Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Разборов, О $(3, 4)$ -проблеме Турана с запрещенными подграфами, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 271–281

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:17:08

О $(3, 4)$ -проблеме Турана с запрещенными подграфами

А. А. Разборов

В работе указываются три 3-графа на пяти вершинах, не содержащиеся в известных экстремальных конфигурациях для $(3, 4)$ -проблемы Турана. При дополнительном условии отсутствия указанных 3-графов в качестве индуцированных подграфов получено полное решение этой проблемы. Нами используется, насколько нам известно, новый метод “непрямой интерпретации”, позволяющий построить нужную дополнительную структуру на носителе гипотетического контрпримера к гипотезе Турана, но лишь в довольно узком и ограниченном смысле. В работу также включены результаты двух рутинных вычислений в алгебре флагов, устанавливающие похожие результаты для других множеств запрещенных 3-графов.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10187

1. Введение. В классической работе [1] Мانتель вычислил минимально возможное количество ребер в графе G с данным числом вершин, обладающем тем свойством, что никакие три вершины не являются независимыми, т.е. содержат хотя бы одно соединяющее их ребро. В статье [2] (по существу положившей начало всей области экстремальной комбинаторики) Туран обобщил результат Мантеля на случай независимых множеств любого размера. В той же работе Туран поставил вопрос о дальнейшем обобщении полученных результатов на случай гиперграфов, и с тех пор вопросы такого рода приобрели слегка зловещую репутацию одних из наиболее трудных и не поддающихся решению задач во всей дискретной математике.

Более точно, для семейства $\mathcal{H}$ r -однородных гиперграфов (которые в дальнейшем будут называться просто r -графами) и натурального числа n обозначим через $\text{ex}_{\min}(n; \mathcal{H})$ минимальное количество ребер в n -вершинном r -графе, не содержащем индуцированных копий никакого $H \in \mathcal{H}$. Пусть также

$$\pi_{\min}(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{\min}(n; \mathcal{H})}{\binom{n}{r}}$$

(легко видеть, что этот предел всегда существует); в тех случаях, когда $\mathcal{H}$ состоит из единственного r -графа H , $\pi_{\min}(\{H\})$ будет сокращаться до $\pi_{\min}(H)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Для $\ell > r \geq 2$ обозначим через I_ℓ^r пустой r -граф на ℓ вершинах. Значения $\pi_{\min}(I_\ell^r)$ до сих пор не известны ни для какой пары $\ell > r \geq 3$. Про историю и текущее состояние дел этого и ряда смежных вопросов можно прочесть в недавнем подробном обзоре [3]; мы же начиная с этого момента полностью сосредотачиваемся на простейшем случае $r = 3$, $\ell = 4$. Гипотеза Турана состоит в том, что $\pi_{\min}(I_4^3) = 4/9$; ее также иногда называют $(3, 4)$ -проблемой Турана или *тетраэдральной проблемой*. В серии работ Де Каена [4], Жиро (Giraud, неопубликованная работа), Чанг и Лу [5] были установлены нижние оценки на $\pi_{\min}(I_4^3)$; рекордной в настоящее время является оценка [6], [7]

$$\pi_{\min}(I_4^3) \geq 0.438334.$$

Одним из наиболее перспективных подходов к решению трудных экстремальных задач является “локальный”; он состоит из двух частей. Вначале следует попытаться понять природу множества (предположительно) экстремальных конфигураций, после чего стоит попробовать решить рассматриваемую задачу в “окрестности” этого множества, настолько “большой” и “естественной”, насколько это возможно (мы намеренно не пытаемся уточнить значение многих терминов в данной фразе). В интересующем нас контексте можно, как нам кажется, смело утверждать, что первая часть этой программы была завершена в серии классических работ Турана [2], Брауна [8], Косточки [9] и Фон-дер-Флаасса [10]; по крайней мере, ничего существенно нового к сказанному в этих работах за истекшие 25 лет добавить не удалось.

Что касается второй части программы, Разборов [6] доказал, что

$$\pi_{\min}(I_4^3, G_3) = \frac{4}{9}, \quad (1)$$

где G_3 – это 3-граф на 4 вершинах с 3 ребрами. В другой работе [11] того же автора $(3, 4)$ -проблема Турана была решена для двух широких классов 3-графов, получающихся с помощью конструкции Фон-дер-Флаасса (все необходимые определения будут приведены чуть ниже). Каждый из этих двух классов *содержит все примеры Турана–Брауна–Косточки*.

