Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Лобанова, З. Б. Цалюк, Асимптотика решения интегрального уравнения Вольтерра с разностным ядром, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 421–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 18:34:47

Асимптотика решения интегрального уравнения Вольтерра с разностным ядром

М. С. Лобанова, З. Б. Цалюк

Рассматривается асимптотика решения интегрального уравнения Вольтерра с разностным ядром, в случае, когда свободный член имеет экспоненциальный рост.

Библиография: 1 название.

DOI: 10.4213/mzm10188

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)x(s) ds + f(t). \quad (0.1)$$

Изучается асимптотика решения уравнения (0.1) в случае, если свободный член имеет вид

$$f = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \phi_l(t),$$

где $\mu_l = \alpha_l + i\beta_l$, $\alpha_l, \beta_l \in \mathbb{R}$, $\phi_l \in A_m$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел, а $A_m[0, \infty)$ – множество непрерывных на $[0, \infty)$ функций, допускающих разложение

$$z(t) = \sum_{k=0}^m \frac{z_k}{(t+1)^k} + \frac{o(1)}{(t+1)^m}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{Re} \mu_l = \alpha$ при всех l , так как если $\operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \mu_l$, то $e^{\gamma t} = o(e^{\mu_l t})$.

Обозначим через $\widehat{K}(z)$ преобразование Лапласа ядра K , а через $K * x$ – свертку $\int_0^t K(t-s)x(s) ds$. И пусть $P_\gamma(t)$ – любой многочлен степени $\leq \gamma$.

Далее будем предполагать, что $\operatorname{Re} \mu > 0$, так как при $\operatorname{Re} \mu = 0$ асимптотика уравнения (0.1) хорошо изучена (см., например, [1]).

Нам понадобятся следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ [1; с. 24]. Пусть $\beta > 0$, $k, r \geq 0$ – целые, $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. Тогда

$$\frac{e^{i\gamma t}}{(t+1)^\beta} * t^r e^{\lambda t} = \begin{cases} e^{\lambda t} P_r(t) + \sum_{l=\beta}^{\beta+k} c_l \frac{e^{i\gamma t}}{(t+1)^l} + \frac{O(1)}{(t+1)^{k+\beta+1}}, & \lambda \neq i\gamma, \\ ce^{i\gamma t} (t+1)^{r+1-\beta} + e^{i\gamma t} P_r(t), & \lambda = i\gamma. \end{cases}$$

ЛЕММА. Пусть $m > 0$, $\gamma \geq 0$ – целое, и λ, μ – комплексные числа, причем $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Тогда при $\phi \in A_m$ свертка $t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t)$ имеет вид

$$t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) = \begin{cases} P_\gamma(t) e^{\lambda t} + e^{\mu t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \operatorname{Re} \mu \leq \operatorname{Re} \lambda, \\ e^{\mu t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \lambda. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \lambda$. Тогда

$$t^\gamma e^{(\lambda-\mu)t} * c_0 = P_\gamma(t) e^{(\lambda-\mu)t}.$$

Далее, при $k \geq 1$ в силу леммы 3 [1; с. 24]

$$t^\gamma e^{(\lambda-\mu)t} * \frac{1}{(t+1)^k} = e^{(\lambda-\mu)t} P_\gamma(t) + \sum_{l=k}^m \frac{c_l}{(t+1)^l} + \frac{o(1)}{(t+1)^m}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} t^\gamma e^{(\lambda-\mu)t} * \frac{o(1)}{(t+1)^m} &= e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty (t-s)^\gamma e^{-(\lambda+\mu)s} o\left(\frac{1}{(s+1)^m}\right) ds \\ &\quad + \int_t^\infty (t-s)^\gamma e^{(\lambda-\mu)(t-s)} o\left(\frac{1}{(s+1)^m}\right) ds \\ &\leq P_\gamma(t) e^{(\lambda-\mu)t} + o\left(\frac{1}{(t+1)^m}\right) \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)\theta} \theta^\gamma d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) &= e^{\mu t} \int_0^t (t-s)^\gamma e^{(\lambda-\mu)(t-s)} \phi(s) ds \\ &= e^{\mu t} \left(P_\gamma(t) e^{(\lambda-\mu)t} + \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right) \\ &= P_\gamma(t) e^{\lambda t} + e^{\mu t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right). \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Re} \mu = \operatorname{Re} \lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) &= \int_0^t (t-s)^\gamma e^{\lambda(t-s)} e^{\mu s} \phi(s) ds = \int_0^t (t-s)^\gamma e^{\lambda(t-s)} e^{\mu(s-t)} e^{\mu t} \phi(s) ds \\ &= e^{\mu t} \int_0^t (t-s)^\gamma e^{\operatorname{Im}(\lambda-\mu)(t-s)} \phi(s) ds = e^{\lambda t} (t^\gamma e^{\operatorname{Im}(\lambda-\mu)t} * \phi(t)). \end{aligned}$$

