}$$

Здесь и далее под образом поверхности M при раздувающем некоторую точку $\sigma \in M$ отображении типа (5.3) подразумевается замыкание образа $M \setminus \sigma$ при этом отображении.

6. Структура слоя расслоения над многообразием особых траекторий второго порядка. Хорошо известно (см. [1], [4]), что в задаче оптимального управления общего положения неособая траектория, выходя на особую траекторию второго порядка (или сходя с нее) обязана содержать счетное число переключений на конечном промежутке времени (так называемый *чаттеринг режим*). Более того, множество траекторий, выходящих на особую траекторию второго порядка (или сходящих с нее) в данной точке σ , представляет собой двумерный слой локально-тривиального расслоения над многообразием коразмерности 4 особых траекторий второго порядка.

Поведение каждой траектории на любом таком слое моделируется задачей Фуллера с несимметричным отрезком управлений. Мы хотим показать, что весь слой

в целом имеет коническую особенность, “аналогичную” коническим особенностям $M_\alpha^\pm M_\beta^\pm$ в нуле.

Итак, поведение траекторий в расширенном фазовом пространстве вблизи многообразия особых траекторий второго порядка в задаче оптимального управления (с n фазовыми переменными) общего положения описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = -p_1 + f_4(z, w, u), \\ \dot{p}_1 = x_1 + f_3(z, w, u), \\ \dot{x}_1 = x_2 + f_2(z, w, u), \\ \dot{x}_2 = u + f_1(z, w, u), \\ \dot{w} = F(z, w, u), \end{cases} \quad (6.1)$$

где $x_1, x_2, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, $z = (x_1, x_2, p_1, p_2)$, $w \in \mathbb{R}^{2n-4}$ и

$$u = \begin{cases} -\alpha(w), & \text{если } p_2 < 0, \\ \beta(w), & \text{если } p_2 > 0, \\ 0, & \text{если } p_2 = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Функции $\alpha > 0$, $\beta > 0$, f_i и F достаточно гладкие, и f_i имеют i -й порядок малости относительно действия g , т.е.

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +0} \frac{|f_i(g(\lambda)z, w, u)|}{\lambda^i} \leq C$$

для некоторой константы $C > 0$.

Поверхность особых траекторий второго порядка локально определяется соотношением $z = 0$, и w служит координатами на ней.

Описание структуры конической особенности с точностью до членов второго и высших порядков удобно исследовать с помощью раздувающих отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть M – некоторая поверхность. Рассмотрим образ M при раздувающем точку $\sigma \in M$ отображении типа (5.3). Если

- (a) пересечение K образа M с гиперплоскостью $\lambda = 0$ не пусто и является кусочногладким многообразием;
 - (b) образ M является кусочногладким многообразием в окрестности K ;
 - (c) образ M касается цилиндра $K \times \mathbb{R}$ с основанием K в регулярных точках K ,
- то точку σ будем называть *особенностью конического типа*. В этом случае будем называть K *конической 1-струей* поверхности M в точке σ .

Отметим, что если M является настоящим конусом с вершиной σ , то K – это основание конуса⁶.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma = (0, w_0)$ – точка на особой траектории второго порядка в задаче (6.1), (6.2), а $M^-(w_0)$ ($M^+(w_0)$) – это двумерный слой неособых траекторий, выходящих с чаттерингом на особую траекторию (соответственно сходящихся

⁶Точнее, K – это пересечение конуса M с гиперплоскостью на расстоянии 1 от вершины.

с нее) в точке σ . Тогда при раздувающем отображении (5.3) с условием

$$w = \sigma + \lambda \xi \quad (6.3)$$

поверхность $M^+(\sigma) \cup M^-(\sigma)$ имеет коническую особенность в точке σ с конической 1-струей (5.4) с добавлением

$$\xi = \frac{1}{\overleftarrow{x}_2^+ - \alpha\tau} \left(\frac{\tau_\alpha F(0, \sigma, -\alpha) + (1 - \alpha\tau_\alpha)\tau_\beta F(0, \sigma, \beta)}{(1 - \alpha\tau_\alpha)(1 + \beta\tau_\beta) - 1} + F(0, \sigma, -\alpha)\tau \right) \quad (6.4)$$

и

$$\xi = \frac{1}{\overrightarrow{x}_2^+ + \beta\tau} \left(\frac{\tau_\beta F(0, \sigma, \beta) + (1 + \beta\tau_\beta)\tau_\alpha F(0, \sigma, -\alpha)}{(1 - \alpha\tau_\alpha)(1 + \beta\tau_\beta) - 1} + F(0, \sigma, \beta)\tau \right) \quad (6.5)$$

к каждой системе из (5.4) соответственно. Здесь и далее $\alpha = \alpha(\sigma)$ и $\beta = \beta(\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поверхности $M_\pm(w_0)$ могут быть описаны следующим образом (см. [4; п. 3.9]). Через точку σ проходят кривые $\overleftarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$ и $\overrightarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$. Поверхности $M_\pm(w_0)$ сотканы из двух типов траекторий: из траекторий, выходящих с кривых $\overrightarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$ с управлением $u = \beta(w)$ и приходящих за конечное время на соответствующую кривую $\overleftarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$, и наоборот, из траекторий, выходящих с $\overleftarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$ с $u = -\alpha(w)$ и приходящих на $\overrightarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$.