Результат (1), напротив, обладает тем существенным недостатком, что единственным примером Турана–Брауна–Косточки, не содержащим копий G_3 , является исходный пример Турана. Более того, Пихурко [12] установил, что этот пример по существу является *вообще* единственной экстремальной конфигурацией, реализующей равенство в (1).

Главная цель настоящей работы состоит в том, чтобы заполнить данный пробел. Более точно, мы показываем, что

$$\pi_{\min}(I_4^3, H_1, H_2, H_3) = \frac{4}{9}, \quad (2)$$

где H_i – это 3-графы на 5 вершинах со следующими множествами 3-ребер:

$$\left. \begin{aligned} E(H_1) &\stackrel{\text{def}}{=} \{(123)(124)(134)(234)(125)(345)\}, \\ E(H_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \{(123)(124)(134)(234)(135)(145)(235)(245)\}, \\ E(H_3) &\stackrel{\text{def}}{=} \{(123)(124)(134)(234)(125)(135)(145)(235)(245)\} \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Иными словами, в каждом из этих 3-графов вершины $\{1, 2, 3, 4\}$ образуют клику, а линк оставшейся вершины 5 является либо совершенным паросочетанием (H_1), либо циклом длины 4 (H_2), либо кликой K_4 за вычетом одного ребра (H_3). В отличие от G_3 , наши новые запрещенные 3-графы отсутствуют во *всех* конфигурациях Турана–Брауна–Косточки (см. утверждение 1 ниже).

Как избавиться от дополнительного предположения отсутствия H_1, H_2, H_3 в (2), пока неясно, и естественные попытки в этом направлении встречаются с общими трудностями в точности той природы, которые делают экстремальные проблемы для гиперграфов настолько трудными. Мы, однако, хотим отметить, что наши методы доказательства используют некоторые идеи, которые, насколько нам известно, являются новыми и могут представлять независимый интерес. Более точно, мы пытаемся использовать один из результатов в [11], решающих (3, 4)-проблему Турана для класса 3-графов, получающихся с помощью интерпретации Фон-дер-Флаасса из некоторого класса ориентированных графов (*орграфов*). По идее, для этого следовало бы взять произвольный 3-граф без индуцированных копий I_4^3, H_1, H_2, H_3 и воссоздать на множестве его вершин структуру орграфа, каким-либо полезным образом связанную с исходным 3-графом G и к которой мы могли бы применить наш предыдущий результат. Нам, однако, выполнение этой программы в полной мере представляется делом довольно проблематичным.

По-видимому новое наблюдение состоит в том, что наша конечная цель настолько скромна, что для ее достижения такая “глобальная” структура является совершенно избыточной. Во-первых, мы можем предполагать без ограничения общности, что существует *фиксированный* 3-граф H , не реализуемый с помощью конструкции Фон-дер-Флаасса, такой, что его копии имеют *высокую плотность* в гипотетическом контрпримере G . Последний факт позволяет нам применить стандартную технику из теории Рамсея с тем, чтобы найти в G несколько копий H , расположенных по отношению друг к другу весьма регулярным образом. После этого мы пытаемся воссоздать на H структуру Фон-дер-Флаасса (т.е. некоторого орграфа) путем “считывания” информации, “закодированной” в найденной конфигурации. 3-Графы H_1, H_2, H_3 оказываются единственными препятствиями к достижению этой цели, которая, как мы предположили с самого начала, недостижима.

Как мы уже отмечали, данный метод выглядит довольно общим и практически не использует специфику (3, 4)-проблемы Турана. Последнее замечание, впрочем, не относится к заключительной части доказательства (“считывания информации”), которая, возможно, проливает хотя бы какой-то свет на, вообще говоря, довольно загадочную природу примеров Косточки–Фон-дер-Флаасса.

В работу также включены два разрозненных результата, доказываемых с помощью стандартных вычислений в алгебре флагов. Первый из них усиливает (1) за счет замены G_3 на больший 3-граф с множеством ребер $\{(123)(124)(134)(235)\}$, а второй устанавливает оценку $\pi_{\min}(I_4^3, M_2) \geq 0.4557$, где M_2 – единственный 3-граф на 6 вершинах и с 6 ребрами, не содержащий I_4^3 .

2. Предварительные сведения. Множество $\{1, 2, \dots, n\}$ будет обозначаться через $[n]$. Для конечного множества X через $[X]^k$ будет обозначаться семейство всех его k -элементных подмножеств. Обозначение $[n]^k$ будет использоваться в качестве сокращения для $[n]^k$.