Согласно доказательству теоремы (см. [1; с. 82]),

$$t^\gamma e^{\operatorname{Im}(\lambda-\mu)t} * \phi(t) = P_\gamma(t) e^{\operatorname{Im}(\lambda-\mu)t} + \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m}.$$

Следовательно, свертка $t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t)$ имеет вид

$$t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) = e^{\lambda t} \left(P_\gamma(t) + \sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right).$$

Пусть $0 < \operatorname{Re} \lambda < \operatorname{Re} \mu$. Обозначим $H(t) = t^\gamma e^{(\lambda-\mu)t}$. Тогда

$$\begin{aligned} t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) &= e^{\mu t} \int_0^t (t-s)^\gamma e^{(\lambda-\mu)(t-s)} \phi(s) ds \\ &= e^{\mu t} (t^\gamma e^{(\lambda-\mu)t} * \phi(t)) = e^{\mu t} (H * \phi)(t). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^\infty t^m H(t) dt = \int_0^\infty t^{m+\gamma} e^{(\lambda-\mu)t} dt < \infty,$$

то $t^m H \in L_1[0, \infty)$. Следовательно, при $\phi \in A_m$ выполнены условия леммы 4 ([1; с. 65]), и

$$t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) = e^{\mu t} (H * \phi(t)) = e^{\mu t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right).$$

Окончательно получим

$$t^\gamma e^{\lambda t} * e^{\mu t} \phi(t) = \begin{cases} P_\gamma(t) e^{\lambda t} + e^{\mu t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \operatorname{Re} \mu \leq \operatorname{Re} \lambda, \\ e^{\mu t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \lambda. \end{cases}$$

Пусть K – ядро уравнения (0.1), а $R(t)$ – его резольвента и пусть $t^m K \in L_1$ при некотором m . Рассмотрим два случая.

Случай 1. Ядро K устойчиво. Это означает, что $R(t) \in L_1$. Так как $t^m K \in L_1$, то и $t^m R(t) \in L_1$ [1]. Кроме того, устойчивость означает, что уравнение $\hat{K}(z) = 1$ не имеет корней при $\operatorname{Re} z \geq 0$ [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$f = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \phi_l(t),$$

где $\mu_l = \alpha + i\beta_l$, $\beta_l \in R$ и $\phi_l \in A_m$. Тогда решение уравнения (0.1) имеет вид

$$x = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \xi_l(t),$$

где $\xi_l(t) \in A_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение уравнения (0.1) представимо в виде

$$x(t) = f(t) + R * f(t),$$

где $f = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \phi_l(t)$, $\mu_l = \alpha + i\beta_l$ и $\phi_l \in A_m$.

Рассмотрим свертку $R * e^{\mu_l t} \phi_l(t)$ при $l = 1, \dots, s$

$$R * e^{\mu_l t} \phi_l(t) = e^{\mu_l t} \int_0^t R(t-s) e^{-\mu_l(t-s)} \phi_l(s) ds.$$

Обозначим $H(t) = R(t) e^{-\mu_l t}$. Тогда

$$R * e^{\mu_l t} \phi_l(t) = e^{\mu_l t} (H * \phi_l(t)).$$

Так как $t^m R(t) \in L_1[0, \infty)$, то $t^m H \in L_1[0, \infty)$ и согласно следствию леммы 4 [1; с. 70], $H * \phi_l(t) \in A_m$.