Для доказательства теоремы рассмотрим вспомогательную упрощенную задачу, структура которой нам известна, и покажем, что в исходной задаче поверхность $M^+(w_0) \cup M^-(w_0)$ имеет коническую особенность с такой же конической 1-струей, как и в упрощенной задаче.

Упрощенная задача получается отбрасыванием несущественных членов:

$$\begin{cases} \dot{p}_2 = -p_1, \\ \dot{p}_1 = x_1, \\ \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ \dot{w} = F(0, w_0, u), \end{cases}$$

и естественно

$$u = \begin{cases} -\alpha = -\alpha(w_0), & \text{если } p_2 < 0, \\ \beta = \beta(w_0), & \text{если } p_2 > 0, \\ 0, & \text{если } p_2 = 0. \end{cases}$$

Упрощенная задача по существу является задачей Фуллера с несимметричным отрезком управлений с добавлением несущественного уравнения $\dot{w} = F(0, w_0, u)$. Поверхности $\widetilde{M}^\pm(w_0)$ для упрощенной задачи описываются с помощью рассуждений, приведенных в пп. 2–5. После раздувающего отображения поверхность $\widetilde{M}^+(w_0) \cup \widetilde{M}^-(w_0)$ превращается в цилиндр (5.4). Остается только найти уравнения, описывающие ξ .

Рассмотрим кривые переключения $\widetilde{\Gamma}^+(w_0)$ и $\widetilde{\Gamma}^-(w_0)$ из $\widetilde{M}^+(w_0)$. На них $w = w_0 + \lambda \overleftarrow{w}^+$ и $w = w_0 + \lambda \overrightarrow{w}^+$ соответственно. Поскольку траектории с $\widetilde{\Gamma}^+(w_0)$ с управлением $u = -\alpha$ приходят на $\widetilde{\Gamma}^+(w_0)$ за время τ_α , то

$$\overrightarrow{w}^+ = \frac{1}{\overleftarrow{x}_2^+ - \alpha\tau_\alpha}(\overleftarrow{w}^+ + \tau_\alpha F(0, w_0, -\alpha)).$$

Аналогично

$$\overleftarrow{w}^+ = \frac{1}{\overrightarrow{x}_2^+ + \beta\tau_\beta}(\overrightarrow{w}^+ + \tau_\beta F(0, w_0, \beta)).$$

Из них находим

$$\begin{cases} \overleftarrow{w}^+ = \frac{\tau_\alpha F(0, \sigma, -\alpha) + (1 - \alpha\tau_\alpha)\tau_\beta F(0, \sigma, \beta)}{(1 - \alpha\tau_\alpha)(1 + \beta\tau_\beta) - 1}, \\ \overrightarrow{w}^+ = \frac{\tau_\beta F(0, \sigma, \beta) + (1 + \beta\tau_\beta)\tau_\alpha F(0, \sigma, -\alpha)}{(1 - \alpha\tau_\alpha)(1 + \beta\tau_\beta) - 1}. \end{cases}$$

Отсюда немедленно получаем, что образ $\widetilde{C}$ поверхности $\widetilde{M}^+(w_0) \cup \widetilde{M}^-(w_0)$ при раздувающем отображении (5.3), (6.3) – это цилиндр (5.4) с добавлением к системам из (5.4) уравнений (6.4) и (6.5) соответственно. Обозначим $K = \widetilde{C} \cap \{\lambda = 0\}$ – коническая 1-струя конуса $\widetilde{M}^+(w_0) \cup \widetilde{M}^-(w_0)$.

Остается показать, что образ C поверхности $M^+(w_0) \cup M^-(w_0)$, во-первых, пересекается с гиперплоскостью $\{\lambda = 0\}$ по K , а во-вторых, имеет в точках K вертикальную касательную.