В настоящей заметке мы работаем с 3-графами, которые как правило будут обозначаться буквами G, H , возможно с индексами, а также с ориентированными графами, или для краткости *орграфами* (т.е. направленными графами без петель, кратных ребер и пар ребер, соединяющих пару вершин в противоположных направлениях), которые будут обычно обозначаться буквами Γ . В обоих случаях $V(\cdot)$ – это множество вершин, а $E(\cdot)$ – множество 3-ребер (ориентированных ребер соответственно). Для $V_0 \subseteq V(G)$ через $G|_{V_0}$ будет обозначаться индуцированный на множество вершин V_0 3-граф, и аналогично для $\Gamma|_{V_0}$. Пара вершин u, v *независима* в орграфе Γ , если ни $\langle u, v \rangle$, ни $\langle v, u \rangle$ не лежит в $E(\Gamma)$.

Для конечного семейства 3-графов $\mathcal{H}$ и натурального числа n обозначим через $\text{ex}_{\min}(n; \mathcal{H})$ минимальное количество ребер в n -вершинном 3-графе, не содержащем индуцированных копий никакого $H \in \mathcal{H}$; пусть также

$$\pi_{\min}(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{ex}_{\min}(n; \mathcal{H})}{\binom{n}{3}}$$

(хорошо известно, что этот предел всегда существует); $\pi_{\min}(\{H\})$ будет сокращаться до $\pi_{\min}(H)$. Пусть I_4^3 – пустой 3-граф на 4 вершинах и H_1, H_2, H_3 – 3-графы на пяти вершинах, задаваемые своими множествами ребер (3).

Нашим основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнено равенство*

$$\pi_{\min}(I_4^3, H_1, H_2, H_3) = \frac{4}{9}.$$

Так как (помимо развития некоторых интересных методов) наша основная мотивировка состоит в том, что H_1, H_2, H_3 не содержатся в качестве индуцированных подграфов ни в одном примере Косточки (из чего, кстати, немедленно вытекает верхняя оценка в теореме 1), мы начнем с уточнения и сравнительно простого доказательства этого факта. Читатель, заинтересованный лишь в доказательстве теоремы 1, может без ущерба для понимания пропустить эту часть.

Положим $\Omega = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{R}$ и рассмотрим (бесконечный) орграф $\Gamma_K = (\Omega, E_K)$ с множеством вершин Ω , определяемый следующим образом:

$$E_K \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle (a, x), (b, y) \rangle \mid (x + y < 0 \wedge b = a + 1) \vee (x + y > 0 \wedge b = a - 1) \}.$$

Орграф Γ_K не содержит индуцированных ориентированных циклов $\vec{C}_4$.

Для произвольного орграфа $\Gamma = (V, E)$ без индуцированных копий $\vec{C}_4$ обозначим через $FDF(\Gamma)$ 3-граф с $V(FDF(\Gamma)) = V(\Gamma)$, в котором тройка (u, v, w) объявляется ребром в том и только том случае, когда $\Gamma|_{\{u, v, w\}}$ либо содержит изолированную (т.е. независимую от двух других) вершину, либо содержит вершину выходящей степени 2 (*интерпретация Фон-дер-Флаасса* [10]). Оказывается, что $FDF(\Gamma)$ не содержит копий I_4^3 , и все известные экстремальные конфигурации для случая, когда число вершин делится на 3, в точности имеют вид $FDF(\Gamma_K)|_{\mathbb{Z}_3 \times S}$, где $S \subseteq \mathbb{R}$ – произвольное конечное подмножество.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *3-Граф $FDF(\Gamma_K)$ не содержит индуцированных копий H_1, H_2, H_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное и фиксируем произвольный набор $\omega_i = (a_i, x_i)$, $i \in [5]$, определяющий индуцированное вложение одного из трех 3-графов $H \in \{H_1, H_2, H_3\}$ в $FDF(\Gamma_K)$. Без ограничения общности можно предполагать, что все x_i попарно различны. Мы рассмотрим порознь два случая, $H \in \{H_1, H_2\}$ и $H = H_3$.

Случай 1: $H = H_1$ или $H = H_2$.

Вершины $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ образуют клику в $FDF(\Gamma_K)$; легко видеть, что все способы ее получения в орграфе Γ_K описываются на рис. 1.