Следовательно,

$$x(t) = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{i=0}^m \frac{c_l i}{(t+1)^i} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right) = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \xi_l(t), \quad \text{где } \xi_l(t) \in A_m.$$

Случай 2. Рассмотрим теперь неустойчивое ядро.

ТЕОРЕМА 2. Пусть уравнение $1 - \hat{K}(z) = 0$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots$ кратности m_k причем

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \geq \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_k \geq \dots$$

Тогда если

$$f = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \phi_l(t),$$

где $\mu_l = \alpha + i\beta_l$, $\alpha, \beta_l \in R$ и $\phi_l \in A_m$, то уравнение (0.1) при $t \rightarrow \infty$ имеет решение вида

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_l j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \alpha > \operatorname{Re} \lambda_k \geq \operatorname{Re} \lambda_{k+1} \geq \dots, \\ \sum_{l=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_l j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \alpha \leq \operatorname{Re} \lambda_k \leq \operatorname{Re} \lambda_{k-1} \leq \dots \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha > \operatorname{Re} \lambda_k \geq \operatorname{Re} \lambda_{k+1} \geq \dots$ и γ таково, что

$$\alpha > \gamma > \operatorname{Re} \lambda_k \geq \operatorname{Re} \lambda_{k+1} \geq \dots$$

Так как

$$R(t) = K(t) + \int_0^t R(t-s) K(s) ds,$$

то

$$R(t) e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t} K(t) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} R(t-s) K(s) e^{-\gamma s} ds.$$

Обозначим $K_1(t) = e^{-\gamma t}K(t)$ и $R_1(t) = e^{-\gamma t}R(t)$. Тогда

$$R_1(t) = K_1(t) + \int_0^t R_1(t-s)K_1(s) ds,$$

$$\widehat{K}_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt}e^{-\gamma t}K(t) dt = \int_0^\infty e^{-(z+\gamma)t}K(t) dt = \widehat{K}(z+\gamma).$$

Следовательно, уравнение $1 - \widehat{K}_1(z) = 0$ не имеет корней при $\operatorname{Re} z \geq 0$, т.е. ядро K_1 устойчиво. Тогда согласно теореме 1 решение уравнения

$$x_1(t) = \int_0^t K_1(t-s)x_1(s) ds + f_1(1)$$

имеет вид

$$x_1(t) = \sum_{l=1}^s e^{(\mu_l - \gamma)t} \xi_l(t), \quad \text{где } \xi_l \in A_m,$$

а значит, решение уравнения (0.1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_{lj}}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Пусть теперь $\alpha \leq \operatorname{Re} \lambda_k \leq \operatorname{Re} \lambda_{k-1} \leq \dots$. Возьмем число $\gamma < \alpha$. Так как

$$\gamma < \operatorname{Re} \mu \leq \operatorname{Re} \lambda_k \leq \operatorname{Re} \lambda_{k-1} \leq \dots$$

и

$$R(t) = K(t) + \int_0^t R(t-s)K(s) ds,$$

то

$$R(t)e^{-\gamma t} = e^{-\gamma t}K(t) + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}R(t-s)K(s)e^{-\gamma s} ds.$$

И обозначив $K_1(t) = e^{-\gamma t}K(t)$ и $R_1(t) = e^{-\gamma t}R(t)$, как и ранее получим

$$R_1(t) = K_1(t) + \int_0^t R_1(t-s)K_1(s) ds,$$

$$\widehat{K}_1(z) = \int_0^\infty e^{-zt}e^{-\gamma t}K(t) dt = \widehat{K}(z+\gamma).$$

Значит, уравнение $1 - \widehat{K}_1(z) = 0$ имеет корни вида $\lambda_j - \gamma$, причем $\operatorname{Re}(\lambda_j - \gamma) > 0$, $j < k$. При $j \geq k$ это уравнение не имеет корней.