Для этого перенесем гамильтоново векторное поле системы (6.1), (6.2) в пространство $(\lambda, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \xi)$. Для краткости будем писать $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ и $f_i = f_i(z, w, u) = f_i(\lambda, \phi, \xi, u)$. Получим

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = u + f_1; \\ \dot{\phi}_1 = \frac{1}{\lambda} \left(1 - 2\phi_1 u - 2\phi_1 f_1 - \frac{f_2}{\lambda} \right), \\ \dot{\phi}_2 = \frac{1}{\lambda} \left(\phi_1 - 3\phi_2 u - 3\phi_2 f_1 + \frac{f_3}{\lambda^2} \right), \\ \dot{\phi}_3 = \frac{1}{\lambda} \left(-\phi_2 - 4\phi_3 u - 4\phi_3 f_1 + \frac{f_4}{\lambda^3} \right), \\ \dot{\xi} = \frac{1}{\lambda} (F(z, w, u) - (u + f_1)\xi), \\ u = \text{sing}(\phi_3). \end{cases} \quad (6.6)$$

Данное поле, конечно, не продолжается на гиперплоскость $\lambda = 0$. Это связано с тем, что при чаттеринг режиме неособые траектории выходят на траекторию второго порядка за конечное время. Учитывая, что действие g ускоряет движение по траектории в λ раз, естественным представляется увеличить длины всех векторов поля (6.6) в λ раз – интегральные кривые не изменятся, а изменится лишь скорость

движения по ним. Итак, учитывая свойства функций f_i , при $\lambda \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = u\lambda + O(\lambda^2), \\ \dot{\phi}_1 = 1 - 2\phi_1 u + O(\lambda), \\ \dot{\phi}_2 = \phi_1 - 3\phi_2 u + O(\lambda), \\ \dot{\phi}_3 = -\phi_2 - 4\phi_3 u + O(\lambda), \\ \dot{\xi} = F(z, w, u) - u\xi + O(\lambda), \\ u = \text{sing}(\phi_3). \end{cases} \quad (6.7)$$

Аналогичное векторное поле для упрощенной системы получается отбрасыванием членов $O(\lambda^2)$ и $O(\lambda)$ и заменой $F(z, w, u)$ на $F(0, w_0, u)$. Поэтому на гиперплоскости $\lambda = 0$ оба этих поля (для исходной системы и для упрощенной) совпадают.

Пересечение каждой из поверхностей C и $\tilde{C}$ с $\{\lambda = 0\}$ содержит пару кривых. Поскольку обе поверхности C и $\tilde{C}$ содержат по одинаковой точке

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ \phi_1 = \frac{\overleftarrow{x}_1^+}{(\overleftarrow{x}_2^+)^2}, \\ \phi_2 = \frac{\overleftarrow{p}_1^+}{(\overleftarrow{x}_2^+)^3}, \\ \phi_3 = 0, \\ \xi = \frac{\tau_\alpha F(0, \sigma, -\alpha) + (1 - \alpha\tau_\alpha)\tau_\beta F(0, \sigma, \beta)}{(1 - \alpha\tau_\alpha)(1 + \beta\tau_\beta) - 1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ \phi_1 = \frac{\overrightarrow{x}_1^+}{(\overrightarrow{x}_2^+)^2}, \\ \phi_2 = \frac{\overrightarrow{p}_1^+}{(\overrightarrow{x}_2^+)^3}, \\ \phi_3 = 0, \\ \xi = \frac{\tau_\beta F(0, \sigma, \beta) + (1 + \beta\tau_\beta)\tau_\alpha F(0, \sigma, -\alpha)}{(1 - \alpha\tau_\alpha)(1 + \beta\tau_\beta) - 1} \end{cases}$$

на каждой из этих кривых, то (по теореме Коши о существовании и единственности решения ОДУ) их пересечения с $\{\lambda = 0\}$ должны совпадать, т.е.

$$C \cap \{\lambda = 0\} = \tilde{C} \cap \{\lambda = 0\} = K.$$

С другой стороны, гиперплоскость $\lambda = 0$ является интегральной для поля (6.7), а образы кривых $\overrightarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$ и $\overleftarrow{\Gamma}^\pm(w_0)$ при раздувающем отображении (5.3), (6.3) ортогональны гиперплоскости $\{\lambda = 0\}$. Поэтому и двумерная поверхность C ортогональна гиперплоскости $\{\lambda = 0\}$ – это немедленно следует из теоремы о дифференцировании решения по начальным данным. Значит, C и $\tilde{C}$ касаются в точках K , что и требовалось.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Зеликину за множество ценных обсуждений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of Chattering Control*, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.
- [2] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.
- [3] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985.
- [4] I. A. K. Kupka, “The ubiquity of Fuller’s phenomenon”, *Nonlinear Controllability and Optimal Control*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **133**, Dekker, New York, 1990, 313–350.

Л. В. Локуцкий

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: lion.lokut@gmail.com

Поступило

01.11.2012