Рис. 1. $\{u, v, w, y\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

Если вершины $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ попарно независимы в Γ_K (т.е. $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$), то оставшаяся вершина ω_5 не может быть независима от них, и, следовательно, ее линк L в индуцированном 3-графе $FDF(\Gamma_K)|_{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}}$, определяемый как обыкновенный граф с множеством ребер

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{e \in [\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}]^2 \mid e \cup \{\omega_5\} \in E(FDF(\Gamma_K))\},$$

окажется (обыкновенной) кликой на множестве вершин

$$\{z \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \mid \langle \omega_5, z \rangle \in E(\Gamma_K)\}. \quad (4)$$

Ни один из двух графов H_1, H_2 такой формой не обладает.

Допустим теперь, что $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ образуют в Γ_K звезду $\vec{K}_{1,3}$, как показано на средней картинке на рис. 1. Если ω_5 независима от $\{u, v, w\}$, то $\{u, v, w, \omega_5\}$ — еще одна клика в $FDF(\Gamma_K)$, если ω_5 независима от y , то y — независимая вершина в линке L , а если $\langle y, \omega_5 \rangle \in E(\Gamma_K)$, то y имеет степень 3 в L . Ни одна из этих возможностей не реализуется для H_1 или H_2 , и, таким образом, нам осталось разобрать последний случай, когда $\langle \omega_5, y \rangle \in E(\Gamma_K)$ и ω_5 также соединена со всеми вершинами u, v, w . Но в этом случае L снова будет кликой на том же самом множестве (4), что, как мы уже отмечали, невозможно. Тем самым, второй случай на рис. 1 полностью разобран.

Предположим, наконец, что $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ порождают в Γ_K третий орграф из указанных на рис. 1. С помощью того же самого рассуждения, что и в предыдущем случае, легко показать, что ω_5 не может быть независимой от y и что $\langle y, \omega_5 \rangle \notin E(\Gamma_K)$. Иными словами, как и выше, можно предположить, что $\langle \omega_5, y \rangle \in E(\Gamma_K)$.

Если ω_5 независима от u, v , то $\langle \omega_5, w \rangle$ является ребром $E(\Gamma_K)$ ввиду того, что в противном случае вершина y снова оказалась бы изолированной в линке L вершины ω_5 . Но в этом случае оказывается, что конфигурация, порожденная вершинами y, w, u, ω_5 , не может встречаться в Γ_K . Действительно, если, скажем, $u = \omega_i$, то две вершины y, w вынуждают два противоположных неравенства между вещественными числами x_i и x_5 (напомним, что $\omega_j = (a_j, x_j) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{R}$).

Наконец, если ω_5 и w независимы, то имеет место либо $\langle \omega_5, u \rangle \in E(\Gamma_K)$, либо $\langle \omega_5, v \rangle \in E(\Gamma_K)$ (в противном случае u оказалась бы изолированной в L), и без ограничения общности мы можем предположить, что $\langle \omega_5, u \rangle \in E(\Gamma_K)$. Но тогда мы получаем $\langle \omega_5, v \rangle \notin E(\Gamma_K)$ (так как в противном случае тройка (v, u, y) образовывала бы треугольник в L) и $\langle v, \omega_5 \rangle \notin E(\Gamma_K)$ (так как в противном случае тройка (v, w, y) оказалась бы независимым множеством в L). Полученное противоречие завершает разбор случая 1.

Случай 2: $H = H_3$.

Ввиду того, что $(\omega_3\omega_4\omega_5) \notin E(FDF(\Gamma_K))$, возможны два случая: либо эти три вершины орграфа Γ_K образуют ориентированный цикл $\vec{C}_3$, либо с точностью до их переобозначения имеет место $\langle \omega_3, \omega_4 \rangle \in E(\Gamma_K)$, в то время как ω_3 и ω_5 независимы. В первом случае заметим, что если ω_1 независима от (без ограничения общности) вершины ω_3 и (также без ограничения общности) выполнено $\langle \omega_3, \omega_4 \rangle \in E(\Gamma_K)$, то отсюда вытекает, что среди ребер $FDF(\Gamma_K)$ отсутствует еще одна тройка $(\omega_1\omega_3\omega_4)$. Во втором случае мы, рассуждая аналогичным образом, заключаем, что ни одна из двух вершин ω_1, ω_2 не может быть независимой от ω_3, ω_5 . Но тогда среди $\omega_1, \omega_2, \omega_4$ найдется пара независимых вершин и, добавляя к ним ω_3, ω_5 , мы найдем четверку вершин, индуцирующих не более двух 3-ребер, что в 3-графе $H = H_3$ невозможно.