Поскольку

$$x(t) = f(t) + \int_0^t R(t-s)f(s) ds,$$

обозначив $x_1(t) = e^{-\gamma t}x(t)$ и $f_1(t) = e^{-\gamma t}f(t)$, получим

$$x_1(t) = f_1(t) + \int_0^t R_1(t-s)f_1(s) ds.$$

Так как $f = \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \phi_l(t)$, то $f_1(t) = \sum_{l=1}^s e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l(t)$ и решение имеет вид

$$x_1(t) = \sum_{l=1}^s e^{-(\gamma - \mu_l)t} \phi_l(t) + \sum_{l=1}^s \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} R(t-s) e^{(\mu_l - \gamma)s} \phi_l(s) ds.$$

В силу замечания к теореме 2 [1; с. 46]

$$R_1(t) = R_2(t) + Q * R_2(t),$$

где

$$Q(t) = \sum_{j=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{(\lambda_j - \gamma)t},$$

а $t^m R_2(t) \in L_1[0, \infty)$. Поскольку

$$\int_0^t (t-s)^l e^{\lambda(t-s)} R_2(s) ds = e^{\lambda t} \int_0^\infty (t-s)^l e^{-\lambda s} R_2(s) ds + \int_t^\infty (t-s)^l e^{\lambda(t-s)} R_2(s) ds,$$

и

$$\int_0^\infty t^m \int_t^\infty e^{-\operatorname{Re} \lambda(s-t)} (s-t)^l |R_2(s)| ds dt \leq \int_0^\infty |R_2(s)| s^m \int_0^s \tau^l e^{-\operatorname{Re} \lambda \tau} d\tau ds < \infty,$$

то

$$R_1(t) = \sum_{j=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{(\lambda_j - \gamma)t} + R_3(t),$$

где $t^m R_3(t) \in L_1[0, \infty)$.

Согласно лемме свертки $t^q e^{(\lambda_j - \gamma)t} * e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l$, где $q = 1, \dots, m_j - 1$, $l = 1, \dots, s$ и $j = 1, \dots, k$, имеет вид

$$t^q e^{(\lambda_j - \gamma)t} * e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l = \begin{cases} P_q(t) e^{(\lambda_j - \gamma)t} + e^{(\mu_l - \gamma)t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \operatorname{Re} \mu_l < \operatorname{Re} \lambda_k; \\ e^{(\mu_l - \gamma)t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \operatorname{Re} \mu_l > \operatorname{Re} \lambda_k. \end{cases}$$

Отсюда

$$Q * e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l(t) = \sum_{j=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{(\lambda_j - \gamma)t} + \sum_{l=1}^s e^{(\mu_l - \gamma)t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_l j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right).$$

Далее

$$\begin{aligned} & R_3 * e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l \\ &= \int_0^t e^{(\mu_l - \gamma)(t-s)} \phi_l(t-s) R_3(s) ds = e^{(\mu_l - \gamma)t} \int_0^t e^{-(\mu_l - \gamma)s} R_3(s) \phi_l(t-s) ds \\ &= e^{(\mu_l - \gamma)t} [e^{-(\mu_l - \gamma)t} R_3(t) * \phi_l(t)] = e^{(\mu_l - \gamma)t} \tilde{\phi}_l(t), \quad \tilde{\phi}_l \in A_m \end{aligned}$$

(см. [1; с. 69]). Следовательно,

$$R_1 * e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l(t) = \sum_{j=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{(\lambda_j - \mu_l)t} + e^{(\mu_l - \gamma)t} \phi_l(t).$$

Поэтому имеем

$$x(t) = \sum_{l=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_l j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Объединяя результаты, получим решение уравнения (0.1) в виде

$$x(t) = \begin{cases} \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_l j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \alpha > \operatorname{Re} \lambda_k \geq \operatorname{Re} \lambda_{k+1} \geq \dots, \\ \sum_{l=1}^k P_{m_j-1}(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{l=1}^s e^{\mu_l t} \left(\sum_{j=0}^m \frac{c_l j}{(t+1)^j} + \frac{o(1)}{(t+1)^m} \right), & \alpha \leq \operatorname{Re} \lambda_k \leq \operatorname{Re} \lambda_{k-1} \leq \dots \end{cases}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Дербенев, З. Б. Цалюк, *Асимптотика решений линейных уравнений Вольтерра с разностным ядром*, Изд-во Кубанск. гос. ун-та, Краснодар, 2001.

М. С. Лобанова

Кубанский государственный университет,

г. Краснодар

E-mail: mary140388@mail.ru, dif@math.kubsu.ru

Поступило

02.11.2012

З. Б. Цалюк

Кубанский государственный университет,

г. Краснодар