Утверждение 1 полностью доказано.

Помимо циклов $\vec{C}_4$ орграф Γ_K не содержит также индуцированных копий $\bar{P}_3$ (т.е. орграфа, состоящего из ориентированного ребра с добавленной изолированной вершиной). Один из двух основных результатов в работе [11] состоит в решении (3,4)-проблемы Турана для класса 3-графов, получаемых с помощью интерпретации Фон-дер-Флаасса из орграфов, обладающих последним свойством. Перед тем как сформулировать этот результат удобно напомнить небольшой фрагмент формализма теории алгебр флагов [13]; он нам в любом случае понадобится в следующем пункте.

Для пары 3-графов H, G таких, что $|V(H)| \leq |V(G)|$, через $p(H, G)$ обозначается плотность индуцированных копий H в G или, иными словами, вероятность того, что $|V(H)|$ случайно выбранных из $V(G)$ вершин индуцируют подграф, изоморфный H . Пусть ρ – 3-граф на трех вершинах, состоящий из единственного ребра, тем самым, $p(\rho, G)$ – не что иное, как реберная плотность 3-графа G . Справедливо следующее фундаментальное *цепное свойство* (см., например, [13; лемма 2.2]):

$$p(H, \hat{G}) = \sum_{G \in \mathcal{M}_\ell} p(H, G)p(G, \hat{G}), \quad (5)$$

где $|V(H)| \leq \ell \leq |V(\hat{G})|$ и $\mathcal{M}_\ell$ – это множество всех 3-графов на ℓ вершинах, рассматриваемых с точностью до изоморфизма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [11; теорема 2.3]. *Для всякой возрастающей последовательности $\{\Gamma_n\}$ орграфов, не содержащих индуцированных копий $\vec{C}_4$ и $\bar{P}_3$, имеет место*

$$p(\rho, FDF(\Gamma_n)) \geq \frac{4}{9}(1 - o(1)).$$

Нам также понадобится многодольный вариант теоремы Рамсея, приводимый с уровнем общности, достаточным для наших целей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [14; теорема 5.1.5]. Для всяких целых чисел $\ell > 0$, $n > 0$ и целочисленного набора $r_1, \dots, r_\ell > 0$ существует $N > 0$ такое, что выполнено следующее. Пусть B_i , $1 \leq i \leq \ell$, — N -элементные множества и множество $[B_1]^{r_1} \times \dots \times [B_\ell]^{r_\ell}$ произвольным образом раскрашено в два цвета. Тогда существуют $A_i \subseteq B_i$, $|A_i| = n$, такие, что множество

$$[A_1]^{r_1} \times \dots \times [A_\ell]^{r_\ell}$$

монокроматично относительно данной раскраски.

С помощью простой итерации последнего предложения получается следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для всяких целых чисел $\ell, n, r > 0$ существует $N > 0$ такое, что выполнено следующее. Пусть $B = B_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_\ell$, где $|B_i| = N$, и предположим, что множество $[B]^r$ раскрашено в два цвета. Тогда существуют $A_i \subseteq B_i$, $|A_i| = n$, такие, что цвет всякого $E \in [A_1 \cup \dots \cup A_\ell]^r$ зависит лишь от набора мощностей $\langle |E \cap A_1|, \dots, |E \cap A_\ell| \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякого возможного разбиения $r = r_1 + \dots + r_\ell$, $r_i \geq 0$, наша исходная раскраска множества $[B]^r$ естественным образом индуцирует раскраску множества $[B_1]^{r_1} \times \dots \times [B_\ell]^{r_\ell}$. Нам осталось лишь последовательно применить предложение 2 ко всем этим разбиениям (в произвольном порядке).

В частном случае $r_1 = \dots = r_\ell = 1$ у предложения 2 имеется “плотностной” аналог, который в слегка модифицированном виде много раз использовался в таких областях, как аддитивная комбинаторика, экстремальная комбинаторика и теория сложности вычислений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [14; теорема 5.1.4]. Для всяких целых чисел $\ell > 0$, $n > 0$ и вещественного $\delta > 0$ существует $N_0 > 0$ такое, что если B_i , $1 \leq i \leq \ell$, — N -элементные множества для некоторого $N \geq N_0$ и $S \subseteq B_1 \times \dots \times B_\ell$ удовлетворяет $|S| \geq \delta N^\ell$, то существуют множества $A_i \subseteq B_i$, $|A_i| = n$, такие, что

$$A_1 \times \dots \times A_\ell \subseteq S.$$

Теперь все готово для доказательства нашего основного результата.

3. Доказательство теоремы 1. Фиксируем произвольным образом возрастающую последовательность $\{G_m\}$ 3-графов, не содержащих I_4^3 , H_1 , H_2 , H_3 в качестве индуцированных подграфов. Мы хотим показать, что

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} p(\rho, G_m) \geq \frac{4}{9}.$$

Допустим противное. Переходя в случае необходимости к некоторой подпоследовательности, мы можем без ограничения общности считать, что для некоторого фиксированного $\epsilon > 0$ и всех m имеет место

$$p(\rho, G_m) \leq \frac{4}{9} - \epsilon. \quad (6)$$

3-Граф G назовем *регулярным*, если имеет место $E(G) \supseteq E(FDF(\Gamma))$, где Γ — некоторый орграф с тем же множеством вершин $V(G)$ и не содержащий индуцированных копий $\tilde{C}_4$, $\bar{P}_3$. 3-Граф *сингулярен*, если он не является регулярным.

Согласно предложению 1 существует натуральное число ℓ такое, что для *всякого* регулярного 3-графа G с ℓ вершинами выполнено

$$p(\rho, G) \geq \frac{4}{9} - \frac{\epsilon}{2}. \quad (7)$$

Фиксируем на некоторое время натуральное m такое, что $|V(G_m)| \geq \ell$, и обозначим через

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{G \in \mathcal{M}_\ell \\ G \text{ регулярен}}} p(G, G_m)$$

вероятность того, что подграф 3-графа G_m , индуцированный на выбранное случайным образом множество из ℓ вершин, является регулярным. Полагая в формуле (5) $H := \rho$ и $\hat{G} := G_m$, а также используя (6) и (7), мы получаем, что

$$\left(\frac{4}{9} - \epsilon\right) \geq R \left(\frac{4}{9} - \frac{\epsilon}{2}\right)$$

и, следовательно, $1 - R \geq \epsilon$. Таким образом, для некоторой абсолютной (и не зависящей от m) константы $\delta > 0$ существует *сингулярный* 3-граф $G \in \mathcal{M}_\ell$ такой, что $p(G, G_m) \geq \delta$.

Вывод предыдущего абзаца справедлив для произвольного m с $|V(G_m)| \geq \ell$. Поскольку множество $\mathcal{M}_\ell$ конечно, можно без ограничения общности предполагать, что этот сингулярный 3-граф G один и тот же для всех m . Мы собираемся применить приведенную в конце предыдущего пункта технику “регуляризации” с тем, чтобы в конце концов получить противоречие с сингулярностью 3-графа G .

Положим в утверждении 2 $n := 2$ и $r := 3$; пусть N_1 – получающаяся в его заключении оценка на мощность. Положим

$$\delta' = \frac{1}{2} \ell^{-\ell} \delta \quad (8)$$

и применим предложение 3 с параметрами $n := N_1$ и $\delta := \delta'$. Пусть N_0 – полученная оценка на мощность; на этом этапе мы опять фиксируем m так, что выполнено $|V(G_m)| \geq \ell N_0$. Мы можем предполагать без ограничения общности, что $|V(G_m)|$ делится на ℓ ; пусть

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\ell} |V(G_m)|.$$

Отметим, что $N \geq N_0$.

Пусть $V(G) = [\ell]$. Выберем случайным образом сбалансированное разбиение

$$V(G_m) = B_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_\ell$$

на N -элементные множества. Усредняя по всем индуцированным копиям G в G_m , мы видим, что математическое ожидание плотности множества тех индуцированных вложений $\alpha: G \rightarrow G_m$, для которых выполнено $\alpha(i) \in B_i$, $i \in [\ell]$, не менее δ' (следует напомнить, что δ' задается с помощью (8)). Фиксируем произвольным образом сбалансированное разбиение $V(G_m) = B_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} B_\ell$, для которого имеет место эта нижняя оценка на плотность, и пусть $S \subseteq [B_1] \times \cdots \times [B_\ell]$ состоит из тех наборов

$(v_1, \dots, v_\ell)$, для которых заданное в виде $\alpha(i) = v_i$ отображение $\alpha: [\ell] \rightarrow V(G_m)$ на самом деле определяет индуцированное вложение 3-графа G .

Применяя предложение 3, мы найдем подмножества $A_i \subseteq B_i$ такие, что $|A_i| = N_1$ и $A_1 \times \dots \times A_\ell \subseteq S$. А применив утверждение 2 (с $B_i := A_i$) к 2-раскраске множества $[A_1 \cup \dots \cup A_\ell]^3$, определяемой ребрами 3-графа G_m , мы найдем попарно различные пары элементов $a_i, b_i \in A_i$ такие, что для всяких $i \neq j \in [\ell]$ имеет место

$$(a_i b_i a_j) \in E(G_m) \equiv (a_i b_i b_j) \in E(G_m).$$

Напомним также, что для всяких $1 \leq i < j < k \leq \ell$ и всяких $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c_j \in \{a_j, b_j\}$, $c_k \in \{a_k, b_k\}$ включение $(c_i c_j c_k) \in E(G_m)$ имеет место в том и только том случае, когда $(ijk) \in E(G)$, и этот вывод не зависит от выбора системы представителей c_i, c_j, c_k .

Определим направленный граф Γ без петель и кратных ребер с множеством вершин $[\ell]$, объявляя пару $\langle i, j \rangle$ его ребром в том и только том случае, когда $(a_i b_i a_j), (a_i b_i b_j) \notin E(G_m)$ (обратите внимание на отрицание!). Первое наблюдение состоит в том, что поскольку четыре вершины $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ содержат хотя бы одно 3-ребро, не может случиться так, что обе упорядоченные пары $\langle i, j \rangle$ и $\langle j, i \rangle$ одновременно принадлежат $E(\Gamma)$, и, следовательно, Γ – это на самом деле ориентированный граф.

Мы утверждаем, что $E(G) \supseteq E(FDF(\Gamma))$ и что Γ не содержит индуцированных копий $\vec{P}_3$ и $\vec{C}_4$, получив таким образом противоречие с сингулярностью G . В приводимом ниже доказательстве этого факта (которое в целях удобства разбито на несколько простых утверждений), индексы i, j, k пробегают наборы всех троек попарно различных элементов $[\ell]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $\langle i, j \rangle \in E(\Gamma)$ и $\langle i, k \rangle \in E(\Gamma)$, то $(ijk) \in E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку четверка $\{a_i, b_i, a_j, a_k\}$ не образует в G_m независимого множества, по крайней мере одна из двух троек $(a_i a_j a_k), (b_i b_j b_k)$ должна принадлежать $E(G_m)$, что влечет $(ijk) \in E(G)$.

В оставшейся части доказательства существенно используется предположение об отсутствии копий 3-графов H_1, H_2, H_3 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если вершины i, j , а также i, k , независимы в Γ , то $(ijk) \in E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что посылка нашего утверждения эквивалентна тому, что обе четверки $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ и $\{a_i, b_i, a_k, b_k\}$ образуют клики в G_m . Ввиду симметрии мы можем без ограничения общности предположить, что $\langle j, k \rangle \notin E(\Gamma)$ или, иными словами, что $(a_j b_j a_k), (a_j b_j b_k) \in E(G_m)$. Но тогда ввиду того, что порожденный вершинами $\{a_i, b_i, a_j, b_j, a_k\}$ 3-граф отличен от H_1 , по крайней мере одна из четырех троек $(c_i c_j a_k)$, $c_i \in \{a_i, b_i\}$, $c_j \in \{a_j, b_j\}$, должна находиться в G_m , из чего вытекает $(ijk) \in E(G)$.

Вспоминая определение 3-графа $FDF(\Gamma)$, мы видим, что к настоящему моменту мы уже доказали включение $E(FDF(\Gamma)) \subseteq E(G)$. Нам еще осталось проверить, что Γ не содержит копий $\vec{P}_3$ и $\vec{C}_4$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если вершины i, j независимы в Γ и $\langle j, k \rangle \in E(\Gamma)$, то выполнено $(ijk) \notin E(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и ранее, рассмотрим конфигурацию, порожденную вершинами $\{a_i, b_i, a_j, b_j, a_k\}$. Предполагая противное, т.е. $(ijk) \in E(G)$, мы видим, что единственными отсутствующими в этой конфигурации 3-ребрами являются $(a_j b_j a_k)$ и, возможно, $(a_i b_i a_k)$. Что дает нам копию H_2 или H_3 , и полученное противоречие завершает доказательство факта $(ijk) \notin E(G)$.

Из вышесказанного вытекает, что Γ не может содержать индуцированных копий $\overline{P}_3$: случай, когда три вершины, порождающие такую копию, образуют ребро G , покрывается утверждением 4, а случай, когда они ребро не образуют, невозможен в силу утверждения 5. Граф Γ не может также содержать копии $\tilde{C}_4$: ввиду того, что соответствующие четыре вершины не могут образовывать независимое множество в G , по крайней мере три из них должны образовывать ребро, что снова противоречит утверждению 5.

Таким образом, мы сконструировали интерпретацию Фон-дер-Флаасса Γ для остовного подграфа 3-графа G , что противоречит сингулярности последнего. Тем самым, доказательство нашего основного результата завершено.

4. Разрозненные вычисления. В настоящий пункт включены два других результата похожей природы, которые, впрочем, по-видимому, представляют меньший интерес ввиду того, что фигурирующие в них дополнительные запрещенные 3-графы встречаются в $FDF(\Gamma_K)$ (а во втором случае – даже в исходном примере Турана).

Первый из этих результатов усиливает равенство (1).

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место*

$$\pi_{\min}(I_4^3, H_4) = \frac{4}{9},$$

где H_4 – 3-граф с множеством вершин [5] и множеством ребер

$$E(H_4) = \{(123)(124)(234)(135)\}.$$

Другой разумный подход к трудным экстремальным проблемам (примененный, например, в [15]) состоит в том, чтобы взять гипотетический контрпример и пытаться строить в нем возрастающие фрагменты, в том или ином смысле соответствующие экстремальным конфигурациям. В контексте (3, 4)-проблемы Турана мы в состоянии проверить состоятельность первого шага в данном направлении.

ТЕОРЕМА 3. *Имеет место*

$$\pi_{\min}(I_4^3, M_2) \geq 0.4557,$$

где $M_2 \stackrel{\text{def}}{=} FDF(\Gamma_K)|_{\mathbb{Z}_3 \times \{1,2\}}$ – единственная с точностью до изоморфизма экстремальная конфигурация на 6 вершинах.

Поскольку в настоящее время результаты подобного рода легко проверить с помощью находящегося в свободном доступе пакета Flagmatic [7], мы опускаем (довольно громоздкие) результаты наших вычислений.

Автор выражает благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Mantel, “Vraagstuk XXVIII”, *Wiskundige Opgaven*, **10** (1907), 60–61.
- [2] P. Turán, “Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról”, *Mat. és Fiz. Lapok*, **48** (1941), 436–452.
- [3] P. Keevash, “Hypergraph Turán Problems”, *Surveys in Combinatorics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **392**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, 83–139.
- [4] D. de Caen, “The current status of Turán problem on hypergraphs”, *Extremal Problems for Finite Sets*, Bolyai Soc. Math. Stud., **3**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1991, 187–197.
- [5] F. Chung, L. Lu, “An upper bound for the Turán number $t_3(n, 4)$ ”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **87**:2 (1999), 381–389.
- [6] A. A. Razborov, “On 3-hypergraphs with forbidden 4-vertex configurations”, *SIAM J. Discrete Math.*, **24**:3 (2010), 946–963.
- [7] V. Falgas-Ravry, E. R. Vaughan, “Applications of the semi-definite method to the Turán density problem for 3-graphs”, *Combin. Probab. Comput.*, **22**:1 (2013), 21–54.
- [8] W. G. Brown, “On an open problem of Paul Turán concerning 3-graphs”, *Studies in Pure Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983, 91–93.
- [9] A. V. Kostochka, “A class of constructions for Turán’s (3, 4)-problem”, *Combinatorica*, **2**:2 (1982), 187–192.
- [10] Д. Г. Фон-Дер-Флаасс, “Об одном способе построения (3, 4)-графов”, *Матем. заметки*, **44**:4 (1988), 546–550.
- [11] А. А. Разборов, “Об интерпретации Фон-Дер-Флаасса экстремальных примеров для (3, 4)-проблемы Турана”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Тр. МИАН, **274**, МАИК, М., 2011, 269–290.
- [12] O. Pikhurko, “The minimum size of 3-graphs without a 4-set spanning no or exactly three edges”, *European J. Combin.*, **32**:7 (2011), 1142–1155.
- [13] A. A. Razborov, “Flag algebras”, *J. Symbolic Logic*, **72**:4 (2007), 1239–1282.
- [14] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey Theory*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [15] Z. Füredi, O. Pikhurko, M. Simonovits, “The Turán density of the hypergraph $\{abc, ade, bde, cde\}$ ”, *Electron. J. Combin.*, **10** (2003), Research Paper 18.

А. А. Разборов

University of Chicago, USA,

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступило

13.12.2012

Исправленный вариант

23.03.2013